李政道讲义

粒子物理和场论

李政道 著

上海科学技术出版社

李政道讲义

粒子物理和场论

李政道　著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

李政道讲义 粒子物理和场论/李政道著. 一上海:
上海科学技术出版社,2006.11
ISBN 7-5323-8623-6

Ⅰ.李... Ⅱ.李... Ⅲ.①基本粒子—物理学②场论 Ⅳ.①0572.2②0412.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第103299号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
(上海钦州南路71号 邮政编码200235)
新华书店上海发行所经销
上海新华印刷有限公司印刷
开本787×1092 1/16 印张44.125 插页4
字数610 000
2006年11月第1版 2006年11月第1次印刷
印数1—1 500
定价138.00元

序

1979 年 5 月,我应中国科学院的邀请,在北京讲授粒子物理和统计物理两门课,听众有来自全国一百多个科研单位和高等院校的研究生、教师和科研人员,达数百人之多。为了使国内科研人员尽快地走到国际前沿,我用了大量的时间准备讲稿,并将原来应该在一年到两年讲完的课集中在两个月内讲完。虽事隔近 30 年,当年学员认真听讲,认真记笔记,踊跃提问讨论的情景仍历历在目。中科院研究生院的领导和老师卓越的组织才能也使这次授课得以顺利进行。特别要提到的是,当年国内没有透明片投影仪,甚至都没有见过,研究生院组织人员到上海请有关单位按照我提供的草图专门制造了一台。至今我对上海工程师的智慧感叹不已。

众所周知,19 世纪开始的对以光的形式传播到地球的太阳能的研究,推动了基本粒子物理学的创立和发展。从迈克耳孙和莫雷的实验证明了光速不变,到洛伦兹创立了洛伦兹坐标变换公式,到爱因斯坦相对论的建立;从普朗克提出以量子假设为出发点的普朗克方程,给出黑体温度与其发光的光能关系,到玻尔、薛定谔、海森伯、狄拉克、费米和泡利等创立了量子力学和量子统计学。纵观 20 世纪科学发展史,我们可以看到,几乎所有高科技发展,包括对基本粒子物理的研究,都是从狭义相对论和量子力学这两条主线中衍生出来的。而这两条主线的出发点就是对来自太阳的能量的研究。在新的世纪,我们又迎来了新的挑战。宇宙学观察的结果发现了暗能量的存在。暗能量不仅存在,而且在宇宙中占主导地

位,它的总量约达到宇宙总量的 70%,而宇宙中的暗物质约占 25%、像我们这样的普通物质仅约占 5%。暗能量是怎么来的?它将如何发展?这是 21 世纪最重大问题之一。我深信,就像上世纪对太阳能的研究一样,对暗能量的研究将会创造新的理论,新的物理和新的观念,并且无疑会引起一场新的基础科学以及相关的应用科学的革命,同时也会推动基本粒子物理的研究进入一个崭新的时代。我们中国的年轻物理学家要抓住这个机遇,在新的挑战中,走在世界的前列。

这本书的出版得到了中科院研究生院的特别关注,在此我要向研究生院以及在出版过程中帮助过我的学者,阮同泽、汤拒非、庆承瑞、朱重远、陈崇光、赵保恒、裘照明、夏仁立、曹南薇和丁亦兵等表示诚挚的谢意。这本书所述的内容,均事隔年久。但我希望,此书尚能对读者学习和研究场论和粒子物理有所帮助。

李政道

2006 年 6 月

整理者前言

1979 年李政道教授应中国科学院的邀请来北京为全国近千名学者和学生讲授“统计力学”及“粒子物理和场论”两门课，中科院研究生院负责具体的组织接待工作。在近两个月的时间里，李先生每天上、下午上课，中午还与听课学生一起午餐，讨论。他花费了大量时间备课，其备课之认真和讲课的辛苦令人感动。这次讲课十分及时地帮助了国内粒子物理等相关领域研究的恢复，使得从事这方面研究的科研人员能够较快地跟上国外同行的步伐。根据这次讲课的讲稿整理出版的《统计力学》和《粒子物理和场论》两本书至今仍是很好的教科书。在李政道教授八十华诞之际，我们将这两本书重新整理出版，以表示中科院研究生院几万师生对李政道教授的敬意和谢意，并以此献给他的八十华诞。

《粒子物理和场论》这本书的初稿是由中科院研究生院陈崇光、赵保恒和理论物理所朱重远教授根据李政道先生 1979 年在北京讲课的手稿以及裘照明、夏仁立和曹南薇(当时的研究生院学生)等的记录稿整理而成。之后，李政道先生在美国出版了英文版的《粒子物理和场论简引》(*Particle Physics and Introduction to Field Theory*)。根据李政道先生的建议，中科院高能所阮同泽，研究生院汤拒非，理论物理所庆承瑞和朱重远教授将该英文版书译成中文，于 1984 年在国内出版。值此重新出版的机会，我们向上述有关人员表示深深的谢意，感谢他们此前为本书的出版所做的大量工作。本书这次重新排样后，我们请我院丁亦兵教授审读了样稿。丁教授从事粒子物理研究领域工作和相关科目教学 30 余年，他的审读确保了本次样稿的准确和完美，我们亦向他表示衷心感谢。

从 1946 年进入美国芝加哥大学，师从费米教授攻读博士学位算起，今年正好是李政道从事粒子物理和场论研究 60 周年纪念。我们在学习和研究这本教科书的同时，也能学习到一个一生孜孜不倦地“细推”物理并以此为乐，将物理研究视为自己的生活，年近 80 高龄仍然在粒子物理领域耕耘不息，始终站在第一线的理论物理大师是如何做物理的。

我们还可以从这本书中学到物理大师做学问的方法。对称性是粒子物理的精髓，我们可以学到李先生如何从对称性原理出发，研究粒子物理的各种模型；如何利用量纲分析，数量级估计的方法来演绎物理定律和定理。从这本书中，还可以学到李先生是如何将理论物理和实验物理有机地结合起来的方法。众所周知，李先生是实验与理论结合的典范，许多实验物理学家都愿意与李先生讨论他们在实验中遇到的问题，许多高能实验都是由李先生建议做的，包括美国布鲁克黑文(Brookhaven)实验室的大项目相对论重离子对撞机(RHIC)的建造等。这本书陈述的物理大多数都是在第二次世界大战时期发展起来的，李先生创建，或参与，或目睹了整个过程。因此，他对这些理论的解读和理解肯定有其独创之处，经过他的思维而写下的教科书将是人类宝贵的财富。

本次的整理，主要核对了科学名词的译法、重新编排了索引、统一了物理量符号的表示、改正了原整理稿中的差错，等等。这次整理稿不再附录原书中的 1980 年版粒子性质表，读者如果需要查询粒子性质表，请访问粒子数据组(particle data group)网站(http://pdg.lbl.gov/)。由于李先生工作繁忙，这次整理稿的排样未经他本人审阅，但在中国高等科学技术中心科研人员的帮助下，上海科学技术出版社高度认真负责的工作保证了本书的顺利出版，在此向他们表示特别感谢。

中国科学院研究生院

2006 年 7 月于北京

目　录

第一篇　场论简引

第二篇　粒子物理

第一篇

场 论 简 引

本书的主要目的是讨论粒子物理.因为场论,特别是相对论定域场论是分析粒子物理的主要理论工具,因此我们将首先对它作一介绍.一如我们将会看到的,通过弱相互作用过程和电磁相互作用过程,人们发现:至少在大于$\sim 10^{-16}$厘米的范围内,定域场论是适用的.对于更小的范围,虽然还没有充分的实验证据说明是否适用,但我们假定它也是正确的.

作为开头,我们来讨论一下本书要用到的量纲.令$[M]$、$[L]$和$[T]$分别代表质量、长度和时间的量纲.其他物理常量的量纲可用这三个基本量纲表示出来.例如

$$\text{光速 } c\text{:}\ [c] = \frac{[L]}{[T]},$$

$$\hbar = \frac{\text{普朗克常量}}{2\pi}\text{:}\ [\hbar] = \frac{[M][L]^2}{[T]},$$

$$\text{精细结构常数 } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}\text{:}\ [\alpha] = [1],$$

式中e是电荷,$[A]$代表A的量纲.

这三个独立的量纲单位可以任意选取.在我们的讨论中,将采用自然单位制:

$$c = \hbar = 1.$$

因此有

$$[L] = [T],$$

$$[M] = [L]^{-1},$$

$$[e^2] = [1].$$

物理学中任一方程,比如$A = B$,必须满足A的量纲应当和B的量纲相同的要求:$[A] = [B]$.表面上看来这种要求很初浅,但对检验方程的正确性很有用,特别是在冗长的计算中更是如此.在自然单位制里,由于只留下一个单位未被固定的量纲,比如说$[L]$,但人们仍可以用这种量纲上的考虑来作检验之用.

下面我们记三维位置矢量为$\boldsymbol{r}$,四维位置矢量的分量为$x_k = \boldsymbol{r}_k$ $(k = 1, 2, 3)$和$x_4 = it$.在希尔伯特空间(见第15页)中的矢量用右矢$|a\rangle$或相

应的列矩阵 $\psi(a)$来代表;它的共轭是左矢$\langle a|$或 $\psi^{\dagger}(a)$. 两矢量$|a\rangle$和$|b\rangle$之间的标量积是

$$\langle a \mid b\rangle = \psi^{\dagger}(a)\psi(b) = \sum_{n}\psi_{n}^{*}(a)\psi_{n}(b),$$

式中†表示厄米共轭,∗表示复数共轭,而对 n 的求和遍及 ψ 的全部分量.

第1章　有限自由度系统的力学

1.1　经典力学

首先让我们考虑一个经典的粒子系统，它的广义坐标是 q_i $(i=1, 2, \cdots, N)$. 例如在三维空间中我们有 n 个粒子，则 $N=3n$. 假设拉格朗日量为

$$L = L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1.1}$$

式中 $\dot{q}_i$ 表示 q_i 对时间的导数. 拉氏运动方程由变分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0 \tag{1.2}$$

给出，其中 δ 表示变分，它以初始和终了时刻 t_1 和 t_2 时 $\delta q_i = 0$ 为边界条件. 这是众所周知的作用量原理，它导出运动方程的拉氏形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1.3}$$

广义动量 p_i 为

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1.4}$$

于是系统的哈密顿量由下式给出：

$$H(q_i, p_i) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{1.5}$$

联系 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 和 $H(q_i, p_i)$ 的变换叫勒让德变换，这里将 L 看成是 q_i 和

$\dot{q}_i$的函数,H 是 q_i 和 p_i 的函数.

我们将经常采用这样的约定,即对重复指标是要求和的.因此,(1.5)式可以简单地写成

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L.$$

从(1.3)—(1.5)可以立刻得到运动方程的哈氏形式:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1.6}$$

1.2 量子化

其次我们来讨论这个系统的量子化.假定对于一个经典系统哈密顿量已经给定,为了对这个系统进行量子化,首先把 $q_i(t)$和 $p_i(t)$看成是满足下列对易关系的算符:

$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}$$

和

$$[q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0, \tag{1.7}$$

其中 $[A, B] = AB - BA$, δ_{ij} 是克罗内克符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

从经典力学过渡到量子力学时,每个物理可观测量变成一个厄米算符.如果我们把一个厄米算符用它的矩阵形式表示,那么它的矩阵元满足

$$A_{ij} = (A^\dagger)_{ij} \equiv (A^*)_{ji} = (A_{ji})^*,$$

式中†表示厄米共轭,* 表示复数共轭.因此有

$$q_i = q_i^\dagger, \quad p_i = p_i^\dagger, \quad L = L^\dagger \text{ 和 } H = H^\dagger. \tag{1.8}$$

在经典力学中, q_i、p_i 对时间的依赖关系是由哈密顿方程给定的.在量子力学中,任一算符 $O(t)$对时间的导数$\dot{O}$由海森伯方程

$$[H,\ O(t)] = -\mathrm{i}\,\dot{O}(t) \tag{1.9}$$

确定. 将 H 看作 q_i 和 p_i 的多项式,当 $O(t) = q_i$ 和 p_i 就可验证海森伯方程可以导出相同的哈密顿方程[见下面的例子].

在经典力学中 q_i 和 p_i 相互对易. 因此从经典的哈密顿量 $H(q_i,\ p_i)$ 过渡到它的量子力学形式时会产生混淆. 比如在经典力学中,

$$H_1 = p^3q^2 + q^2p^3 \text{ 和 } H_2 = 2pqpqp$$

代表着两个全同的系统,但是在量子力学中,它们相应于不同的哈密顿量. 因此我们要问:我们应当选取哪种形式? 回答是这样的:这两种哈密顿量代表两个不同的量子力学系统,每个系统有着同一经典极限. 知道经典极限并不总意味着惟一确定了相应的量子力学系统. 对于一个相对论物理系统,只有通过实验结果与理论分析的直接比较才能确定哪个哈密顿量形式是正确的.

例.　谐振子

最简单的谐振子是具有单位频率的谐振子. 它的拉氏量为

$$L = L(q,\ \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2).$$

由此

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \tag{1.10}$$

故

$$H(q,\ p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

利用哈密顿方程(1.6),可得

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q. \tag{1.11}$$

在经典力学中,这些函数的对易关系都是零. 这些函数称之为 c 数函数(c 表示 commuting,可对易的意思).

为将这个系统量子化,我们把所有的 c 数函数换成适当的 q 数算符(q 表示 quantum,量子的意思). 利用海森伯方程(1.9)可导得

$$-\mathrm{i}\dot{p} = [H, p] = \frac{1}{2}[q^2, p]$$

$$= \frac{1}{2}[q(qp - pq) - (pq - qp)q] = \mathrm{i}q,$$

亦即

$$\dot{p} = -q.$$

类似地可得

$$-\mathrm{i}\dot{q} = [H, q] = -\mathrm{i}p,$$

亦即

$$\dot{q} = p.$$

因此,海森伯方程给出和哈密顿方程完全相同的结果.

为分析本征值问题,引入

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p). \tag{1.12}$$

按照(1.8)式,有 $q = q^\dagger$ 和 $p = p^\dagger$,因此 a 的厄米共轭是

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - \mathrm{i}p). \tag{1.13}$$

我们可以解出 q 和 p 用 a 和 $a^\dagger$ 来表示:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \tag{1.14}$$

$$p = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger). \tag{1.15}$$

因 $[p, q] = -\mathrm{i}$,可得

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{1.16}$$

还有

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}(q - \mathrm{i}p)(q + \mathrm{i}p)$$

$$= \frac{1}{2}[q^2 + p^2 - \mathrm{i}(pq - qp)] = H - \frac{1}{2},$$

这归结为 $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$. 令

$$N = a^\dagger a, \tag{1.17}$$

则哈密顿量 H 也可写成

$$H = N + \frac{1}{2}. \tag{1.18}$$

算符 N 是非负的,因为它在任一态矢上的期待值是绝对值的平方,因而是 $\geqslant 0$ 的.

现在我们来证明 H 的本征矢 $|n\rangle$ 满足

$$H \mid n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \mid n\rangle, \tag{1.19}$$

其中 n 可以是任意正整数 0, 1, 2, …. 此外,令 $|0\rangle$ 是具有最小本征值的本征矢,亦即

$$H \mid 0\rangle = \frac{1}{2} \mid 0\rangle, \tag{1.20}$$

则其余的本征矢可写成

$$\mid n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \mid 0\rangle. \tag{1.21}$$

证明. 令 $|\rangle$ 是 N 的任一本征矢,

$$N \mid\rangle = l \mid\rangle, \tag{1.22}$$

式中 l 是一个数. 由于

$$Na^\dagger = a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger(a^\dagger a + 1) = a^\dagger(N + 1), \tag{1.23}$$

$$Na = a^\dagger a a = (a a^\dagger - 1) a = a(N - 1), \tag{1.24}$$

因而有 $Na^\dagger \mid\rangle = (l+1) a^\dagger \mid\rangle$ 和 $Na \mid\rangle = (l-1) a \mid\rangle$. 其次,将第一个方程中的 $|\rangle$ 换成 $a^\dagger|\rangle$,第二个方程中的 $|\rangle$ 换成 $a|\rangle$. 重复这一步骤 n 次,可得

$$N(a^\dagger)^n \mid\rangle = (l + n)(a^\dagger)^n \mid\rangle, \tag{1.25}$$

$$Na^n \mid \rangle = (l-n)a^n \mid \rangle. \tag{1.26}$$

现在,若 $l \neq$ 整数,则在(1.26)中选取 $n =$ 整数 $> l$,我们得到 N 的本征值为负的;这是不可能的,因为在前面已说过,N 是非负的.由此 $l =$ 整数,且根据(1.26)式

$$\mid 0\rangle \equiv a^l \mid \rangle$$

满足

$$N \mid 0\rangle = 0. \tag{1.27}$$

此外,零必为 N 的最小本征值.在(1.25)式中用$|0\rangle$代替$|\rangle$,可得

$$N(a^\dagger)^n \mid 0\rangle = n(a^\dagger)^n \mid 0\rangle,$$

式中 n 可以是任意正整数.由此(1.19)—(1.21)得证.让我们选取态$|0\rangle$的归一化使得 $\langle 0 \mid 0\rangle = 1$. 由此,从(1.21)式所有其他的态$|n\rangle$也都已归一化:$\langle n \mid n\rangle = 1$.

从(1.24)和(1.27)式,可见

$$Na \mid 0\rangle = -a \mid 0\rangle.$$

由于 N 是非负的,因此必须有

$$a \mid 0\rangle = 0. \tag{1.28}$$

在坐标表象中,p 是 $-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial q}$. 令 $\psi(q) = \langle q \mid 0\rangle$,方程(1.28)变为

$$a\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi = 0.$$

这确定了解 $\psi(q) \propto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}q^2}$. 故不仅$|0\rangle$存在,并且它还是非简并的.由此证明完毕.

根据(1.21)式,

$$a^\dagger \mid n\rangle = \sqrt{n+1} \mid n+1\rangle, \tag{1.29}$$

故 $a^\dagger \mid n-1\rangle = \sqrt{n} \mid n\rangle$,这导致

$$a \mid n\rangle = \frac{aa^\dagger}{\sqrt{n}} \mid n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(a^\dagger a + 1) \mid n-1\rangle,$$

亦即

$$a \mid n\rangle = \sqrt{n} \mid n-1\rangle. \tag{1.30}$$

通常称算符 $N = a^\dagger a$ 为占有数算符. 由于(1.29)和(1.30)式,$a^\dagger$称为产生算符,而 a 称为湮没算符.

在这个谐振子例子的情形中,可以考虑一空间,其基矢是本征矢$|0\rangle$, $|1\rangle$, $\cdots$. 由于这些矢量的正交性,可写

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \cdots.$$

相应的 N、$a^\dagger$和 a 的矩阵形式为

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

练习.　设哈密顿量 $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$,其中 m 和 k 是常数, 试按谐

振子例子的步骤重复做一次.

1.3 若干一般定理

令 H 是一线性空间

$$\{v_a\},\ a = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{1.32}$$

中的一个哈密顿量. 这里基矢 v_a 形成一正交集合. 这个空间中的矢量 $|\rangle$ 有时称之为态矢量,或简称为态. 假定哈密顿量算符有下限;亦即,对任一态 $|\rangle$,比值 $\frac{\langle|H|\rangle}{\langle|\rangle}$ 永远大于一固定常数 c. 它的本征方程可写成 $H\mid a\rangle = E_a\mid a\rangle$, 它的本征值 E_a 可以排列起来如下 $(a = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$E_0 \leqslant E_1 \leqslant \cdots \leqslant E_m \leqslant E_{m+1} \leqslant \cdots, \tag{1.33}$$

由于 H 是厄米的,对于 H 的任意本征矢 $|a\rangle$ 和 $|a'\rangle$,总可选取

$$\langle a \mid a'\rangle = \delta_{aa'}. \tag{1.34}$$

定理 1. $\frac{\langle|H|\rangle}{\langle|\rangle}$ 的极小值是

(i) E_0,若 $|\rangle$ 是任意态矢;

(ii) E_1,若 $|\rangle$ 为满足 $\langle 0|\rangle = 0$ 的任意态矢;

(iii) E_n,若 $|\rangle$ 为满足条件 $\langle 0|\rangle = \langle 1|\rangle = \cdots = \langle n-1|\rangle = 0$ 的任意态矢.

证明. 令

$$E = \frac{\langle|H|\rangle}{\langle|\rangle},$$

并记

$$\psi = |\rangle,\ \psi^\dagger = \langle|.$$

为寻找 E 的极小值,考虑变分 $\psi \to \psi + \delta\psi$. E 的相应变分为

$$\delta E = \frac{1}{\psi^\dagger\psi}(\delta\psi^\dagger H\psi + \psi^\dagger H\delta\psi) - \frac{\psi^\dagger H\psi}{\psi^\dagger\psi}\left(\frac{\delta\psi^\dagger\psi}{\psi^\dagger\psi} + \frac{\psi^\dagger\delta\psi}{\psi^\dagger\psi}\right)$$

$$= \frac{1}{\psi^\dagger \psi}[\delta\psi^\dagger (H-E)\psi + \psi^\dagger (H-E)\delta\psi].$$

令 $f = (H-E)\psi$. 若 $f = 0$,则很明显 $\delta E = 0$. 若 $f \neq 0$,可选取 $\delta\psi = \varepsilon f$,这里 ε 是无穷小实数. 这样,上面的方程可写成

$$\delta E = \frac{2}{\psi^\dagger \psi}\varepsilon f^\dagger f.$$

对于任意 $\delta\psi$, E 是极小的必要条件是 $\delta E = 0$. 由此 $f = 0$,这意味着 $(H-E)\psi = 0$. 由于 E_0 是 H 的最小本征值,因此(i)成立.

在(1.32)式中,可选取 $v_0 = |\,0\rangle$. 考虑由全部 $i \geqslant 1$ 的 v_i 张成的子空间 $\{v_i\}$. 按定义,所有与 $|0\rangle$ 正交的矢量都在这子空间内. 此外,对任一 $v_i (i \geqslant 1)$, H 满足

$$\langle v_0 \mid H \mid v_i \rangle = E_0 \langle v_0 \mid v_i \rangle = 0.$$

故 Hv_i 也属于这个子空间 $\{v_i\}$. 现在我们来考虑这个子空间中的哈密顿量. 按照在证明(i)中所用的同样论据可完成(ii)的证明;同样地,可证明(iii).

我们称一个基矢集 $\{|a\rangle\}$ 是完全的,如果对于任一态矢 $|\rangle$,存在一个数字常数集 $\{c_a\}$ 使得

$$\lim_{m \to \infty} \langle R_m \mid R_m \rangle = 0,$$

其中

$$|\, R_m \rangle = |\rangle - \sum_{a=0}^{m} c_a \mid a \rangle.$$

定理 2.　若一厄米算符 H 有下限但无上限 $\Big($亦即,对任一常数 c,存在一态矢 $|\rangle$ 使得 $\dfrac{\langle | H | \rangle}{\langle | \rangle}$ 大于 $c\Big)$,则所有它的本征矢的集合 $\{|a\rangle\}$ 是完全的.

证明.　由于 H 是厄米算符,可选取它的本征矢使它满足(1.34). 若 $\{|a\rangle\}$ 张成有限维空间,则定理是明显的. 我们仅需考虑当 $\{|a\rangle\}$ 张成无限维空间时的情形.

让我们把 H 的本征值按(1.33)的形式排列起来. 由于 H 有下限,作

替换 $H \to H+$ 常数 c 后，可设

$$E_0 > 0.$$

选取 $c_a = \langle a \mid \rangle$，由此

$$\mid R_m \rangle = \mid \rangle - \sum_{a=0}^{m} c_a \mid a \rangle$$

满足

$$\langle a \mid R_m \rangle = 0 \quad 当\ a \leqslant m.$$

由定理 1，有

$$\frac{\langle R_m \mid H \mid R_m \rangle}{\langle R_m \mid R_m \rangle} \geqslant E_{m+1} \geqslant E_m. \tag{1.35}$$

由于 H 无上限，则得当 $m \to \infty$ 时

$$E_m \to \infty \tag{1.36}$$

另外，

$$\begin{aligned}\langle R_m \mid H \mid R_m \rangle &= \Big(\langle \mid - \sum_a c_a^* \langle a \mid\Big) H \Big(\mid \rangle - \sum_b c_b \mid b \rangle\Big) \\ &= \langle \mid H \mid \rangle - \sum_a c_a^* \langle a \mid H \mid \rangle - \sum_b c_b \langle \mid H \mid b \rangle \\ &\quad + \sum_{a,b} c_a^* c_b \langle a \mid H \mid b \rangle,\end{aligned}$$

其中求和遍及 a 和 $b = 1, 2, \cdots, m$. 由于$|a\rangle$和$|b\rangle$是 H 的本征态，故

$$\begin{aligned}\langle R_m \mid H \mid R_m \rangle &= \langle \mid H \mid \rangle - \sum_a c_a^* c_a E_a - \sum_b c_b c_b^* E_b + \sum_a c_a^* c_a E_a \\ &= \langle \mid H \mid \rangle - \sum_b c_b c_b^* E_b.\end{aligned}$$

由于第二项 $-\sum_b c_b c_b^* E_b$ 恒负，故上式 $\leqslant$ 第一项$\langle \mid H \mid \rangle$. 利用(1.35)，可得

$$\langle R_m \mid R_m \rangle \leqslant \frac{1}{E_m} \langle R_m \mid H \mid R_m \rangle \leqslant \frac{1}{E_m} \langle \mid H \mid \rangle. \tag{1.37}$$

由于$\langle \mid H \mid \rangle$和 m 无关，且$\langle R_m \mid R_m \rangle$是正的，故利用(1.36)可得当 $m \to \infty$ 时

$$\langle R_m \mid R_m \rangle \to 0,$$

于是定理 2 得证. 因此 H 的全部本征矢的集合可用作希尔伯特空间中的基矢全集.

下面是几个例子：

(i) $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$, 其中 $V(x)$有下限.

在 x 表象中, $p^2 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. 选取

$$\langle x \mid \rangle \propto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda^2}},$$

则当 $\lambda \to 0$ 时,

$$\frac{\langle \mid p^2 \mid \rangle}{\langle \mid \rangle} \to \infty.$$

因此 H 是有下限的,但无上限. 它的全部本征矢的集合形成一函数全集.

(ii) 考虑在二维空间的一个圆. 令 $H = p_\phi^2 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}$, 其中 ϕ 是角度变量,从 0 变到 2π.

令$|m\rangle$是 H 的一个本征矢. 在 ϕ 表象中可记为$\psi_m(\phi) = \langle \phi \mid m \rangle$, 它是一个 ϕ 的周期函数. 本征方程 $H\psi_m = m^2\psi_m$ 的解为

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \; m = 0, \pm 1, \cdots.$$

由定理 2 我们知道,除了零测度的点集外,任何一个函数可用这些本征函数来展开：

$$f(\phi) = \sum c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}.$$

这是人们熟知的傅里叶定理的主要内容.

(iii) 其次,考虑三维空间中一个单位球的表面. 在球表面上令 $H = -\nabla^2$, 用球坐标表示为

$$H = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

H 的本征函数称为球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$,它们满足

$$HY_{lm}(\theta,\ \phi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\ \phi),\tag{1.38}$$

其中 $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. Y_{lm}对 ϕ 的依赖关系为

$$Y_{lm}\propto e^{im\phi},\tag{1.39}$$

$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm l$. 定理 2 告诉我们,除了零测度的点集外,任何一个函数 $f(\theta,\ \phi)$可用 Y_{lm}来展开:

$$f(\theta,\ \phi)=\sum c_{lm}Y_{lm}(\theta,\ \phi).$$

方程(1.38)和(1.39)确定 Y_{lm}准确至一相乘因子. 通常的选取为

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ \cdots.\tag{1.40}$$

定理 2 的应用是很广的. 由这种矢量全集张成的空间称为希尔伯特空间.

习题 1.1. 设 H 是有下限的厄米算符. 将它的本征值 E_0, E_1, …和相应的本征态$|0\rangle$, $|1\rangle$, …按(1.33)排列起来.

(i) 令$|b\rangle$是任意选定的一个矢量. 定义 $F(b)$是$\dfrac{\langle\ |H|\ \rangle}{\langle\ |\ \rangle}$的极小值,这里$|\ \rangle$可以是满足 $\langle b\ |\ \rangle=0$ 的任一矢量. 通过改变$|b\rangle$的选取,证明 $F(b)$的极大值是 H 的第二个最小本征值 E_1.

提示:为寻找 $F(b)$,可考虑矢量

$$\langle b\mid 1\rangle\mid 0\rangle-\langle b\mid 0\rangle\mid 1\rangle.$$

(ii) 设$|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$, …, $|b_n\rangle$是 n 个任意选定的线性无关的矢量. 定义 $F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$是$\dfrac{\langle\ |H|\ \rangle}{\langle\ |\ \rangle}$的极小值,这里$|\ \rangle$可以是满足 $\langle b_1\ |\ \rangle=\langle b_2\ |\ \rangle=\cdots=\langle b_n\ |\ \rangle=0$ 的任一矢量. 证明 $F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$的极大值是 E_n(极大-极小值原理).

习题 1.2. (i) 在上一习题中,假设所有态矢量均受约束 C. 相应地,所有的本征值和本征矢变为: $E_n\to E_n'$和 $|\ n\rangle\to|\ n'\rangle$. 利用极大-极小

值原理证明 $E_0 \leqslant E'_0$, $E_1 \leqslant E'_1$, $\cdots$, $E_n \leqslant E'_n$, $\cdots$.

(ii) 考虑一块边界 B 固定的膜的振动. 其特征频率 ω_n 由方程 $-\nabla^2\phi = \omega_n^2\phi$ 决定. 式中振动振幅 ϕ 在边界处为零. 将这些频率依次排列：$\omega_0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots$. 对 ϕ 加一约束使在膜中一闭合曲线 C 内 ϕ 也为零，如图 1.1 所示. 相应地，特征频率由 ω_n 变成 ω'_n. 证明对所有 n，有 $\omega_n \leqslant \omega'_n$.

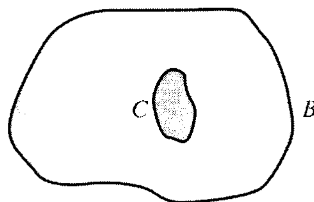


图 1.1

参 考 文 献

下面是一些标准教科书，它们讨论到了本章所讲的内容：

Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols. New York: Interscience Publishers, Inc, 1962.

Dirac P A M. *Quantum Mechanics*. Oxford: The Clarendon Press, 1958.

Whittaker E T. *Analytical Dynamics*. Cambridge: The University Press, 1960.

第2章 零自旋场

2.1 一般讨论

现在我们转到定域场论的量子化问题上来. 设 $\phi(x)$为一定域场,其中 $x=x_\mu=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$;亦即 $x_i=\boldsymbol{r}_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$, $x_4=\mathrm{i}t$. 若 ϕ 在洛伦兹变换下不变,则称 ϕ 是零自旋场. 另外,若在空间反射下不变号,则称它是标量场;否则,为赝标量场. 作为讨论的开始,考虑一厄米场

$$\phi(x)=\phi(\boldsymbol{r},\ t)=\phi^\dagger(x).$$

首先我们可将整个系统封闭在一个有限的、大小为 Ω 的矩形盒内,并假定 ϕ 满足周期性边界条件,最后,令 $\Omega\to\infty$. 应强调的是,这种特殊做法和一开始就把 Ω 设成是无限的做法在物理上是一样的. 就我们所知,我们的宇宙很可能是有限的. 由于在现有粒子物理实验准确度的范围内,远远没有可能来确定它的大小,更谈不上它的边界条件了. 因此让 Ω 按不同的方式趋向无穷应得到相同的理论结果.

设系统的拉氏密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2-V(\phi),\tag{2.1}$$

其中重复指标 μ 由 1 到 4 求和(下面也是这样),故在上式中

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2=\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}=(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2-\dot{\phi}^2.$$

拉氏量 L 由下式给出

$$L=\int_\Omega\mathscr{L}\mathrm{d}^3r=\int_\Omega\mathscr{L}(\phi(\boldsymbol{r},\ t),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{r},\ t))\mathrm{d}^3r,\tag{2.2}$$

它应看成是$\phi(\boldsymbol{r}, t)$及其对时间的导数$\dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t)$的泛函$L(\phi, \dot{\phi})$. 和(1.1)式进行比较,可见$\phi$相应于广义坐标,$\dot{\phi}$相应于速度. 主要的差别在于:(1.1)式中的指标i是分立的、有限的;而在场的情形中,相应的指标是$\boldsymbol{r}$,它是连续的、具有无限多个值.

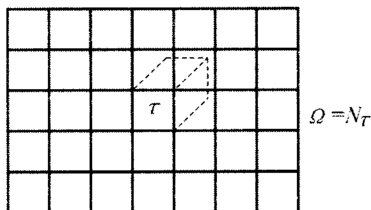


图 2.1 Ω分割成N个大小为τ的小立方体

为方便起见,如图2.1所示,可以将Ω分割成许多大小为τ的小立方体. 设在每个特定的小立方体中$\phi(\boldsymbol{r}, t)$的值由$\phi(\boldsymbol{r}_i, t) \equiv \phi_i(t)$来代表,其中$\boldsymbol{r}_i$是这个小立方体中任意选取的固定点坐标. 设$q_i(t) \equiv \tau\phi_i(t)$,则可将方程(2.2)写成

$$L = \frac{1}{2}\int_\Omega \dot{\phi}^2 \mathrm{d}^3 r - \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]\mathrm{d}^3 r$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\dot{q}_i^2}{\tau} - \cdots,$$

式中…表示和$\dot{q}_i$无关的项. 因此相应的广义动量为

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i}{\tau} = \dot{\phi}_i(t) \equiv \Pi(\boldsymbol{r}_i, t). \tag{2.3}$$

当$\tau \to 0$时,利用(1.5)可得哈密顿量为

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \int\left[\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]\mathrm{d}^3 r. \tag{2.4}$$

根据量子化的一般定则

$$[p_i(t), q_j(t)] = -\mathrm{i}\delta_{ij},$$

有

$$[\Pi(\boldsymbol{r}_i, t), \phi(\boldsymbol{r}_j, t)] = -\mathrm{i}\frac{\delta_{ij}}{\tau},$$

当 $\tau \to 0$ 时有

$$[\Pi(\boldsymbol{r}, t), \phi(\boldsymbol{r}', t)] = -\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2.5}$$

式中 $\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 是三维狄拉克 δ 函数. δ 函数的定义是

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0, \text{当 } \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$$

和

$$\int \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3 r = 1,$$

其中积分遍及包含点 $\boldsymbol{r}'$ 的任一体积. 在(2.5)式中,点 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 均假定在盒子 Ω 内. 同样,因为 $[q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0$, 有

$$[\phi(\boldsymbol{r}, t), \phi(\boldsymbol{r}', t)] = [\Pi(\boldsymbol{r}, t), \Pi(\boldsymbol{r}', t)] = 0. \tag{2.6}$$

场的运动方程仍由同一海森伯方程(1.9)式给出. 在(1.9)式中令 $O(t)$ 为 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$,可得

$$[H, \phi(\boldsymbol{r}, t)] = -\mathrm{i}\dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t).$$

考虑到(2.4)—(2.6)式,可以看出上式左端为 $-\mathrm{i}\Pi(\boldsymbol{r}, t)$,导致

$$\Pi(\boldsymbol{r}, t) = \dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t), \tag{2.7}$$

这和(2.3)式一致,同样地,在海森伯方程(1.9)中令 $O(t) = \Pi(\boldsymbol{r}, t)$, 我们有

$$[H, \Pi(\boldsymbol{r}, t)] = -\mathrm{i}\dot{\Pi}(\boldsymbol{r}, t). \tag{2.8}$$

(2.5)式也可写成

$$[\phi(\boldsymbol{r}, t), \Pi(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \mathrm{i}\frac{\delta\phi(\boldsymbol{r}, t)}{\delta\phi(\boldsymbol{r}', t)},$$

最后一表式中的变分导数,可看作

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \int \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}', t)\mathrm{d}^3 r.$$

由此

$$[H, \Pi(\boldsymbol{r}, t)] = \mathrm{i}\frac{\delta H}{\delta\phi(\boldsymbol{r}, t)} = \mathrm{i}\left(-\nabla^2\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right),$$

这和(2.7)及(2.8)式一起给出

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0. \tag{2.9}$$

这一运动方程也可利用变分原理

$$\delta\int L\mathrm{d}t = \delta\int \mathscr{L}\mathrm{d}^4 x = 0 \tag{2.10}$$

推导出来. 当然这不是偶然的,其基本理由与第 1 章中讨论有限系统时相同.

由此,我们看到量子场论仅仅是有限系统的量子力学到无限系统的推广.

2.2 傅里叶展开(自由场或相互作用场)

在任一给定的时刻 t,算符 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\Pi(\boldsymbol{r}, t)$ 可用傅里叶级数来展开:

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} q_{\boldsymbol{k}}(t) \tag{2.11}$$

和

$$\Pi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} p_{-\boldsymbol{k}}(t), \tag{2.12}$$

式中 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$ 是希尔伯特空间中与时间有关的算符,而 $\boldsymbol{k}$ 的分量由下式给定

$$k_i = \frac{2\pi l_i}{L_i},\ i = 1, 2, 3, \tag{2.13}$$

而

$$l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{2.14}$$

其中 L_1, L_2, L_3 分别是矩形盒 Ω 的三个边长,这一展式的正确性只依赖

于傅里叶级数的完全性,这已在上章讨论过.[我们可以把算符 $\phi(\boldsymbol{r},\ t)$和 $\Pi(\boldsymbol{r},\ t)$看成矩阵;矩阵的每个元素是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的一个 c 数函数,它在任一给定时刻 t,可用傅里叶级数展开,其结果即为上面的表式.]由于 ϕ 和 Π 是厄米算符,亦即 $\phi(\boldsymbol{r},\ t)=\phi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t)$ 和 $\Pi(\boldsymbol{r},\ t)=\Pi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t)$,我们有

$$q_{\boldsymbol{k}}(t)=q^\dagger_{-\boldsymbol{k}}(t),\ p_{\boldsymbol{k}}(t)=p^\dagger_{-\boldsymbol{k}}(t). \tag{2.15}$$

定义

$$a_{\boldsymbol{k}}(t)\equiv\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{\boldsymbol{k}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}p_{-\boldsymbol{k}}\right), \tag{2.16}$$

式中

$$\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}, \tag{2.17}$$

且 m 是任意选定的实参量.由于(2.15), $q_{\boldsymbol{k}}(t)$的厄米共轭是

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)=\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{-\boldsymbol{k}}-\frac{\mathrm{i}}{\omega}p_{\boldsymbol{k}}\right). \tag{2.18}$$

改变 $\boldsymbol{k}$ 的符号,可得

$$a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}(t)=\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{\boldsymbol{k}}-\frac{\mathrm{i}}{\omega}p_{-\boldsymbol{k}}\right). \tag{2.19}$$

从(2.16)和(2.19),可把 $q_{\boldsymbol{k}}$和 $p_{-\boldsymbol{k}}$用 $a_{\boldsymbol{k}}$和 $a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}$表示出来:

$$q_{\boldsymbol{k}}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[a_{\boldsymbol{k}}(t)+a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}(t)]$$

和

$$p_{-\boldsymbol{k}}(t)=\frac{-\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2\omega}}[a_{\boldsymbol{k}}(t)-a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}(t)].$$

把这些式子代入(2.11)和(2.12),可得

$$\phi(\boldsymbol{r},\ t)=\sum\frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}[a_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \tag{2.20}$$

和

$$\Pi(\boldsymbol{r},\ t)=\sum\frac{-\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2\omega\Omega}}[a_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]. \tag{2.21}$$

其次,由于(2.13)和(2.14),我们看到

$$\Omega^{-1}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3 r = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \tag{2.22}$$

这在 $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ 时为零,在 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ 时为 1. 因此,从(2.11)和(2.12),有

$$q_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\phi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r$$

和

$$p_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\Pi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r.$$

这可导致

$$[p_{\boldsymbol{k}}(t),\ q_{\boldsymbol{k}}'(t)] = \frac{1}{\Omega}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}[\Pi(\boldsymbol{r},\ t),\ \phi(\boldsymbol{r}',\ t)]\mathrm{d}^3 r\mathrm{d}^3 r'.$$

利用(2.5)和(2.22)可得

$$[p_{\boldsymbol{k}}(t),\ q_{\boldsymbol{k}'}(t)] = -\mathrm{i}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}. \tag{2.23}$$

同样地,利用(2.6)有

$$[q_{\boldsymbol{k}}(t),\ q_{\boldsymbol{k}'}(t)] = [p_{\boldsymbol{k}}(t),\ p_{\boldsymbol{k}'}(t)] = 0. \tag{2.24}$$

由这些表达式可推导出 $a_{\boldsymbol{k}}$ 和 $a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$ 的对易关系. 从(2.16)和(2.18),可得

$$\begin{aligned}&[a_{\boldsymbol{k}}(t),\ a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}(t)] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'},\\ &[a_{\boldsymbol{k}}(t),\ a_{\boldsymbol{k}'}(t)] = [a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t),\ a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}(t)] = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

说明.

1. 可以把上面的证明倒过来,从 $a_{\boldsymbol{k}}$ 和 $a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$ 的对易关系(2.25)出发,然后建立 ϕ 和 Π 的对易关系(2.5)和(2.6). 从(2.25)和傅里叶展开式(2.20)和(2.21),可直接导出(2.6)式和

$$[\Pi(\boldsymbol{r},\ t),\ \phi(\boldsymbol{r}',\ t)] = -\mathrm{i}\sum \frac{1}{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}. \tag{2.26}$$

此外,我们注意到,对于体积 Ω 内的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$,函数 $\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 可用傅里叶级数展成.

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \sum_k c_k(\boldsymbol{r}') \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

由于正交性关系(2.22),有

$$c_k(\boldsymbol{r}') = \int \frac{d^3 r}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'},$$

从而

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \sum_k \frac{1}{\Omega} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}. \tag{2.27}$$

将(2.27)式代入(2.26)式中,可得对于在体积 Ω 内的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$,

$$[\Pi(\boldsymbol{r}, t), \phi(\boldsymbol{r}', t)] = -i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

它就是(2.5). 迄今为止,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$的点都限于在 Ω 之内. 在 $\Omega \to \infty$ 的极限下,上面的表达式在任何地方都成立.

2. 当 $\Omega \to \infty$ 时,可将遍及矢量 $\boldsymbol{k}$ 的求和用积分代替:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_k \to \frac{1}{8\pi^3}\int d^3 k. \tag{2.28}$$

这点可以利用(2.13)证明,并注意到按(2.14)式,参数 l_i 以间隔

$$\Delta l_i = 1 \tag{2.29}$$

遍取分立值:…, −2, −1, 0, 1, 2, …;因此,相应的 k_i 的改变为

$$\Delta k_i = \frac{2\pi}{L_i}\Delta l_i = \frac{2\pi}{L_i}. \tag{2.30}$$

由于(2.29)、(2.30)和 $\Omega = L_1 L_2 L_3$, 可写

$$\frac{1}{\Omega}\sum_k = \frac{1}{\Omega}\sum_k \Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3 = \frac{1}{8\pi^3}\sum_k \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3.$$

当 $L_i \to \infty$ 时,有 $\Delta k_i \to 0$. 因此上式归结为(2.28).

在同一极限 $\Omega \to \infty$ 下, 方程(2.27)变为

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} d^3 k. \tag{2.31}$$

虽则(2.27)只当 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 均在体积 Ω 内时成立，但上式则对任意的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 都成立.

3. 注意到傅里叶展开式(2.20)—(2.21)以及对易关系(2.25)是否成立是和哈密顿量的具体形式无关的，因此(2.4)式中的函数 $V(\phi)$ 可以取任意形式. 若 $V(\phi)$ 为 ϕ 的二次函数，则理论是自由场论，否则不然. 此外，到目前为止，(2.17)式中的参量 m 是完全任意的.

这一情况类似于在第1章中讲过的有限粒子系统的量子力学. 在那里，广义坐标 $q_i(t)$ 和广义动量 $p_i(t)$ 的选取也是和粒子间的相互作用势无关的.

2.3 希尔伯特空间(自由场或相互作用场)

不失任何普遍性，可写

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathscr{H}_{\text{int}}(\phi),$$

式中 m 是(2.17)中引入过的同一参量，$\mathscr{H}_{\text{int}}$ 简单地定义为

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = V(\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{2.32}$$

由此哈密顿量(2.4)可写成

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \tag{2.33}$$

式中

$$H_0 = \int \mathscr{H}_0 \mathrm{d}^3 r,\ H_{\text{int}} = \int \mathscr{H}_{\text{int}} \mathrm{d}^3 r, \tag{2.34}$$

且

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}(\Pi^2 + (\nabla\phi^2) + m^2\phi^2).$$

经分部积分，H_0 变成

$$H_0 = \frac{1}{2}\int [\Pi^2 + \phi(-\nabla^2 + m^2)\phi] \mathrm{d}^3 r. \tag{2.35}$$

利用(2.17)和(2.20),可得

$$(-\nabla^2+m^2)\phi=\sum_k \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega\Omega}}[a_k(t)e^{ik\cdot r}+a_k^\dagger(t)e^{-ik\cdot r}].$$

将此式和(2.21)式代入(2.35),有

$$H_0=\frac{1}{2}\sum_k\omega(a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k)=\sum_k\omega\left(a_k^\dagger a_k+\frac{1}{2}\right). \tag{2.36}$$

从1.2节中讨论的例子知道,

$$N_k\equiv a_k^\dagger a_k \tag{2.37}$$

的本征值为 $n_k=0,1,2,\cdots$. 故算符 $\sum\omega a_k^\dagger a_k$ 为一有下限而无上限的算符. 其本征值的总体形成一全集,它张成这一系统的整个希尔伯特空间. 这些经适当归一化后的本征矢为

$$|0\rangle,\ a_k^\dagger|0\rangle,\ a_k^\dagger a_{k'}^\dagger|0\rangle(\text{若 } \boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}'),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k^\dagger)^2|0\rangle,\ \cdots \tag{2.38}$$

式中态$|0\rangle$对所有的 $\boldsymbol{k}$ 均满足

$$a_k|0\rangle=0. \tag{2.39}$$

H_0 的最低能量态为$|0\rangle$,因此将称它为 H_0 的真空态. 类似地,可称 $a_k^\dagger|0\rangle$ 为相应的单粒子态,称 $a_k^\dagger a_{k'}^\dagger|0\rangle$为二粒子态,等等. 由于 $a_k^\dagger$和 $a_{k'}^\dagger$ 对易,则有

$$a_k^\dagger a_{k'}^\dagger|0\rangle=a_{k'}^\dagger a_k^\dagger|0\rangle. \tag{2.40}$$

因此,这些粒子自动地满足玻色统计.

说明.

1. 前面强调过,迄今为止(2.17)式中的参量 m 是可以任意选取的. 不同的 m 值给出表达式(2.20)—(2.21)中的 a_k和$a_k^\dagger$也不同,从而给出同一希尔伯特空间的不同基矢(2.38). 因此 m 的改变意味着在 a_k、$a_k^\dagger$间的一个正则变换.

2. 若(2.33)中 H_{int}为 0,亦即场是自由的,则相应的哈密顿量变成

$$H=H_0=\frac{1}{2}\int[\Pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]d^3r. \tag{2.41}$$

现在设(2.17)式中的参量 m 和上面的一样. 根据(2.36),有

$$H = H_0 = \sum_k \omega\left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right). \tag{2.42}$$

利用海森伯方程(1.9),并设 $O(t) = a_k$ 和 $a_k^\dagger$, 可得

$$a_k(t) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \text{ 和 } a_k^\dagger(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.43}$$

这对自由场系统是成立的. 因为哈密顿量从 $H \to H +$ 常数, 这并不改变系统的动力学,我们可用

$$H = H_0 = \sum_k \omega a_k^\dagger a_k \tag{2.44}$$

来代替(2.42). 因此由(2.39)式定义的真空态能量变为零.

3. 如果 $H_{\mathrm{int}} \neq 0$, 则 $a_k(t)$ 和 $a_k^\dagger(t)$ 随时间的变化一般地将远较(2.43)式复杂. 假设系统中不存在束缚态,由于洛伦兹不变性,总哈密顿量 $H = H_0 + H_{\mathrm{int}}$ 的谱(除一相加项可选为零外)必可由

$$\sum n_k \omega_{\mathrm{phys}} \tag{2.45}$$

给出,其中 $\omega_{\mathrm{phys}} = (\boldsymbol{k}^2 + m_{\mathrm{phys}}^2)^{\frac{1}{2}}$ 而 $n_k = 0, 1, 2, \cdots$. 按定义,m_{phys}是系统中观测到的物理粒子的质量. 为方便计,选 H_0 中的参量 m 为 m_{phys}. 这时由(2.44)给出的 H_0 的谱,和由(2.45)式给出的 H 的谱是等同的. 一如将在第 5 章中要讨论的,在 H_0 中选取

$$m = m_{\mathrm{phys}} \tag{2.46}$$

时使得微扰级数按 H_{int}的幂展开中将带来极大方便.

4. 上述讨论可很容易地推广到 n 个厄米场 $\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n$ 的系统中去. 相应的拉氏密度可写成

$$\mathscr{L} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2} m_i^2 \phi_i^2\right] - V(\phi_i), \tag{2.47}$$

式中 $\phi_i = \phi_i^\dagger$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 在 $n = 2$ 且 $m_1 = m_2 = m$ 的情形中,可将上面的拉氏密度用复数场

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{2.48}$$

及其厄米共轭

$$\phi^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{2.49}$$

来表示. 由此,(2.47)式变成

$$\mathscr{L} = -\frac{\partial \phi^{\dagger}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} - m^2 \phi^{\dagger}\phi - V(\phi^{\dagger}, \phi). \tag{2.50}$$

习题 2.1. 证明对于自由厄米场 ϕ,有

$$[\phi(\boldsymbol{r}, t), \phi(\boldsymbol{r}', t')] = -iD(x - x'),$$

式中 $x = (\boldsymbol{r}, it)$, $x' = (\boldsymbol{r}', it')$,

$$D(x - x') = (2\pi)^{-3}\int d^3k e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \omega^{-1} \sin \omega(t - t')$$

和 $\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$.

此外,证明 $D(x)$满足

(i) $\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2\right)D(x) = 0$,

(ii) $D(x) = 0$ (当 $t = 0$),

(iii) $\dot{D}(x) = \delta^3(\boldsymbol{r})$ (当 $t = 0$).

参 考 文 献

Wentzel G. *Quantum Theory of Fields*. New York: Interscience Publishers, Inc, 1949.

第 3 章　自旋为 $\frac{1}{2}$ 的场

3.1　数学准备

首先引入三个 2×2 的泡利矩阵

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

它们满足

$$\tau_i=\tau_i^{\dagger},$$

$$[\tau_i,\ \tau_j]=\tau_i\tau_j-\tau_j\tau_i=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k, \tag{3.2}$$

$$\{\tau_i,\ \tau_j\}\equiv\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i=2\delta_{ij}, \tag{3.3}$$

式中 δ_{ij} 是前面用到过的克罗内克符号,而

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & 若\ ijk\ 是\ 1,2,3\ 的一个偶排列,\\ -1, & 若\ ijk\ 是\ 1,2,3\ 的一个奇排列,\\ 0, & 其他情形.\end{cases} \tag{3.4}$$

经常我们用矢量记号

$$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3).$$

贯穿全书,我们将二矩阵 a 和 b 间的对易子和反对易子分别记为 $[a,\ b]=ab-ba$ 和 $\{a,\ b\}=ab+ba$.

其次引入 $n\times n$ 矩阵 $A=(A_{aa'})$ 与 $m\times m$ 矩阵 $B=(B_{bb'})$ 的直积 $A\times B$:

$$(A\times B)_{ab,\ a'b'}\equiv A_{aa'}B_{bb'}, \tag{3.5}$$

其中下标 a, a'可从 1 变到 n,下标 b, b'可从 1 变到 m. 因此 $A\times B$ 是 $nm\times nm$ 维矩阵. 可以很快加以验证:若 A 和 C 均为 $n\times n$ 维矩阵,又若 B 和 D 均为 $m\times m$ 维矩阵,则

$$(A\times B)\cdot(C\times D)=(A\cdot C)\times(B\cdot D),$$

式中的"·"表示普通的矩阵乘法.

狄拉克矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 是 4×4 矩阵,它们可表示成 2×2 的泡利矩阵(3.1)和 2×2 的单位矩阵 I 的直积:

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv\boldsymbol{\tau}\times I,\ \boldsymbol{\rho}\equiv I\times\boldsymbol{\tau}. \tag{3.6}$$

故有

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\tau}\end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

而 $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ 由下式给出

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}I\\ \mathrm{i}I & 0\end{pmatrix},\ \rho_3=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 满足下列关系:

$$\begin{aligned}&\rho_i=\rho_i^\dagger,\ \sigma_i=\sigma_i^\dagger,\\ &[\rho_i,\rho_j]=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\rho_k,\ [\sigma_i,\sigma_j]=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\\ &\{\rho_i,\rho_j\}=\{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij},\\ &[\rho_i,\sigma_j]=0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

此外,定义

$$\boldsymbol{\alpha}\equiv\rho_1\boldsymbol{\sigma},\qquad \beta\equiv\rho_3, \tag{3.10}$$

$$\gamma_i=-\mathrm{i}\beta\alpha_i=\rho_2\sigma_i,\quad \gamma_4=\beta=\rho_3. \tag{3.11}$$

这些矩阵满足

$$\begin{aligned}&\alpha_i=\alpha_i^\dagger,\ \beta=\beta^\dagger,\ \gamma_\mu=\gamma_\mu^\dagger,\\ &[\alpha_i,\alpha_j]=[\gamma_i,\gamma_j]=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\\ &\{\alpha_i,\alpha_j\}=2\delta_{ij},\ \{\alpha_i,\beta\}=0,\\ &\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

上面各式中，所有拉丁字母下标 i, j, k 从 1 变到 3，所有希腊字母下标 μ, ν, λ 从 1 变到 4，以下均同.

3.2　自由场

自旋为$\frac{1}{2}$的自由场拉氏密度为

$$\mathscr{L}_{\text{free}} = -\psi^{\dagger}\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi, \tag{3.13}$$

其中 ψ 是 4×1 的列矩阵.（在量子理论中，它的每个矩阵元均为希尔伯特空间的算符）

若 ψ 为经典场，则从变分原理

$$\delta\int \mathscr{L} \mathrm{d}^4 x = 0,$$

有

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = 0. \tag{3.14}$$

由于(3.11)，这又可写成

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi = \mathrm{i}\,\dot{\psi}. \tag{3.15}$$

我们看出，方程(3.13)可写成

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\psi^{\dagger}\dot{\psi} + \cdots, \tag{3.16}$$

式中…表示不含 $\dot{\psi}$ 的项. 令 ψ_λ 是 4×1 矩阵 ψ 的第λ 个分量，这里 $\lambda=1$, 2, 3, 4. 将 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r}, t)$看成广义坐标，并考虑到(3.16)式，我们看出其共轭动量为

$$\mathscr{P}_\lambda(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_\lambda} = \mathrm{i}\psi_\lambda^{\dagger}(\boldsymbol{r}, t). \tag{3.17}$$

相应的哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}_{\text{free}} = \mathscr{P}_\lambda \dot{\psi}_\lambda - \mathscr{L}_{\text{free}} = \psi^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m\right)\psi,$$

由于(3.10)—(3.11)式,这又可写成

$$\mathscr{H}_{\text{free}} = \psi^\dagger \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{\mathrm{i}} + \beta m\right)\psi. \tag{3.18}$$

3.3 量子化(自由场或相互作用场)

首先,我们把上面的讨论推广到具有相互作用的系统中去. 现在,拉氏密度由下式给出:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{free}} + \mathscr{L}_{\text{int}}, \tag{3.19}$$

式中 $\mathscr{L}_{\text{free}}$ 仍由(3.13)给定. 若系统只由 ψ 场构成,则 $\mathscr{L}_{\text{int}} = \mathscr{L}_{\text{int}}(\psi, \psi^\dagger)$; 若还有别的场,比如 ϕ,则 $\mathscr{L}_{\text{int}} = \mathscr{L}_{\text{int}}(\psi, \psi^\dagger, \phi, \dot{\phi})$. 我们假定 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 不含$\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$. 因此 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$的共轭动量仍由(3.17)给定. 相互作用哈密顿量密度今可写成

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{free}} + \mathscr{H}_{\text{int}}, \tag{3.20}$$

其中 $\mathscr{H}_{\text{free}}$ 由(3.18)给出,若系统仅由 ψ 场构成,则 $\mathscr{H}_{\text{int}} = -\mathscr{L}_{\text{int}}(\psi, \psi^\dagger)$. 若还存在别的场,比如 ϕ,则 $\mathscr{H}_{\text{int}} = \mathscr{H}_{\text{int}}(\psi, \psi^\dagger, \phi, \Pi)$, 这里 Π 是 ϕ 的共轭动量.

现在我们转而讨论量子化问题. 自旋为$\dfrac{1}{2}$的场的量子化和自旋为整数的场的量子化不同,按照约当和维格纳的做法,要把所有等时对易关系用反对易关系

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}, t), \mathscr{P}_\lambda(\boldsymbol{r}', t)\} = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{\mu\lambda},$$
$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}, t), \psi_\lambda(\boldsymbol{r}', t)\} = \{\mathscr{P}_\mu(\boldsymbol{r}, t), \mathscr{P}_\lambda(\boldsymbol{r}', t)\} = 0$$

代替. 由于(3.17)式,这些关系又可写成

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}, t), \psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{\mu\lambda}, \tag{3.21}$$

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}, t), \psi_\lambda(\boldsymbol{r}', t)\} = \{\psi_\mu^\dagger(\boldsymbol{r}, t), \psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = 0. \tag{3.22}$$

运动方程仍由海森伯方程(1.9)给出：

$$\left[\int \mathscr{H} \mathrm{d}^3 r,\ O(t)\right] = -\mathrm{i}\dot{O}(t).$$

对于自由场的情形，令 $H = \int \mathscr{H}_{\text{free}} \mathrm{d}^3 r$ 和 $O(t) = \psi(\boldsymbol{r},\ t)$，则有

$$\left[\int \mathscr{H}_{\text{free}} \mathrm{d}^3 r,\ \psi\right] = -\mathrm{i}\dot{\psi}. \tag{3.23}$$

考虑到(3.21)—(3.22)式，可得

$$\begin{aligned}
&\left[\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma\psi(\boldsymbol{r}',\ t)\mathrm{d}^3 r',\ \psi_\lambda(\boldsymbol{r},\ t)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3 r'(\psi^\dagger_\mu(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma_{\mu\nu}\psi_\nu(\boldsymbol{r}',\ t)\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\ t) \\
&\quad - \psi_\lambda(\boldsymbol{r},\ t)\psi^\dagger_\mu(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma_{\mu\nu}\psi_\nu(\boldsymbol{r}',\ t)) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r'(-\psi^\dagger_\mu(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma_{\mu\nu}\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\ t)\psi_\nu(\boldsymbol{r}',\ t) \\
&\quad - \psi_\lambda(\boldsymbol{r},\ t)\psi^\dagger_\mu(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma_{\mu\nu}\psi_\nu(\boldsymbol{r}',\ t)) \\
&= -\int \mathrm{d}^3 r'\delta_{\mu\lambda}\Gamma_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi_\nu(\boldsymbol{r}',\ t) \\
&= (-\Gamma\psi(\boldsymbol{r},\ t))_\lambda,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中 Γ 是 4×4 的矩阵，其矩阵元是 c 数. 由此，对于自由场来说，(3.23)式给出算符 ψ 的运动方程和(3.15)式一样：

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi = \mathrm{i}\dot{\psi}.$$

同样地可证明，对于相互作用场的情形，海森伯方程也能导致同一运动方程，和由变分原理 $\delta\int \mathscr{L}\mathrm{d}^4 x = 0$ 给出的相同.

练习.　证明

$$\begin{aligned}
&\left[\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}',\ t)\Gamma\psi(\boldsymbol{r}',\ t)\mathrm{d}^3 r',\ \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t)\Gamma'\psi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r\right] \\
&\qquad = \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t)[\Gamma,\ \Gamma']\psi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r,
\end{aligned} \tag{3.24a}$$

其中 Γ 和 Γ' 均为 4×4 的矩阵，矩阵元为 c 数.

3.4 傅里叶展开(自由场或相互作用场)

一如(2.11)—(2.12)式那样，在任意给定时刻 t，算符 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$ 可用傅里叶级数展开：

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t)=\sum_{\boldsymbol{p}} S_{\boldsymbol{p}}(t)\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{\Omega}}. \tag{3.25}$$

式中 $S_{\boldsymbol{p}}(t)$ 像 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$ 一样是 4×1 矩阵，其矩阵元是希尔伯特空间的算符. 惟一的差别是，与 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$ 不同，$S_{\boldsymbol{p}}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}$ 无关.

让我们把 4×1 的列矩阵看成是四维空间的矢量，这空间称为旋量空间. 对一给定的 $\boldsymbol{p}$，在这空间中引进一组 c 数的基矢 $u_{\boldsymbol{p},\,s}$ 和 $v_{-\boldsymbol{p},\,s}$ 是十分有用的. 这些矢量满足：

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\,s}\\ v_{-\boldsymbol{p},\,s}\end{cases}=E_p\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\,s}\\ -v_{-\boldsymbol{p},\,s},\end{cases} \tag{3.26}$$

和

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\,s}\\ v_{-\boldsymbol{p},\,s}\end{cases}=2s\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\,s}\\ v_{-\boldsymbol{p},\,s},\end{cases} \tag{3.27}$$

其中

$$E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}>0, \tag{3.28}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}.$$

而参数

$$s=\pm\frac{1}{2} \tag{3.29}$$

称为螺旋性，其物理意义将在 3.7 节中讨论. 将这些矢量归一化，使得

$$u_{\boldsymbol{p},\,s}^{\dagger}u_{\boldsymbol{p},\,s}=v_{-\boldsymbol{p},\,s}^{\dagger}v_{-\boldsymbol{p},\,s}=1. \tag{3.30}$$

对给定的 $\boldsymbol{p}$, 4×4 矩阵$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)$和$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ 都是厄米的. 根据(3.26)和(3.27)式,具有 $s=\pm\frac{1}{2}$ 的 4 矢量 $u_{\boldsymbol{p},s}$和$v_{-\boldsymbol{p},s}$是这两个厄米矩阵的具有不同本征值的本征矢量. 因此,这些 4 矢量是彼此正交的,由于(3.30)式,它们形成旋量空间中一组正交的基矢全集. 方程(3.25)中的 $S_{\boldsymbol{p}}(t)$可按这组基矢展开:

$$S_{\boldsymbol{p}}(t)=\sum_{s=\pm\frac{1}{2}}(a_{\boldsymbol{p},s}(t)u_{\boldsymbol{p},s}+b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},s}(t)v_{-\boldsymbol{p},s}), \tag{3.31}$$

式中系数 $a_{\boldsymbol{p},s}(t)$和 $b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},s}(t)$是希尔伯特空间中的算符. 联合(3.25)和(3.31)式,有

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{p},s}(a_{\boldsymbol{p},s}(t)u_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}(t)v_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}), \tag{3.32}$$

其厄米共轭为

$$\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{p},s}(a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}(t)u^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+b_{\boldsymbol{p},s}(t)v^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}). \tag{3.33}$$

从反对易关系(3.21)－(3.22)式可以立刻验证下列诸式:

$$\begin{aligned}
\{a_{\boldsymbol{p},s}(t),\,a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}&=\{b_{\boldsymbol{p},s}(t),\,b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{s,s'},\\
\{a_{\boldsymbol{p},s}(t),\,a_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}&=\{b_{\boldsymbol{p},s}(t),\,b_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}=0,\\
\{a_{\boldsymbol{p},s}(t),\,b_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}&=\{a_{\boldsymbol{p},s}(t),\,b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}',s'}(t)\}=0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

我们在前面看到,任何一个 $\boldsymbol{r}$ 的函数可用全集 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right\}$ 展开,还看到旋量空间中任何一个 4×1 的列矩阵可用四个正交的基矢 $u_{\boldsymbol{p},\pm\frac{1}{2}}$ 和 $v_{-\boldsymbol{p},\pm\frac{1}{2}}$ 展开,这里 $\boldsymbol{p}$ 是固定的. 因此展开式(3.32)对自由场是成立的,对相互作用场也是成立的.

对自由场的情形,哈密顿量密度由

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_{\mathrm{free}}=\psi^{\dagger}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi. \tag{3.35}$$

给定. 将(3.32)式代入此式,可得

$$H = H_{\text{free}} = \int \mathscr{H}_{\text{free}} \mathrm{d}^3 r = \sum_{p,s} (a_{p,s}^{\dagger} a_{p,s} - b_{p,s} b_{p,s}^{\dagger}) E_p$$

$$= \sum_{p,s} (a_{p,s}^{\dagger} a_{p,s} + b_{p,s}^{\dagger} b_{p,s} - 1) E_p. \tag{3.36}$$

由于作 $H \rightarrow H +$ 常数 a 的替换时并不改变系统的动力学,故可将上式括弧中的-1去掉. 由此哈密顿量(3.36)可由下式代替:

$$H = H_{\text{free}} = \sum_{p,s} (a_{p,s}^{\dagger} a_{p,s} + b_{p,s}^{\dagger} b_{p,s}) E_p. \tag{3.37}$$

利用海森伯方程(1.9),又设 $O(t) = a_{p,s}(t)$, 对自由场有

$$-\mathrm{i}\dot{a}_{p,s}(t) = [H, a_{p,s}(t)] = -E_p a_{p,s}(t),$$

由此

$$a_{p,t}(t) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_p t}. \tag{3.38}$$

同样地可以推导得

$$b_{p,s}(t) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_p t}. \tag{3.39}$$

在相互作用场的情形下,$a_{p,s}(t)$和 $b_{p,s}(t)$对时间的依赖关系,一般说来比较复杂.

练习. 证明

$$\sum_s u_{p,s} u_{p,s}^{\dagger} \beta = \frac{\not{p} + m}{2p_0},$$

$$\sum_s v_{p,s} v_{p,s}^{\dagger} \beta = \frac{\not{p} - m}{2p_0},$$

$$\frac{1}{4} \text{trace}(\not{A}\not{B}) = -(A \cdot B) \equiv A_0 B_0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B},$$

$$\frac{1}{4} \text{trace}(\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) = (A \cdot B)(C \cdot D) - (A \cdot C)(B \cdot D)$$

$$+ (A \cdot D)(B \cdot C),$$

其中 A, B, C 和 D 可为任何 c 数 4 矢量, $\not{A} = -\mathrm{i}\gamma_\mu A_\mu$, $A_4 = \mathrm{i}A_0$, $\not{B} = -\mathrm{i}\gamma_\mu B_\mu$, $B_4 = \mathrm{i}B_0$ 等等.

3.5　希尔伯特空间(自由场或相互作用场)

和(2.38)式那样,希尔伯特空间也由一组正交的矢量

$$
\begin{aligned}
&|0\rangle,\ a^\dagger_{p,s}|0\rangle,\ b^\dagger_{p,s}|0\rangle,\ a^\dagger_{p,s}a^\dagger_{p',s'}|0\rangle,\\
&a^\dagger_{p,s}b^\dagger_{p',s'}|0\rangle,\ b^\dagger_{p,s}b^\dagger_{p',s'}|0\rangle,\ \cdots
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

张成. 其中态矢$|0\rangle$对所有 $\boldsymbol{p}$ 和 s 满足:

$$a_{p,s}|0\rangle = 0 \quad 和 \quad b_{p,s}|0\rangle = 0. \tag{3.41}$$

为分析这个希尔伯特空间的结构,首先必须讨论一下这些反对易算符 $a_{p,s}$、$b_{p,s}$及其厄米共轭算符的基本的代数性质.

(i) 先讨论单一模式的情形. 设 a 和 $a^\dagger$ 满足反对易关系:

$$\{a,\ a^\dagger\} = 1 \tag{3.42}$$

和

$$\{a,\ a\} = \{a^\dagger,\ a^\dagger\} = 0.$$

后一式又可写成

$$a^2 = (a^\dagger)^2 = 0. \tag{3.43}$$

定义

$$N \equiv a^\dagger a. \tag{3.44}$$

由于(3.42)—(3.43)式,可得

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger(1 - a^\dagger a)a = N.$$

这意味着 N 的本征值只能是 0 或 1. 假定 N 确有一个本征值为 0 的本征态,记为$|0\rangle$:

$$N|0\rangle = 0. \tag{3.45}$$

由此可得

$$Na^\dagger|0\rangle = a^\dagger a a^\dagger|0\rangle = a^\dagger(1 - a^\dagger a)|0\rangle = a^\dagger|0\rangle. \tag{3.46}$$

定义

$$|1\rangle \equiv a^{\dagger}|0\rangle, \tag{3.47}$$

可将(3.46)写成

$$N|1\rangle = |1\rangle. \tag{3.48}$$

因此,本征态$|0\rangle$的存在意味着态$|1\rangle$的存在.反之亦成立,因为从(3.47)式可得

$$|0\rangle = a|1\rangle. \tag{3.49}$$

由此,两种本征态都存在.此外,由于(3.47),有

$$a^{\dagger}|1\rangle = 0 \quad 和 \quad a|0\rangle = 0. \tag{3.50}$$

这两个本征矢,$|0\rangle$和$|1\rangle$张成一个二维的希尔伯特空间.可表示成

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad 和 \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

算符 a, $a^{\dagger}$ 和 N 可表示成矩阵形式:

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \equiv \tau_{+} = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2), \\ a^{\dagger} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \equiv \tau_{-} = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2), \\ N &= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \tau_3), \end{aligned} \tag{3.52}$$

其中 τ_1、τ_2 和 τ_3 是在(3.1)中给出的泡利矩阵.和玻色场的情形一样,我们称 N 为占有数算符,a 为湮没算符,$a^{\dagger}$ 为产生算符.

(ii) 其次考虑两种模式的情形.现在有两种湮没算符 a_1 和 a_2,它们的厄米共轭形成两种产生算符.这些算符满足

$$\begin{aligned} \{a_i, a_j^{\dagger}\} &= \delta_{ij}, \\ \{a_i, a_j\} &= \{a_i^{\dagger}, a_j^{\dagger}\} = 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

其中 i 和 j 可以是 1 或 2.可以定义

$$N_1 = a_1^\dagger a_1 \quad 和 \quad N_2 = a_2^\dagger a_2. \tag{3.54}$$

由于(3.53)式,N_1 和 N_2 相互对易.应用类似于情形(i)中的论据可以证明,每一个 N_i 的本征值可为 0 或 1.因此,集合(N_1, N_2)的本征值可为(0, 0), (1, 0), (0, 1)和(1, 1).将相应的本征矢看成基矢,可作成一个四维的希尔伯特空间.在这空间中,N_1 和 N_2 的矩阵表示为

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

相应于 a_i 和 $a_i^\dagger$ 的矩阵,可从直积

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_+ \times I, \; a_1^\dagger = \tau_- \times I, \\ a_2 &= \tau_3 \times \tau_+, \; a_2^\dagger = \tau_3 \times \tau_- \end{aligned} \tag{3.56}$$

给出.其中 I 是 2×2 的单位矩阵.(3.56)式又可写成显示形式:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} \tau_+ & 0 \\ 0 & \tau_+ \end{pmatrix}, \; a_1^\dagger = \begin{pmatrix} \tau_- & 0 \\ 0 & \tau_- \end{pmatrix}, \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; a_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

利用(3.56)式可以直接验证(3.53)式给定的反对易关系是成立的.此外,矩阵 N_1 和 N_2 由(3.55)给出.

(iii) 立即可将上面的讨论推广到具有 n 种模式的情形.反对易关系具有和(3.53)式相同的形式,即

$$\begin{aligned} \{a_i, a_j^\dagger\} &= \delta_{ij}, \\ \{a_i, a_j\} &= \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \end{aligned} \tag{3.58}$$

只是 i 和 j 现在可从 1 变到 n.可以用归纳法将(3.56)式推广成

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_+ \times I \times I \times \cdots \times I, \; a_1^\dagger = \tau_- \times I \times I \times \cdots \times I, \\ a_2 &= \tau_3 \times \tau_+ \times I \times \cdots \times I, \; a_2^\dagger = \tau_3 \times \tau_- \times I \times \cdots \times I, \\ &\cdots \\ a_n &= \tau_3 \times \tau_3 \times \cdots \times \tau_+, \; a_n^\dagger = \tau_3 \times \tau_3 \times \cdots \times \tau_-, \end{aligned} \tag{3.59}$$

其中 a_1 的表式中包含 $n-1$ 个因子 I, a_2 中包含 $n-2$ 个 I,等等. 容易看出,(3.59)中的这些矩阵是满足反对易关系(3.58)的. 此外,算符

$$N_i \equiv a_i^\dagger a_i$$

具有本征值为 0 或 1,这里下标可取 1, 2, …, n.

说明. 在一般情形下,希尔伯特空间由基矢(3.40)所张成,其中$|0\rangle$称为 H_{free}的真空态,由(3.41)式所确定. 同样地,$a_{\boldsymbol{p},s}^\dagger|0\rangle$称为单粒子态,$b_{\boldsymbol{p},s}^\dagger|0\rangle$称为单反粒子态,等等. 一如我们在下节中将要讨论的,下标 $\boldsymbol{p}$ 和 s 分别表示粒子(或反粒子)的动量和螺旋性. 这里的"螺旋性"就是角动量沿 $\boldsymbol{p}$ 方向的分量.

由于反对易关系(3.34),我们有

$$a_{\boldsymbol{p},s}^\dagger a_{\boldsymbol{p}',s'}^\dagger \mid 0\rangle = -a_{\boldsymbol{p}',s'}^\dagger a_{\boldsymbol{p},s}^\dagger \mid 0\rangle, \qquad (3.60)$$

这意味着这些粒子遵从费米统计. 因此,当 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$, $s=s'$ 时,(3.60)式的矢量为一零矢量,证实这些粒子的确满足泡利不相容原理.

练习. 在 n 个模式的玻色子情形下,湮没算符和产生算符之间的对易关系由

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij},$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

给出,其中 i 和 j 从 1 变到 n. 试证这些算符的矩阵形式可写成如下的直积:

$$a_1 = a\times I\times I\times I\times\cdots\times I,$$

$$a_1^\dagger = a^\dagger\times I\times I\times\cdots\times I,$$

$$a_2 = I\times a\times I\times\cdots\times I,$$

$$a_2^\dagger = I\times a^\dagger\times I\times\cdots\times I,$$

$$\cdots$$

$$a_n = I\times I\times\cdots\times I\times a,$$

$$a_n^\dagger = I\times I\times\cdots\times I\times a^\dagger,$$

式中 a 和 $a^\dagger$ 由(1.31)给定,而 I 是 $\infty\times\infty$ 的单位矩阵.

3.6　动量和角动量算符

自旋为$\frac{1}{2}$的场的动量算符 $\boldsymbol{p}$ 和角动量算符 $\boldsymbol{J}$ 定义为

$$\boldsymbol{p}(t) \equiv -\mathrm{i}\int \psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t)\ \nabla\ \psi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{J}(t) \equiv \int \psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t)\left(\boldsymbol{l} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\psi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r, \tag{3.62}$$

其中

$$\boldsymbol{l} = -\mathrm{i}\boldsymbol{r} \times \nabla. \tag{3.63}$$

利用(3.24)可得

$$[\boldsymbol{p}(t),\ \psi(\boldsymbol{r},\ t)] = \mathrm{i}\nabla\ \psi(\boldsymbol{r},\ t) \tag{3.64}$$

和

$$[\boldsymbol{J}(t),\ \psi(\boldsymbol{r},\ t)] = -\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{r} \times \nabla + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\psi(\boldsymbol{r},\ t). \tag{3.65}$$

由此可见,$\boldsymbol{p}(t)$作用在 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$上就像一个无穷小位移算符一样,而 $\boldsymbol{J}(t)$作用在 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$上就像一个无穷小转动算符一样[见第 10 章末的习题 3.]

利用 3.3 节中给出的练习,可以立刻验证 $\boldsymbol{p}(t)$和 $\boldsymbol{J}(t)$的分量满足关系:

$$[p_i(t),\ p_j(t)] = 0, \tag{3.66}$$

$$[J_i(t),\ J_j(t)] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k(t), \tag{3.67}$$

$$[p_1(t),\ J_1(t)] = [p_2(t),\ J_2(t)] = [p_3(t),\ J_3(t)] = 0. \tag{3.68}$$

但

$$[p_i(t),\ J_j(t)] \neq 0 \quad 若\ i \neq j, \tag{3.69}$$

式中 i 和 j 可取 1, 2 或 3,而 ϵ_{ijk} 由(3.4)式给出. 上面的关系式仅反映了微分算符∇_i 和∇_j 可以对易,

$$[l_i,\ l_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} l_{k'}\left[\frac{1}{2}\sigma_i,\ \frac{1}{2}\sigma_j\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\ \frac{1}{2}\sigma_k,$$

以及虽则∇_i 和 $(\boldsymbol{r}\times\nabla)_i$ 可以对易,但当 $j\neq i$ 时它和$(\boldsymbol{r}\times\nabla)$ 并不对易.

若系统为一自旋为$\frac{1}{2}$的自由场,则哈密顿量为

$$H_{\text{free}}=\int\mathscr{H}_{\text{free}}\mathrm{d}^3r,\tag{3.70}$$

其中 $\mathscr{H}_{\text{free}}$ 由(3.18)给出.直接推演可得

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{p}(t),\ H_{\text{free}}]=0,\\&[\boldsymbol{J}(t),\ H_{\text{free}}]=0.\end{aligned}\tag{3.71}$$

故 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 均为运动常数.在相互作用场的情形,总动量由自旋为$\frac{1}{2}$的场的动量 $\boldsymbol{p}(t)$加上其他场的动量所组成.故总动量守恒并不意味着 $\boldsymbol{p}(t)$是个运动常数.类似的考虑亦可应用到总角动量上去.

我们可将 $\boldsymbol{p}$ 用ψ 的傅里叶分量表示出来.将(3.32)—(3.33)式代入(3.61)式,利用(2.22)以及旋量 $u_{\boldsymbol{p},s}$和 $v_{\boldsymbol{p},s}$间的正交关系,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\sum_{\boldsymbol{p},s}\boldsymbol{p}(a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s}-b_{\boldsymbol{p},s}b^\dagger_{\boldsymbol{p},s})\\&=\sum_{\boldsymbol{p},s}\boldsymbol{p}(a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s}+b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s}-1).\end{aligned}$$

由于对称性,$\sum\limits_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}=0$,上式可写成

$$\boldsymbol{p}=\sum_{\boldsymbol{p},s}\boldsymbol{p}(a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s}+b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s}).\tag{3.72}$$

为确定起见,可将ψ看成电子场,在希尔伯特空间(3.40)中记为

$$\begin{aligned}|\,e^-_{\boldsymbol{p},s}\rangle&\equiv a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}(t)\,|\,0\rangle,\\|\,e^+_{\boldsymbol{p},s}\rangle&\equiv b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}(t)\,|\,0\rangle.\end{aligned}\tag{3.73}$$

由(3.72)式,可见这些态是 $\boldsymbol{p}$ 的本征态:

$$\boldsymbol{p}\,|\,0\rangle=0,\tag{3.74}$$

$$\boldsymbol{p}\,|\,e^\pm_{\boldsymbol{p},s}\rangle=\boldsymbol{p}\,|\,e^\pm_{\boldsymbol{p},s}\rangle.\tag{3.75}$$

注意到从(3.40)以下的所有表式和哈密顿量 H 无关,倘使所有算符均在

同一时刻 t,则也能推导得(3.74)式. 由此我们只需考虑特殊情形 $H = H_{\text{free}}$ 即可. 由于(3.71)式以及$|0\rangle$是 H_{free} 的非简并的基态,因此就有(3.74)式. 同样地,有

$$\boldsymbol{J} \mid 0\rangle = 0. \tag{3.76}$$

其次,我们将证明

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{p} \mid e^{\pm}_{\boldsymbol{p},s}\rangle = \mid \boldsymbol{p} \mid s \mid e^{\pm}_{\boldsymbol{p},s}\rangle. \tag{3.77}$$

此式和(3.75)两式说明 $\boldsymbol{p}$ 是态(3.73)的动量,螺旋性 $s = \pm \frac{1}{2}$ 是态(3.73)的角动量沿 $\boldsymbol{p}$ 方向的分量. 为看清这点,取(3.64)和(3.65)式的厄米共轭,并作用于$|0\rangle$上,考虑到(3.74)和(3.76),给出

$$p_k(t)\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t) \mid 0\rangle = -\mathrm{i}\, \nabla_k \psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t) \mid 0\rangle,$$

$$J_k(t)\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t) \mid 0\rangle = -\left(\mathrm{i}\boldsymbol{r} \times \nabla \psi^{\dagger} + \frac{1}{2}\psi^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\right)_k \mid 0\rangle.$$

因此

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{p}\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t) \mid 0\rangle = \mathrm{i}\, \frac{1}{2} \nabla_k \psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t)\sigma_k \mid 0\rangle. \tag{3.78}$$

由于

$$a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}(t) = \int \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},\ t) u_{\boldsymbol{p},s} \mathrm{d}^3 r, \tag{3.79}$$

可得

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{p} a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s} \mid 0\rangle = \mid \boldsymbol{p} \mid s a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s} \mid 0\rangle. \tag{3.80}$$

对于 $b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}|0\rangle$也可采用相同的做法. 从而得到(3.77).

从(3.68)和(3.69)可看出 $\boldsymbol{J}$ 沿 $\boldsymbol{p}$ 的分量和 $\boldsymbol{p}$ 是可对易的. 故这二算符可同时对角化,它们关于态(3.73)的本征值分别是螺旋性 s 和动量 $\boldsymbol{p}$. 在空间转动下,由于螺旋性是两个矢量的标积,因此它是不变的. 我们在3.8节中将会看到,若粒子的质量为零,则它的螺旋性在洛伦兹变换下亦不变.

3.7 旋量间相因子的约定

在展开式(3.31)中,旋量空间中的四个正交基矢 $u_{\boldsymbol{p},s}$和 $v_{-\boldsymbol{p},s}$是由(3.26)—(3.30)式确定的,其中 $\boldsymbol{p}$ 是已给定的固定矢量. 由于(3.26)和(3.27)是齐次方程,这些 c 数的旋量 $u_{\boldsymbol{p},s}$和 $v_{-\boldsymbol{p},s}$的相因子仍是任意的. 在本节中,我们将说明有可能选取它们的相因子使得

$$\text{(i)}\ v_{\boldsymbol{p},s} = \gamma_2 u^*_{\boldsymbol{p},s},\ u_{\boldsymbol{p},s} = \gamma_2 v^*_{\boldsymbol{p},s}, \tag{3.81}$$

$$\text{(ii)}\ \gamma_4 u_{\boldsymbol{p},s} = u_{-\boldsymbol{p},-s},\ \gamma_4 v_{\boldsymbol{p},s} = -v_{-\boldsymbol{p},-s}, \tag{3.82}$$

$$\text{(iii)}\ \sigma_2 u^*_{\boldsymbol{p},s} = e^{i\theta_{\boldsymbol{p},s}} u_{-\boldsymbol{p},s},\ \sigma_2 v^*_{\boldsymbol{p},s} = e^{-i\theta_{-\boldsymbol{p},s}} v_{-\boldsymbol{p},s}, \tag{3.83}$$

其中
$$e^{i\theta_{\boldsymbol{p},s}} = -e^{i\theta_{-\boldsymbol{p},s}}. \tag{3.84}$$

本书将自始至终采用这些关于相因子的约定.

证明. 从(3.1)—(3.11)式我们注意到矩阵

$$\rho_1,\ \rho_3,\ \sigma_1,\ \sigma_3,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\ \gamma_2$$

是实的,而矩阵

$$\rho_2,\ \sigma_2,\ \alpha_2,\ \gamma_1,\ \gamma_3$$

是虚的.

(i) 由于 $\gamma_2 = \rho_2\sigma$, 故有

$$\gamma_2\boldsymbol{\sigma}^*\gamma_2 = -\boldsymbol{\sigma},\ \gamma_2\boldsymbol{\alpha}^*\gamma_2 = \boldsymbol{\alpha}. \tag{3.85}$$

对(3.26)式取复数共轭,并注意 $\boldsymbol{p}$, m, β 和 E_p 都是实的,可得

$$(\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)u^*_{\boldsymbol{p},s} = E_p u^*_{\boldsymbol{p},s}.$$

利用(3.85)式和 $\{\gamma_2,\beta\}=0$, 上一方程变为

$$(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)(\gamma_2 u^*_{\boldsymbol{p},s}) = -E_p\gamma_2 u^*_{\boldsymbol{p},s}. \tag{3.86}$$

同样地,(3.27)式的复数共轭为

$$(\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\hat{p})u^*_{\boldsymbol{p},s} = 2s u^*_{\boldsymbol{p},s},$$

由于(3.85),它也可写成

$$(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p})\gamma_2 u_{p,s}^* = 2s\gamma_2 u_{p,s}^*. \tag{3.87}$$

将(3.86)、(3.87)二式和(3.26)、(3.27)进行比较,可见 $\gamma_2 u_{p,s}^*$和 $v_{p,s}$都满足同样的方程,因此它们一定成正比关系. 由于正交条件(3.30),正比常数只能是个相因子,并可选为 1. 由此,我们导得(3.81)中的第一式:

$$v_{p,s} = \gamma_2 u_{p,s}^*. \tag{3.88}$$

因 $\gamma_2 = \rho_2\sigma_2$ 是实矩阵,且 $\gamma_2^2 = 1$, 故上面这个方程的复数共轭给出

$$u_{p,s} = \gamma_2 v_{p,s}^*.$$

(ii) 由于

$$\gamma_4\boldsymbol{\alpha}\gamma_4 = -\boldsymbol{\alpha},\ \gamma_4\boldsymbol{\sigma}\gamma_4 = \boldsymbol{\sigma},$$

故将 γ_4 左乘(3.26)式时变为

$$(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\gamma_4 u_{p,s} = E_p\gamma_4 u_{p,s}. \tag{3.89}$$

同样地,将 γ_4 乘到(3.27)式上去,可得

$$(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p})\gamma_4 u_{p,s} = -2s\gamma_4 u_{p,s}. \tag{3.90}$$

将(3.89)、(3.90)和(3.26)、(3.27)比较,可见 $\gamma_4 u_{p,s}$和 $u_{-p,s}$都满足同样的方程,因此它们仅有相因子的区别. 选取这相因子为 1,我们有

$$\gamma_4 u_{p,s} = u_{-p,-s}.$$

取复数共轭并左乘 γ_2,可得

$$\gamma_2\gamma_4 u_{p,s}^* = \gamma_2 u_{-p,-s}^*,$$

由于(3.88)式,这给出

$$\gamma_4 v_{p,s} = -v_{-p,-s}.$$

(iii) 注意到

$$\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2 = -\boldsymbol{\sigma},\ \sigma_2\boldsymbol{\alpha}^*\sigma_2 = -\boldsymbol{\alpha}.$$

对(3.26)式先取复数共轭,然后左乘 σ_2,可得

$$(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^* = E_p\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^*.$$

对(3.27)式作类似的运算可得

$$(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p})\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^* = 2s\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^*.$$

由此,$\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^*$和$u_{-\boldsymbol{p},s}$都满足同样的方程.这意味着

$$\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^* \propto u_{-\boldsymbol{p},s},$$

故

$$\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}} u_{-\boldsymbol{p},s}, \tag{3.91}$$

式中相角$\theta_{\boldsymbol{p},s}$为实数.由于$\sigma_2$为虚数矩阵,故(3.91)式的复数共轭给出

$$-\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}} u_{-\boldsymbol{p},s}^*, \tag{3.92}$$

此式亦可写成

$$\sigma_2 u_{-\boldsymbol{p},s}^* = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}} u_{\boldsymbol{p},s}. \tag{3.93}$$

将下标$\boldsymbol{p}$换成$-\boldsymbol{p}$,可将这方程转换成

$$\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^* = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{-\boldsymbol{p},s}} u_{-\boldsymbol{p},s}. \tag{3.94}$$

比较(3.91)和(3.94)式即可给出(3.84)式.利用(3.81)、(3.84)和(3.92)式,可得

$$\begin{aligned}\sigma_2 v_{\boldsymbol{p},s}^* &= \sigma_2(\gamma_2 u_{\boldsymbol{p},s}^*)^* = \gamma_2\sigma_2 u_{\boldsymbol{p},s}\\ &= -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}}\gamma_2 u_{-\boldsymbol{p},s}^* = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}} v_{-\boldsymbol{p},s}\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{-\boldsymbol{p},s}} v_{-\boldsymbol{p},s}.\end{aligned} \tag{3.95}$$

由此完成了(3.81)—(3.84)式的证明.

后面我们会看到,在讨论正反粒子共轭中,(3.81)式的约定是很有用的,(3.82)式对于宇称的讨论和(3.83)式对时间反演的讨论都很有用.我们看到,对于给定的螺旋性s,集合$\{u_{\boldsymbol{p},s}\}$中不同$\boldsymbol{p}$的旋量是通过转动和洛伦兹变换相联系的.(3.81)式中,我们固定了集合$\{u_{\boldsymbol{p},s}\}$中各成员与集合$\{v_{\boldsymbol{p},s}\}$中相应各成员之间的相对相因子.同样地(3.82)联系了$\{u_{\boldsymbol{p},s}\}$和$\{u_{-\boldsymbol{p},-s}\}$.另一方面(3.83)式联系着$u_{\boldsymbol{p},s}$和$u_{-\boldsymbol{p},s}$间的相对相因子,它们是同一集合$\{u_{\boldsymbol{p},s}\}$中的成员.由于连续性,一如(3.84)式所显示的,(3.91)式中的相因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}}$(对于所有$\boldsymbol{p}$)不能都是1.

3.8　二分量理论

首先考虑一个自旋为$\frac{1}{2}$、质量 $m=0$ 的量子化自由场. 运动方程(3.14)则变为

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi = 0. \tag{3.96}$$

引入 $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 十分有用. 由于(3.12)式,可得

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \tag{3.97}$$

其中 $\mu = 1, 2, 3, 4$, 还有

$$\gamma_5^2 = 1. \tag{3.98}$$

由此,从(3.96)式还有

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\gamma_5\psi) = 0. \tag{3.99}$$

可以将 ψ 分解成

$$\psi = \psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{R}}, \tag{3.100}$$

其中

$$\psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \quad 和 \quad \psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi. \tag{3.101}$$

从(3.96)和(3.99)可知 ψ_{L} 和 ψ_{R} 分别满足运动方程

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{\mathrm{L}} = 0 \quad 和 \quad \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{\mathrm{R}} = 0. \tag{3.102}$$

在(3.11)的表示下, $\gamma_i = \rho_2\rho_i$ 和 $\gamma_4 = \rho_3$, 矩阵 γ_5 为

$$\gamma_5 = -\rho_1. \tag{3.103}$$

当 $m=0$ 时,(3.26)变得很简单:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},s}\\ v_{-\boldsymbol{p},s}\end{cases}=|\boldsymbol{p}|\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},s}\\ -v_{-\boldsymbol{p},s}\end{cases},$$

在 $\boldsymbol{\alpha}=\rho_1\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\gamma_5=-\rho_1$ 的表示下，又可写成

$$\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},s}\\ v_{-\boldsymbol{p},s}\end{cases}=\begin{cases}-u_{\boldsymbol{p},s}\\ v_{-\boldsymbol{p},s}\end{cases}.$$

将这一表式和(3.27)相比较，可见有

$$\begin{aligned}\gamma_5u_{\boldsymbol{p},s}&=-2su_{\boldsymbol{p},s},\\ \gamma_5v_{-\boldsymbol{p},s}&=2sv_{-\boldsymbol{p},s}.\end{aligned}\tag{3.104}$$

故对任意 $\boldsymbol{p}$, $u_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}$ 和 $v_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 是 γ_5 的本征值为 $+1$ 的本征矢，而 $u_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 和 $v_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}$ 是 γ_5 的本征值为 -1 的本征矢. 根据(3.101)，

$$\gamma_5\psi_{\mathrm{L}}=\psi_{\mathrm{L}}\quad\text{和}\quad\gamma_5\psi_{\mathrm{R}}=-\psi_{\mathrm{R}},$$

则傅里叶展开式(3.32)可分成两部分：

$$\psi_{\mathrm{L}}=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{p}}\left\{a_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}u_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},+\frac{1}{2}}v_{\boldsymbol{p},+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right\},\tag{3.105}$$

$$\psi_{\mathrm{R}}=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{p}}\left\{a_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}u_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}v_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right\}.\tag{3.106}$$

由于 $\psi=\psi_{\mathrm{L}}+\psi_{\mathrm{R}}$ 只是(3.32)式的复述，故对所有情形都成立，不论 $m=0$ 或 $m\neq0$. 然而这种分解在 $m=0$ 的情形下特别有用. 自由哈密顿量(3.35)在相位变换

$$\psi\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi\tag{3.107}$$

下是不变的. 当 $m=0$ 时，(3.35)简单地即

$$\mathscr{H}_{\text{free}}=\psi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi.$$

由于 $[\gamma_5,\boldsymbol{\alpha}]=0$，它在变换

$$\psi\to\gamma_5\psi\tag{3.108}$$

之下也是不变的. 因此，我们可以附加一个条件：或者是 $\gamma_5\psi=\psi$，其结果为

$$\psi = \psi_{\mathrm{L}}; \tag{3.109}$$

或者是 $\gamma_5 \psi = -\psi$, 其结果为

$$\psi = \psi_{\mathrm{R}}. \tag{3.110}$$

显然,仅当 $m=0$ 时,这才是可能的. 在物理上,这可以用下面的方式来理解:当 $m=0$ 时,在洛伦兹变换下,粒子动量 $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}'$, 但是它的螺旋性 s 保持不变. 而当 $m \neq 0$ 时,对于任意给定的 $\boldsymbol{p}$,我们总可以沿 $\boldsymbol{p}$,但以比$\frac{\boldsymbol{p}}{E_p}$大的速度作一洛伦兹变换. 于是粒子动量方向将改变,但自旋方向仍是一样的. 结果,粒子的螺旋性 s 将改为 $-s$. 这种洛伦兹变换在 $m=0$ 时是不可能的. 根据(3.105)和(3.106)式,这就解释了为什么 ψ_{L} 只能湮没螺旋性 $s=-\frac{1}{2}$ 的粒子态$\left(\text{和产生 } s=+\frac{1}{2} \text{ 的反粒子态}\right)$, 而 ψ_{R} 只能湮没 $s=+\frac{1}{2}$ 的粒子态$\left(\text{和产生 } s=-\frac{1}{2} \text{ 的反粒子态}\right)$.

其次,我们来讨论有相互作用的情形. 假定像自由哈密顿量那样,相互作用哈密顿量 H_{int} 在相位变换(3.107)和 γ_5 变换(3.108)下也是不变的. 比如说,H_{int} 可以仅为 j_μ 的函数,这里

$$j_\mu = \mathrm{i}\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi.$$

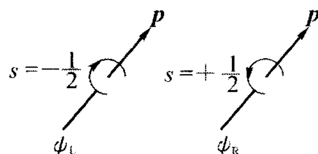


图 3.1　左手场 ψ_{L} 只能湮没螺旋性 $s=-\frac{1}{2}$ 的粒子态,而右手场 ψ_{R} 只能湮没 $s=+\frac{1}{2}$ 的粒子态

在这种情形下,可以加上附加条件(3.109)式, $\psi = \psi_{\mathrm{L}}$, 并要求粒子的物理质量 m_{phys} 为零[见习题 3.2]. 所有粒子态的螺旋性 $s=-\frac{1}{2}$, 所有反粒子态的 $s=+\frac{1}{2}$. 一般来说,不像非零质量的情形那样对于每一个 $\boldsymbol{p}$ 有四种旋量态, $u_{\boldsymbol{p},\pm\frac{1}{2}}$ 和 $v_{\boldsymbol{p},\pm\frac{1}{2}}$;这里只有两种旋量态.

一如我们后面将要讨论的,二分量理论对中微子是十分合适的.

说明.　用一个幺正变换

$$\gamma_\alpha \to U\gamma_\alpha U^\dagger$$

把 γ_1、γ_2、…、γ_5 的矩阵表示进行变换是有可能的，其中 U 是一个 4×4 的幺正矩阵. 在这变换下，方程(3.96)—(3.102)以及附加条件(3.109)或(3.110)都是不变的. 为方便计，我们采用特定的矩阵表示(3.1)—(3.11)和(3.103). 它们导致方程(3.26)、(3.27)和展开式(3.32)、(3.105)和(3.106)；在这些展开式中，下标 $\boldsymbol{p}$ 和 s 表示观测到的粒子或反粒子态的动量和螺旋性.

习题 3.1. 证明对于一质量为 m，自旋为$\dfrac{1}{2}$的自由场，有

$$\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(0)\} = \mathrm{i}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} D(x),$$

式中 $D(x)$在习题 2.1 中给出过，而 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$.

习题 3.2. 令 ψ 是一个普通的四分量狄拉克量子旋量场，ψ_{L} 是由(3.101)式定义的二分量场：

$$\psi_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi.$$

我们可以定义一种二分量理论，其中的拉氏密度**只是** ψ_{L}、$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger$ 以及其他场的函数，而不会是 ψ_{R}、$\psi_{\mathrm{R}}^\dagger$ 的函数. 显然，二分量理论在 γ_5 变换 $\psi\to\gamma_5\psi$ 下总是不变的.

(i) 试证二分量理论若在(3.107)的相位变换 $\psi\to e^{i\theta}\psi$ 下也不变，则意味着粒子的物理质量为零[这种理论可称为韦尔理论]. 一如我们将在第 10 章中要讨论的，相位不变性是和费米子数守恒定律相联系的.

(ii) 假定二分量理论的拉氏密度已知为

$$\mathscr{L} = -\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{\mathrm{L}} - \frac{m}{2}(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\gamma_4\psi_{\mathrm{L}}^c + \mathrm{h.c.}),$$

其中

$$(\psi_{\mathrm{L}}^c)_\alpha = (\gamma_2)_{\alpha\beta}(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger)_\beta,$$

则哈密顿量密度由下式给定：

$$\mathscr{H} = \psi_{\mathrm{L}}^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi_{\mathrm{L}} + \frac{m}{2}(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\beta\psi_{\mathrm{L}}^c + \mathrm{h.c.}),$$

其中 h. c. 表示厄米共轭. 试计算这一理论中的能谱，并证明粒子的物理

质量为 m.

由此,二分量理论在(3.107)的相位变换下的非不变性可以获得非零质量[这种理论称为马约拉纳理论 *].

(iii) 证明如用 $\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$ 代替 ψ_L,可得到相同的结果.

对(ii)的提示:定义马约拉纳场算符

$$\psi_M = \frac{\psi_L + \psi_L^c}{\sqrt{2}},$$

它在正反粒子变换下是不变的,即

$$\psi_M^c = \psi_M.$$

这里 $(\psi_M^c)_\alpha = (\gamma_2)_{\alpha\beta}(\psi_M^\dagger)_\beta$. 可注意到拉氏密度

$$\mathscr{L}_M \equiv -\psi_M^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi_M$$

和 $\mathscr{L}$的不同只在于一个全导数.

参考文献

Dirac P A M. *Quantum Mechanics*. Oxford: The Clarendon Press, 1958.

Pauli W. *Reviews of Modern Physics*, 1941, **13**:203.

Wentzel G. *Quantum Theory of Fields*. New York: Interscience Publishers Inc, 1949.

* 见 Case K. *Phys Rev*, 1957, **107**:307.

第 4 章　自旋为 1 的场 $(m \neq 0)$

4.1　自由场

自旋为 1、质量 $m \neq 0$ 的自由场的拉氏密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2, \tag{4.1}$$

这里，和 x_μ 一样，A_μ 的空间分量是厄米的，时间分量是反厄米的，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger,\ A_4 = -A_4^\dagger;$$

且

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu. \tag{4.2}$$

从变分原理

$$\delta\int \mathscr{L}\mathrm{d}^3 r\mathrm{d}t = 0, \tag{4.3}$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu = 0. \tag{4.4}$$

取其散度

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu\right) = 0,$$

并注意到 $m \neq 0$ 以及 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，可推导出对于自由场有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu = 0. \tag{4.5}$$

后面会讨论到，这个方程当有相互作用时并不一定成立.

为进行量子化，注意到(4.1)式的 $\mathscr{L}$ 不含 $\dot{A}_4$，因此，可以认为，A_4 并不是一个独立变量. 从

$$F_{4j} = -\mathrm{i}\dot{A}_j - \nabla_j A_4$$

和

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\dot{A}_j - \mathrm{i}\,\nabla_j A_4)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2,$$

可得 A_j 的共轭动量为

$$\varPi_j = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_j} = \dot{A}_j - \mathrm{i}\,\nabla_j A_4 = \mathrm{i}F_{4j}. \tag{4.6}$$

和以前一样，所有罗马字母下标 i, j 从 1 变到 3，所有希腊字母下标 μ, ν 从 1 变到 4，而对所有重复指标求和. 在(4.4)式中令 $\nu=4$，有

$$A_4 = \frac{1}{m^2}\nabla_j F_{j4} = \frac{\mathrm{i}}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\varPi}, \tag{4.7}$$

和(4.6)式一起给出

$$\boldsymbol{\varPi} = \dot{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{m^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\varPi}). \tag{4.8}$$

为了导出哈密顿量，可将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{\varPi}$ 看作独立变量，A_4 通过(4.7)式看作是 $\boldsymbol{\varPi}$ 的函数. 从(4.8)式，有

$$\boldsymbol{\varPi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\varPi}^2 - \frac{1}{m^2}\boldsymbol{\varPi}\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\varPi}),$$

从而

$$\int\boldsymbol{\varPi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}^3r = \int\left[\boldsymbol{\varPi}^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\varPi})^2\right]\mathrm{d}^3r.$$

这样一来，

$$H_{\text{free}} = \int(\boldsymbol{\varPi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}} - \mathscr{L}_{\text{free}})\mathrm{d}^3r$$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Pi}^2 + \left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}}{m}\right)^2 + (\nabla\times\boldsymbol{A})^2 + m^2\boldsymbol{A}^2\right]\mathrm{d}^3 r. \qquad (4.9)$$

根据通常的量子化定则，$A_j(\boldsymbol{r},\ t)$和$\Pi_j(\boldsymbol{r}',\ t)$间的等时对易子为

$$[A_i(\boldsymbol{r},\ t),\ \Pi_j(\boldsymbol{r}',\ t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad (4.10)$$

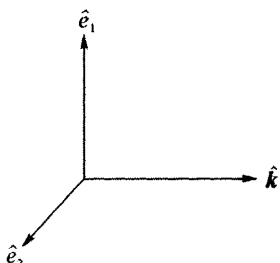


图 4.1 三个正交矢量

所有其他等时对易子$[A_i,\ A_j]$和$[\Pi_i,\ \Pi_j]$为零.

为作傅里叶展开，对任意给定的 $\boldsymbol{k}$ 引入三个正交的单位矢量 $\hat{k} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$，$\hat{e}_1$ 和 $\hat{e}_2$：

在任意固定时刻 t，可以把 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)$和 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ t)$展开成傅里叶级数：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{\left[\hat{k}a_L(\boldsymbol{k})\frac{\omega}{m} + \sum_{T=1,\,2}\hat{e}_T a_T(\boldsymbol{k})\right]\right.$$
$$\left.\times\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \mathrm{h.c.}\right\} \qquad (4.11)$$

和

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{-\mathrm{i}\left[m\hat{k}a_L(\boldsymbol{k}) + \omega\sum_{T=1,\,2}\hat{e}_T a_T(\boldsymbol{k})\right]\right.$$
$$\left.\times\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \mathrm{h.c.}\right\}, \qquad (4.12)$$

其中 h.c. 表示厄米共轭项，而 ω 和以前的(2.17)式一样，

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}. \qquad (4.13)$$

下标 L 和 T 分别标志纵向分量和横向分量，又 $a_L(\boldsymbol{k})$和 $a_T(\boldsymbol{k})$等都是 t 的函数. 从(4.10)式出发并根据在第 2 章中推导(2.25)所用的论据，可得 $a_i(\boldsymbol{k})$和 $a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')$间的等时对易子：

$$[a_i(\boldsymbol{k}),\ a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}. \qquad (4.14)$$

所有其他的等时对易子为零：

$$[a_i(\boldsymbol{k}),\ a_j(\boldsymbol{k}')] = 0,\ [a_i^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')] = 0, \qquad (4.15)$$

这里 i 和 j 表示纵向分量 L 或横向分量 $T = 1$ 或 2(见下面的习题). H_{free}

可用这些湮没、产生算符表达为

$$H_{\text{free}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega \left[a_L^\dagger(\boldsymbol{k}) a_L(\boldsymbol{k}) + \sum_{T=1,2} a_T^\dagger(\boldsymbol{k}) a_T(\boldsymbol{k}) + \frac{3}{2} \right]. \tag{4.16}$$

利用海森伯方程,可见

$$a_i(\boldsymbol{k}) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \text{ 和 } a_i^\dagger(\boldsymbol{k}) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.17}$$

从(4.7)和(4.12)可得

$$A_4(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \frac{|\boldsymbol{k}|}{m} a_L(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \text{h. c.} \tag{4.18}$$

将(4.11)、(4.17)和(4.18)代入(4.5)可验证,对自由场有

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

4.2 相互作用场

下面我们考虑自旋为 1 的场 A_μ 和其他的场有相互作用的情况. 为简单起见,假定拉氏密度已知为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 - j_\mu A_\mu + \cdots, \tag{4.19}$$

其中 j_μ 和…项只和其他场有关,和 A_μ **无关**.

从作用原理(4.3)式,有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu = j_\nu, \tag{4.20}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu = -\frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\nu. \tag{4.21}$$

根据假定,流 j_ν 是和 A_μ 无关,因此 j_ν 是否守恒就依赖于其他场的运动方程以及流的具体形式. 若 $\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$,则$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$; 否则不然.

和前一节中的情况一样，新的拉氏量(4.19)式不含 $\dot{A}_4$，我们将不把 A_4 看成是独立变量. 从(4.19)可见共轭动量 Π_j 仍由(4.6)给出，即

$$\Pi_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j} = \mathrm{i} F_{4j}. \tag{4.22}$$

在(4.20)式设 $\nu = 4$，我们发现(4.7)式应为

$$A_4 = \frac{\mathrm{i}}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{m^2} j_4 \tag{4.23}$$

所代替.

A_i 和 Π_j 间的等时对易子仍由(4.10)给出，且和以前一样，所有其他的等时对易子$[A_i, A_j]$和$[\Pi_i, \Pi_j]$均为零.

练习. 在有上述相互作用的情形下，试证在任意时刻 t，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$和 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$仍可用傅里叶级数(4.11)—(4.12)来展开. 此外，等时对易关系(4.14)—(4.15)仍然成立.

从拉氏密度(4.19)出发，通过(4.23)式可将 A_4 看成是 $\boldsymbol{\Pi}$ 和其他场变量的函数，这时哈密顿量密度可按通常方法作出. 和自由场的情形不同，$a_i(\boldsymbol{k})$和 $a_j^\dagger(\boldsymbol{k})$对时间的依赖关系，一般来说不像(4.17)那样简单，而是十分复杂的.

说明. A_4 的出现使得对自旋为 1 的场的讨论与对零自旋场的讨论大不相同. 对于已知动量 $\boldsymbol{k}$，一自旋为 1、物理质量 $m \neq 0$ 的粒子具有三种模式：纵向的 L 和横向的 $T = 1, 2$. 它们在粒子的静止坐标系里相应于角动量的三个 z 分量 $j_z = 0$ 和 ± 1 的态. 另一方面，由于洛伦兹不变性，自旋为 1 的场表示成 A_μ，它有四个分量. 因此，四个分量中有一个是不独立的.

由于在前面许多表达式当中，参量 m 常出现在分母中，故对自旋为 1 的场来说，$m = 0$ 的极限远比自旋为$\frac{1}{2}$的场复杂. 我们将在第 6 章讨论量子电动力学时再来详细讨论.

习题 4.1. 考虑一个由自旋为 1 的场 A_μ 和自旋为$\frac{1}{2}$的场 ψ 所组成的系统. 假定拉氏密度由(4.19)式给定，其中…项为

$$-\psi^{\dagger}\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m'\right)\psi,$$

而 j_μ 或者是

(i) $$j_\mu = \mathrm{i}g\psi^{\dagger}\gamma_4\gamma_\mu\psi,$$

或者是

(ii) $$j_\mu = \mathrm{i}g\psi^{\dagger}\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5\psi.$$

试作出这一系统的哈密顿量，并作出 ψ、$\mathbf{A}$ 和 A_4 的显示傅里叶展开式. 试利用海森伯方程得出运动方程. 找出上述哪一情形中有 $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$.

习题 4.2. 试证对自旋为 1、质量为 m 的自由场，有

$$[A_\mu(x),\, A_\nu(0)] = -\mathrm{i}\left(\delta_{\mu\nu} - m^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)D(x),$$

其中 $D(x)$ 在问题 2.1 中给出过.

参 考 文 献

Pauli W. *Reviews of Modern Physics*, 1941, **13**:203.

Wentzel G. *Quantum Theory of Fields*. New York: Interscience Publishers, Inc, 1949.

第5章 费 恩 曼 图

5.1 海森伯表象、薛定谔表象和相互作用表象

在量子力学中所有的实验结果都可用不同的算符 O 在各种态矢 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 间的矩阵元表示出来. 描述这种矩阵元的时间变化有多种方法.

1. *海森伯表象* 在海森伯表象中,只有物理算符是随时间变化的,所有物理的态矢量是和时间无关的. 若将海森伯表象中的算符 $O(t)$ 和态矢 $|t\rangle$ 记成 $O_H(t)$ 和 $|t\rangle_H$,则它们的运动方程为

$$[H_H,\, O_H(t)] = -\mathrm{i}\dot{O}_H(t) \tag{5.1}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle_H = 0, \tag{5.2}$$

其中 H_H 是海森伯表象中的哈密顿量.

2. *薛定谔表象* 在薛定谔表象中,只有物理的态矢量是和时间有关的,所有物理算符是和时间无关的. 设在薛定谔表象中的算符 $O(t)$ 和态矢 $|t\rangle$ 为 $O_S(t)$ 和 $|t\rangle_S$,运动方程则为:

$$\dot{O}_S(t) = 0 \tag{5.3}$$

和

$$H_S \mid t\rangle_S = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle_S, \tag{5.4}$$

这里 H_S 是薛定谔表象中的哈密顿量.

3. *相互作用表象* 设 H_I 是相互作用表象中的哈密顿量,它可分

解成

$$H_I = (H_0)_I + (H_{int})_I. \tag{5.5}$$

我们将相互作用表象中的算符 $O(t)$和态矢量$|t\rangle$记成 $O_I(t)$和$|t\rangle_I$. 现在，运动方程为

$$[(H_0)_I, O_I(t)] = -i\dot{O}_I(t) \tag{5.6}$$

和

$$(H_{int}(t))_I \mid t\rangle_I = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle_I. \tag{5.7}$$

H_I 的分解式(5.5)是相当任意的. 若 $H_0 = 0$，则相互作用表象就等同于薛定谔表象；若 $H_{int} = 0$，则它就等同于海森伯表象.

现在我们来证明这些不同表象的等价性. 为了记法清楚起见，写

$$H = H_S, \tag{5.8}$$

即在薛定谔表象中表示哈密顿量时我们将略去下标 S. 同样，在薛定谔表象中，分解式(5.5)可写成

$$H = H_0 + H_{int},$$

即正如(5.8)中那样

$$H_0 = (H_0)_S \quad 和 \quad H_{int} = (H_{int})_S. \tag{5.9}$$

在薛定谔表象中，态$|t\rangle_S$ 立刻可用 $t = 0$ 时的态$|0\rangle_S$ 来表示：

$$\mid t\rangle_S = e^{-iHt} \mid 0\rangle_S. \tag{5.10}$$

在海森伯表象中，相应的态矢$|t\rangle_H$ 是和时间无关的，从而可设它和 $t = 0$ 时薛定谔表象中的态矢相等，即

$$\mid t\rangle_H = \mid 0\rangle_H = \mid 0\rangle_S \quad (对全部\ t).$$

故态矢$|t\rangle_H$ 和$|t\rangle_S$ 由幺正变换 e^{iHt} 相联系：

$$\mid t\rangle_H = e^{iHt} \mid t\rangle_S. \tag{5.11}$$

在同一幺正变换下，这两个表象中的相应算符由下式联系：

$$O_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{5.12}$$

令算符 $O(t)$ 为总哈密顿量，可以看出当从薛定谔表象转换到海森伯表象时它是不变的. 因此用(5.8)式的记号，

$$H_{\mathrm{H}} = H_{\mathrm{S}} = H. \tag{5.13}$$

取(5.11)和(5.12)式的导数，并利用(5.3)—(5.4)和(5.13)式，可得

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\,\dot{O}_{\mathrm{H}}(t) &= -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}) \\ &= (H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} H) \\ &= HO_{\mathrm{H}}(t) - O_{\mathrm{H}}(t)H = [H_{\mathrm{H}}, O_{\mathrm{H}}] \end{aligned}$$

和

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}(-H + H) \mid t\rangle_{\mathrm{S}} = 0.$$

因此薛定谔表象中的运动方程(5.3)—(5.4)蕴涵着海森伯表象中的运动方程. 类似地，我们可以验证这结论反过来也是正确的.

相互作用表象中的态矢 $|t\rangle_{\mathrm{I}}$ 和薛定谔表象中的态矢由下式联系：

$$\mid t\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} \mid t\rangle_{\mathrm{S}}, \tag{5.14}$$

式中 H_0 由(5.9)式给定. 在同一幺正变换 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}$ 下，这两表象中相应的算符由下式联系：

$$O_{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}, \tag{5.15}$$

令算符 $O(t)$ 为 H_0，可见

$$(H_0)_{\mathrm{I}} = (H_0)_{\mathrm{S}} = H_0. \tag{5.16}$$

因此当从薛定谔表象转换到相互作用表象时 H_0 是不变的. 下面我们称 H_0 为未经微扰的哈密顿量. 取(5.14)和(5.15)式的导数并利用(5.3)—(5.4)和(5.9)式，可得

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\,\dot{O}_{\mathrm{I}}(t) &= -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}), \\ &= H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} O_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t} H_0 \end{aligned}$$

$$= [(H_0)_{\mathrm{I}},\ O_{\mathrm{I}}(t)],$$

和

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\mid t\rangle_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\mid t\rangle_{\mathrm{S}}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}(-H_0 + H)\mid t\rangle_{\mathrm{S}}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}H_{\mathrm{int}}\mid t\rangle_{\mathrm{S}}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}H_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\mid t\rangle_{\mathrm{S}}$$
$$= (H_{\mathrm{int}}(t))_{\mathrm{I}}\mid t\rangle_{\mathrm{I}}.$$

因此,薛定谔表象中的运动方程(5.3)—(5.4)也蕴涵着相互作用表象中的运动方程. 类似地,我们可以证明这结论反过来也是正确的. 从(5.11)—(5.12)和(5.14)—(5.15)可知,在任意时刻 t

$$(\langle a \mid O \mid b\rangle)_{\mathrm{H}} = (\langle a \mid O \mid b\rangle)_{\mathrm{S}} = (\langle a \mid O \mid b\rangle)_{\mathrm{I}},$$

式中 O 可以是任意算符,而$|a\rangle$、$|b\rangle$可以是任意两个态矢. 由此完成了不同表象的等价性的证明[还见(24.100)].

5.2 S 矩阵

在这一节和本章的其余各节里,我们将在相互作用表象中来讨论问题. 为简洁起见,略去下标 I. 故(5.7)式变为

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\mid t\rangle = H_{\mathrm{int}}(t)\mid t\rangle, \tag{5.17}$$

按(5.6)式,$H_{\mathrm{int}}(t)$满足

$$-\mathrm{i}\,\dot{H}_{\mathrm{int}} = [H_0,\ H_{\mathrm{int}}]. \tag{5.18}$$

H_0 和 H_{int}都是厄米的. 令 $U(t,\ t_0)$是(5.17)式的格林函数,则有

$$\mid t\rangle = U(t,\ t_0)\mid t_0\rangle, \tag{5.19}$$

式中 $U(t,\ t_0)$满足

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}U(t,\ t_0)=H_{\mathrm{int}}(t)U(t,\ t_0),\tag{5.20}$$

初始条件为

$$U(t_0,\ t_0)=1=\text{单位矩阵}.\tag{5.21}$$

(5.20)式的厄米共轭为

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}U^{\dagger}(t,\ t_0)=U^{\dagger}(t,\ t_0)H_{\mathrm{int}}(t).$$

故

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}(U^{\dagger}(t,\ t_0)U(t,\ t_0))=0,$$

它和初始条件(5.21)一起可得

$$U^{\dagger}(t,\ t_0)U(t,\ t_0)=1,\tag{5.22}$$

即 $U(t,\ t_0)$是幺正的.

定义 S 矩阵是极限

$$S\equiv\lim_{\substack{t_0\to-\infty\\ t\to\infty}}U(t,\ t_0),\tag{5.23}$$

它连接时间为$-\infty$和$+\infty$的态矢量.任何散射问题可用初态和末态矢量间的变换来描述.前者在遥远的过去($t=-\infty$)是已知的,而后者是在遥远的将来($t=+\infty$).因此散射振幅由相应的 S 矩阵元给出.

直到现在为止,$H=H_0+H_{\mathrm{int}}$ 的分解是相当任意的.但为使(5.23)式的双向极限存在,要求满足一些简单的条件.

为了解这点,让我们来考虑一个谐振子的简单例子.谐振子的哈密顿量已知为

$$H=\omega a^{\dagger}a,$$

式中 a 和 $a^{\dagger}$ 是通常的湮没算符和产生算符.假设 H 分解为

$$H_0=\omega_0 a^{\dagger}a$$

与

$$H_{\text{int}} = (\omega - \omega_0)a^\dagger a \tag{5.24}$$

之和.(5.20)式的解为

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t_0)N}, \tag{5.25}$$

式中 N 为占有数算符

$$N = a^\dagger a.$$

令 $|n\rangle$ 是 N 的本征值为 n 的本征矢. 对任意 $n \neq 0$, 对角矩阵元 $\langle n|U(t, t_0)|n\rangle$ 为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t_0)n};$$

当 $t_0 \to -\infty$ 或 $t \to \infty$ 时, 其极限并不存在,除非 $\omega = \omega_0$.

有好几种不同的方法可以绕开这一困难. 一种方法是在时间的渐近区域内变化微分方程(5.18)或(5.20). 比如说,我们可以让 H_{int} 保持原样,但假定 t 具有一适当的小的虚分量,或者用完全等价的方法,保持 t 为实数但用

$$H_{\text{int}}(t) = \begin{cases} (\omega - \omega_0)a^\dagger a, & \text{对 } |t| \leqslant T, \\ (\omega - \omega_0 - \mathrm{i}\varepsilon)a^\dagger a, & \text{对 } |t| > T > 0 \end{cases}$$

代替(5.24),其中 $\varepsilon = 0_+$, 而 T 是个大的常数. 由此,只当 t_0 和 t 都在 $-T$ 和 T 范围内时(5.25)才成立;在这范围之外,例如 $t_0 < -T$ 和 $t > T$ 时则不成立. 这时代替(5.25)的是

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t_0)N}\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t_0-2T)N}.$$

对固定的 $\varepsilon > 0$,在 $t \to \infty$ 和 $t_0 \to -\infty$ 时, 这的确具有极限,但这个极限并不是幺正的.

当然,我们可以尝试用不同的假定形式,比如说,代替(5.24)式的可以是

$$H_{\text{int}}(t) = \begin{cases} (\omega - \omega_0)a^\dagger a, & \text{对 } |t| \leqslant T \\ 0, & \text{对 } |t| > T. \end{cases}$$

像上面一样,当 t_0 和 t 在范围 $-T$ 和 T 之间时,(5.25)是成立的,则有

$$U(t,\ t_0)=U(T,\ -T)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(\omega-\omega_0)TN}.$$

因此,极限(5.23)存在并且现在是幺正的;然而它依赖于人为的参数 T.

还有别的办法,那是我们将要采用的.对于微分方程(5.18)或(5.20)都没有改变,且 t 保持实数.但在这个办法中,要求 H_0 和 H 的谱全同.一如我们将会看到的,对于一大类相对论理论来说,这个看来是很苛刻的条件实际上是很容易满足的.在上面的简单例子中,该条件导致 $\omega=\omega_0$.因此 $H_{\mathrm{int}}=0,\ U=S=1$.

下一步,让我们考虑一个零自旋场 ϕ,其哈密顿量密度已知为

$$H=\frac{1}{2}(\Pi^2+(\nabla\phi)^2+m_0^2\phi^2)+g_0^2\phi^4-E_{\mathrm{vac}},\tag{5.26}$$

其中 Π 为 ϕ 的共轭动量,m_0、g_0 和 E_{vac} 均为实数.参数 m_0 称为力学质量,g_0 称为未重正化的耦合常数.我们将真空态 $|\mathrm{vac}\rangle$ 定义为 H 的最低能量态.(5.26)式中的 E_{vac} 由条件

$$H\mid\mathrm{vac}\rangle=0$$

确定.由于在(5.26)式中相互作用 $g_0^2\phi^4$ 是正的,故它在零自旋的量子之间只产生排斥力.因此可以假定,在系统中不存在束缚态.从相对论不变性知道,这种系统的能谱必须有如下的形式:

$$E=\sum_{\boldsymbol{k}}n_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2},\tag{5.27}$$

式中 m 是物理质量,$n_{\boldsymbol{k}}=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 代表动量为 $\boldsymbol{k}$、自旋为零的量子的数目.由此可以引入

$$H_0=\frac{1}{2}(\Pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2)-E_0,\tag{5.28}$$

并且选择 E_0 使得 H_0 的最低能量态具有零本征值,即

$$H_0\mid 0\rangle=0\tag{5.29}$$

显然,倘使(5.28)中的 m 为物理质量,则 H_0 的能谱和 H 的能谱全同.

在相对论相互作用场的一般情况下,当理论不具有稳定的束缚态(一如上述情形或下章中将要讨论的量子电动力学的情形)时,我们将选取自

由场的哈密顿量作为非微扰哈密顿量 H_0，但质量参数则假设为相互作用系统的物理质量. 因此，H_0 的能谱变得和 H 的一样，这使得 S 矩阵可以取双向极限(5.23).

在有稳定束缚态的情形下，我们仍采取同样的步骤，令 H_0 为自由粒子哈密顿量，m 为物理质量参数. 一如我们将在今后几节中要讨论的，这就可使我们借助于图形来做微扰级数形式的展开. 一个稳定的束缚态可以认为是一组适当图形的无限和，将这些和分离出来之后，就可以取极限(5.23). 现在，我们暂且不管这种复杂情形.

这样一来，在相互作用表象中，所有的场算符都满足自由场方程，它们对时间的依赖关系是已知的. 例如，傅里叶变换(2.20)式可写成

$$\phi(x) = a(x) + a^{\dagger}(x), \tag{5.30}$$

式中

$$a(x) = \sum_{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} a_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t}, \tag{5.31}$$

$a^{\dagger}(x)$是它的厄米共轭. 一如既往，$x = (\boldsymbol{r},\ it)$，

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} > 0,$$

取 m 为零自旋场的物理质量. 这里算符 a_k 与时间无关，而在(2.20)式中的算符 $a_k(t)$在相互作用表象中具有 $e^{-i\omega t}$ 的时间依赖性；两者由 $a_k(t) = a_k e^{-i\omega t}$ 相联系.

同样地，自旋为$\frac{1}{2}$的场的傅里叶展开式(3.32)在相互作用表象中可写成

$$\psi(x) = U(x) + \overline{V}(x), \tag{5.32}$$

其中

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p,s} a_{p,s} u_{p,s} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-iE_p t}, \tag{5.33}$$

$$\overline{V}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p,s} b^{\dagger}_{p,s} v_{p,s} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}+iE_p t}, \tag{5.34}$$

而

$$E_p = \sqrt{p^2 + m^2} > 0,$$

m 是$\frac{1}{2}$自旋场的物理质量. 这里算符 $a_{p,s}$和 $b^\dagger_{p,s}$也都和时间无关,它们与(3.32)式中对应的算符 $a_{p,s}(t)$和 $b^\dagger_{p,s}(t)$的联系是: $a_{p,s}(t) = a_{p,s}e^{-iE_pt}$ 和 $b^\dagger_{p,s}(t) = b^\dagger_{p,s}e^{iE_pt}$. 为方便计,引入

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger(x)\gamma_4 \equiv \bar{U}(x) + V(x), \tag{5.35}$$

其中

$$\bar{U}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p,s} a^\dagger_{p,s} u^\dagger_{p,s} \gamma_4 e^{-ip\cdot r + iE_pt}, \tag{5.36}$$

而

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p,s} b_{p,s} v^\dagger_{p,s} \gamma_4 e^{ip\cdot r - iE_pt}. \tag{5.37}$$

对于自旋为 1 的场也可写出类似的展开式. 这里不予以仔细讨论.

5.3 编时乘积、正规乘积和收缩

在(5.30)、(5.32)和(5.35)中,$a(x)$、$U(x)$和 $V(x)$只含湮没算符,而 $a^\dagger(x)$、$\bar{U}(x)$和 $\bar{V}(x)$只含产生算符. 令 $X_i(x_i)$是这些算符中的任意一个算符, $x_i = (\boldsymbol{r}_i, it_i)$. 我们定义 $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i(x_i)$ 的编时乘积为

$$T(X_1(x_1)X_2(x_2)\cdots X_n(x_n)) \equiv \delta_p X_{p_1}(x_{p_1})X_{p_2}(x_{p_2})\cdots X_{p_n}(x_{p_n}), \tag{5.38}$$

使 x_{p_i}的时间次序满足

$$t_{p_1} \geqslant t_{p_2} \geqslant t_{p_3} \geqslant \cdots \geqslant t_{p_n}.$$

当 $t_i = t_j$ 时,相应算符 X_i 和 X_j 的相对次序在(5.38)式的两边是相同的. $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i(x_i)$ 的正规乘积定义为

$$:X_1(x_1)X_2(x_2)\cdots X_n(x_n):\equiv \delta_p X_{p_1}(x_{p_1})X_{p_2}(x_{p_2})\cdots X_{p_n}(x_{p_n}). \tag{5.39}$$

上式右端是算符经调换后的序列，使得湮没算符永远出现在产生算符的右边. 在(5.38)和(5.39)两定义中，δ_p 可为+1或−1，只依赖于费米子算符的置换. 如果左端的费米子算符的次序是右端的偶数个置换，则 $\delta_p=+1$，否则为−1. 指标 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 代表一个置换

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}.$$

一个和的编时乘积与正规乘积定义为相应乘积的和，亦即

$$\begin{aligned}&T(A+B)=T(A)+T(B)\\&:A+B:=:A:+:B:.\end{aligned} \tag{5.40}$$

下面是这些乘积的一些例子：

$$T(\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2))=\begin{cases}\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) & t_1\geqslant t_2,\\ -\psi_\beta(2)\psi_\alpha(1) & t_1<t_2,\end{cases} \tag{5.41}$$

$$T(\phi(1)\phi(2))=\begin{cases}\phi(1)\phi(2) & t_1\geqslant t_2,\\ \phi(2)\phi(1) & t_1<t_2,\end{cases} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}:\psi_\alpha(1)\bar{\psi}_\beta(2):=&-\bar{U}_\beta(2)U_\alpha(1)+U_\alpha(1)V_\beta(2)\\&+\bar{V}_\alpha(1)V_\beta(2)+\bar{V}_\alpha(1)\bar{U}_\beta(2),\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}:\phi(1)\phi(2):=&\,a(1)a(2)+a^\dagger(2)a(1)\\&+a^\dagger(1)a(2)+a^\dagger(1)a^\dagger(2),\end{aligned} \tag{5.44}$$

式中1和2分别表示 x_1 和 x_2，下标 α、β 标志自旋指标.

$X_1(1)$ 和 $X_2(2)$ 之间的戴森-威克收缩定义为

$$\underbrace{X_1(1)X_2(2)}\equiv T(X_1(1)X_2(2))-:X_1(1)X_2(2):. \tag{5.45}$$

利用(5.42)和(5.44)—(5.45)，可求得 $\phi(x)$ 和 $\phi(0)$ 之间的收缩为

$$\underbrace{\phi(x)\phi(0)}=\begin{cases}a(x)a^\dagger(0)-a^\dagger(0)a(x) & t\geqslant 0,\\ a(0)a^\dagger(x)-a^\dagger(x)a(0) & t<0,\end{cases}$$

式中 $x=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$. 上式的右端可写成对易子的形式:

$$\underbrace{\phi(x)\phi(0)}=\begin{cases}[a(x),\ a^{\dagger}(0)] & t\geqslant 0,\\ [a(0),\ a^{\dagger}(x)] & t<0.\end{cases} \tag{5.46}$$

同样地,$\psi(x)$和 $\bar{\psi}(0)$的收缩为

$$\underbrace{\psi_{\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}(0)}=\begin{cases}\{U_{\alpha}(x),\ \bar{U}_{\beta}(0)\} & t\geqslant 0,\\ -\{V_{\beta}(0),\ \bar{V}_{\alpha}(x)\} & t<0.\end{cases} \tag{5.47}$$

我们注意到这些收缩都是 c 数,而相应的编时乘积和正规乘积却都是算符.

下一步我们来讨论这些收缩的四维积分表示. 利用(5.31)和对易关系 $[a_{k},\ a_{k'}^{\dagger}]=\delta_{k,k'}$, 可得

$$[a(x),\ a^{\dagger}(0)]=\sum_{k}\frac{1}{2\omega\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t},$$

$$[a(0),\ a^{\dagger}(x)]=\sum_{k}\frac{1}{2\omega\Omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\omega t}.$$

定义费恩曼传播子 $D_F(x)$为 $\phi(x)$和 $\phi(0)$的收缩

$$D_F(x)=\underbrace{\phi(x)\phi(0)}=\sum_{k}\frac{1}{2\omega\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\mp\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.48}$$

式中指数上的符号,当 $t>0$ 时取负号,$t<0$ 时取正号. 当 $t=0$ 时函数 $D_F(x)$是连续的. 现在我们来建立积分表示

$$D_F(x)\equiv-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{d}^4k}{k^2+(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}, \tag{5.49}$$

式中

$$k\cdot x=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-k_0t,\quad \mathrm{d}^4k=\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0,$$

$$k^2=\boldsymbol{k}^2-k_0^2,\qquad k_4=\mathrm{i}k_0,$$

ϵ 是正的无穷小实参数,即 $\epsilon=0_+$. 为了说明这点,可先将积分从 $k_0=-\infty$ 积到 $k_0=\infty$:

$$\int\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0t}\mathrm{d}k_0}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}=\int\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0t}\mathrm{d}k_0}{(k_0+\omega-\mathrm{i}\epsilon)(k_0-\omega+\mathrm{i}\epsilon)}, \tag{5.50}$$

式中 $\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}>0$.

在 k_0 的复平面上，积分(5.50)的被积函数有两个奇点：$k_0=\omega-\mathrm{i}\varepsilon$ 和 $-\omega+\mathrm{i}\varepsilon$. 当 $t>0$，可考虑同一被积函数沿图 5.1(a)所示的封闭曲线的回路积分. 当半圆的半径趋向无限时，沿半圆上的回路积分趋向于 0. 积分(5.50)等于 $-2\pi\mathrm{i}$ 乘被积函数在极点 $k_0=\omega-\mathrm{i}\varepsilon$ 的留数. 将它代入(5.49)，可得(对 $t>0$)，

$$D_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t}\equiv D_+(x). \tag{5.51}$$

同样地，当 t 为负时考虑图 5.1(b)的回路. 这样可得(对 $t<0$)，

$$D_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\omega t}\equiv D_-(x). \tag{5.52}$$

从(2.28)和(5.51)—(5.52)，可见(5.48)和(5.49)的等价性. $D_+(x)$表示 $D_F(x)$的正频部分，$D_-(x)$表示相应的负频部分.

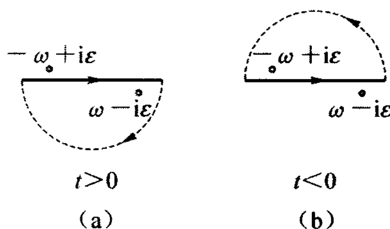


图 5.1 费恩曼积分(5.46)在 k_0 的复平面上的积分回路

利用习题 2.1 和(5.51)—(5.52)，我们可得在相互作用表象中 $\phi(x)$ 和 $\phi(0)$的对易子为

$$[\phi(x),\ \phi(0)]=-\mathrm{i}D(x)=D_+(x)-D_-(x), \tag{5.53}$$

式中

$$D(x)\equiv\int\frac{1}{8\pi^3}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\ \frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{5.54}$$

因此，$D(x)$和费恩曼传播子 $D_F(x)$密切相关. 要了解这一关系，更为直接的方法是利用分解式(5.30). 写

$$[\phi(x),\ \phi(0)] = [a(x),\ a^\dagger(0)] + [a^\dagger(x),\ a(0)]. \qquad (5.55)$$

将它和(5.46)相比较，可见其正频部分和收缩 $D_F(x)$中的正频部分是一样的；其负频部分和 $D_F(x)$中的相应部分只差一负号.

对$\frac{1}{2}$自旋场 ψ 可应用完全相同的推理. 考虑到(5.32)和(5.35)，在相互作用表象中 ψ 及其共轭 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_4$ 的反对易子为

$$\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(0)\} = \{U_\alpha(x),\ \bar{U}_\beta(0)\} + \{\bar{V}_\alpha(x),\ V_\beta(0)\}. \qquad (5.56)$$

和前面的一样，式中的下标 α 和 β 是旋量指标. 从(5.33)我们看到 $\{U_\alpha(x),\ \bar{U}_\beta(0)\}$ 只有正频项，亦即只有正比于 $e^{-iE_p t}$ 的项. 同样，从(5.34)，$\{\bar{V}_\alpha(x),\ V_\beta(0)\}$只有负频项，它正比于 $e^{iE_p t}$. 另一方面，从习题3.1和方程(5.53)，我们见到同一反对易子还可写成

$$\begin{aligned}\{\psi(x),\ \bar{\psi}(0)\} &= i\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)D(x) \\ &= -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)[D_+(x) - D_-(x)]. \qquad (5.57)\end{aligned}$$

将(5.56)和(5.57)的正频部分和负频部分分别相等给出：

$$\{U_\alpha(x),\ \bar{U}_\beta(0)\} = -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} D_+(x)$$

和

$$\{\bar{V}_\alpha(x),\ V_\beta(0)\} = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} D_-(x).$$

将上二式代入(5.47)，并利用(5.51)—(5.52)，可推得

$$\underbrace{\psi(x)\bar{\psi}(0)} = -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)D_F(x). \qquad (5.58)$$

由于(5.49)式，这又可写成

$$\underbrace{\psi(x)\bar{\psi}(0)} = i\int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_\mu k_\mu - m}{k^2 + (m - i\varepsilon)^2} e^{ik\cdot x} d^4 k.$$

一如在 3.4 节的练习中所做的那样，引入

$$\not{k} \equiv - \mathrm{i}\gamma_\mu k_\mu \tag{5.59}$$

是十分方便的. 可直接验证,

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = - k^2 - m^2$$

和

$$\frac{1}{\not{k} - m} = \frac{\not{k} + m}{(\not{k} - m)(\not{k} + m)} = \frac{-\not{k} - m}{k^2 + m^2}.$$

因此,(5.58)式还可写成

$$\underbrace{\psi(x)\bar{\psi}(0)} = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{\not{k} - (m - \mathrm{i}\varepsilon)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \mathrm{d}^4 x \equiv S_F(x). \tag{5.60}$$

5.4 微扰级数

从(5.20)式

$$-\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_{\mathrm{int}}(t) U(t, t_0)$$

出发,作替换

$$H_{\mathrm{int}} \rightarrow \lambda H_{\mathrm{int}}.$$

并且写

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0), \tag{5.61}$$

则方程(5.20)变为

$$-\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0) = \lambda H_{\mathrm{int}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0). \tag{5.62}$$

令两边 λ^n 的系数相等,有

$$-\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = 0, \tag{5.63}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}U_n(t,\ t_0)=H_{\text{int}}(t)U_{n-1}(t,\ t_0)\ 对于\ n\geqslant 1. \tag{5.64}$$

同样地,将(5.61)代入初始条件(5.21)式,可得在 $t=t_0$ 时

$$U_0(t_0,\ t_0)=1 \tag{5.65}$$

和

$$U_n(t_0,\ t_0)=0,\ 对\quad n\geqslant 1. \tag{5.66}$$

方程(5.63)和(5.65)给出

$$U_0(t_0,\ t_0)=1. \tag{5.67}$$

利用(5.64)、(5.66)和(5.67)立刻可得第一级($n=1$)微扰项. 其解为

$$U_1(t,\ t_0)=-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}H_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'. \tag{5.68}$$

同样地,对 $n=2$ 的解为

$$\begin{aligned}U_2(t,\ t_0)&=(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2)\\&=\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2T(H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2)),\end{aligned} \tag{5.69}$$

等等. 令 $\lambda=1$, 考虑到(5.23)式,可得 S 矩阵的微扰级数展开

$$\begin{aligned}S=U(\infty,\ -\infty)&=1-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\text{int}}(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_2T(H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2))\\&+\frac{(-\mathrm{i})^3}{3!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_3T(H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2)H_{\text{int}}(t_3))\\&+\cdots,\end{aligned} \tag{5.70}$$

和(5.69)中的一样,这里 T 表示编时乘积. 将级数中所有这些编时乘积转换成正规乘积,这对实际计算是十分有用的. 这种转换的系统理论由威克定理给出.

5.5　威克定理

首先，我们将正规乘积的定义(5.39)扩充一下，使它包含 c 数的相乘因子：

$$:cX_1 X_2 \cdots X_n: = c:X_1 X_2 \cdots X_n:, \tag{5.71}$$

式中 c 为 c 数. 由此有

$$:\underbrace{X_1 X_2} X_3 \cdots X_n: = \underbrace{X_1 X_2} :X_3 \cdots X_n:,$$

$$:\underbrace{X_1 X_2 X_3} \cdots X_n: = \delta_p \underbrace{X_1 X_3} :X_2 \cdots X_n:, \text{等等} \tag{5.72}$$

其中 δ_p 的定义和在(5.39)中的一样；亦即，若 X_2 和 X_3 是费米子算符时，则 $\delta_p = -1$，否则 $\delta_p = +1$.

和以前一样，令算符 $X_i(x_i)$的时空位置为 $x_i = (\boldsymbol{r}_i,\ \mathrm{i}t_i)$，而 $Y(y)$为如同 X_i 那样的算符，但位于时空点 $y = (\boldsymbol{r}_y,\ \mathrm{i}t_y)$. 我们先来建立一条引理.

引理.　若对一切 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$,

$$t_y \leqslant t_i \tag{5.73}$$

则

$$\begin{aligned} :X_1 X_2 \cdots X_n:Y = & :X_1 X_2 \cdots \underbrace{X_n Y}: \\ & + :X_1 X_2 \cdots \underbrace{X_{n-1} X_n Y}: + \cdots \\ & + :\underbrace{X_1 X_2 \cdots X_n Y}: + :X_1 X_2 \cdots X_n Y:. \end{aligned} \tag{5.74}$$

证：(i) 当 Y 为一湮没算符时，有 $:X_iY: = X_iY$. 考虑到(5.73)，$T(X_iY) = X_iY$，故有

$$\underbrace{X_i Y} = T(X_i Y) - :X_i Y: = 0.$$

因此,在(5.74)式的右端,除最后一项 $:X_1X_2\cdots X_nY:$ 外均为零.很易看出引理成立.

(ii) 当 Y 为一产生算符时,我们分三步来证:

(a) 假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均为湮没算符,我们有

$$:X_1X_2\cdots X_n:Y = X_1X_2\cdots X_nY,$$
$$:X_iY: = \delta_i YX_i. \tag{5.75}$$

当式中 Y 和 X_i 均为费米子算符时 $\delta_i = -1$, 否则 $\delta_i = +1$. 因此

$$\begin{aligned} :X_1X_2\cdots X_nY: &= \delta_p :YX_1X_2\cdots X_n: \\ &= \delta_p YX_1X_2\cdots X_n. \end{aligned}$$

此外,由于假设(5.73),还有

$$T(X_iY) = X_iY,$$

因此

$$X_iY = \delta_i YX_i + \underbrace{X_iY}.$$

这导致

$$X_1\cdots X_nY = \delta_n X_1\cdots X_{n-1}YX_n + X_1\cdots X_{n-1}\underbrace{X_nY}.$$

可将右端第一项中的 Y 和 X_{n-1} 进行对换:

$$\begin{aligned} X_1\cdots X_nY = {} & \delta_n\delta_{n-1}X_1\cdots X_{n-2}YX_{n-1}X_n \\ & + :X_1\cdots X_{n-2}\underbrace{X_{n-1}X_nY}: \\ & + :X_1\cdots X_{n-1}\underbrace{X_nY}:. \end{aligned}$$

重复这种过程,可得

$$\begin{aligned} X_1\cdots X_nY = {} & \delta_pYX_1\cdots X_n + :X_1\cdots X_{n-1}\underbrace{X_nY}: \\ & + :X_1\cdots X_{n-2}\underbrace{X_{n-1}X_nY}: + \cdots + :X_1\cdots X_nY:. \end{aligned}$$

由于(5.75),上式左端是和(5.74)的左端相同,故引理在这情形中确立.

(b) 其次,假设 $X_1, X_2, \cdots, X_j$ 均为产生算符,但 $X_{j+1}, X_{j+2}, \cdots, X_n$ 为湮没算符. 由于 $t_y \leqslant t_i$ 以及 Y 为产生算符,故有

$$\underbracket{X_i Y} = 0 \quad 对 \quad i = 1, 2, \cdots, j$$

和

$$\begin{aligned} :X_1 X_2 \cdots X_n:Y &= X_1 \cdots X_j X_{j+1} \cdots X_n Y \\ &= X_1 \cdots X_j :X_{j+1} \cdots X_n:Y. \end{aligned}$$

由于 $X_{j+1}, \cdots, X_n$ 均为湮没算符,我们可以利用(a)的结果将引理应用于最后一项,这就给出

$$\begin{aligned} :X_1 \cdots X_n:Y = X_1 \cdots X_j (&:X_{j+1} \cdots X_n Y: \\ &+ :X_{j+1} \cdots \underbracket{X_n Y}: + :X_{j+1} \cdots \underbracket{X_{n-1} X_n Y}: \\ &+ \cdots + :\underbracket{X_{j+1} \cdots X_n Y}:). \end{aligned}$$

由于 $X_1, \cdots, X_j$ 均为产生算符,因此引理得证.

(c) 现在考虑一般情形,即 X_i 可以是湮没算符,也可以是产生算符的情形. 从正规乘积(5.39)的定义,可将它们的次序进行调换使得(5.74)左端 X_i 的次序安排成所有的湮没算符在产生算符的右边. 利用(b)的结果,引理得证.

威克定理说明如何将编时乘积化为正规乘积之和.

定理

$$\begin{aligned} T(X_1 X_2 \cdots X_n) = &:X_1 X_2 \cdots X_n: \\ &+ :\underbracket{X_1 X_2} \cdots X_n: + :\underbracket{X_1 X_2 X_3} \cdots X_n: \\ &+ \cdots + :\underbracket{X_1 X_2} \underbracket{X_3 X_4} \cdots X_n: \\ &+ :\underbracket{X_1 X_2 X_3} X_4 \cdots X_n: + \cdots. \end{aligned} \tag{5.76}$$

(最后一项中 X_1 与 X_3 收缩, X_2 与 X_4 收缩.)

式中右端每一项包括若干 X_i 对的收缩,而所有这些项的总和构成上式的右端.

证明. 当 $n=2$，由于收缩的定义(5.45)，定理即成立. 假定 $n\leqslant N$ 时定理成立，则考虑当 $n=N+1$ 时的编时乘积.

在 $N+1$ 个算符 $X_1, X_2, \cdots, X_{N+1}$ 当中，必然存在一个 X_i，其时间 t_i 是最早的. 令 X_i 是 X_{N+1}，亦即对所有 $j=1, 2, \cdots, N$ 有 $t_{N+1}\leqslant t_j$. 故

$$T(X_1X_2\cdots X_NX_{N+1})=T(X_1X_2\cdots X_N)X_{N+1}.$$

由于假定了定理对 $n=N$ 时成立，故利用(5.76)可以将 $T(X_1, X_2, \cdots, X_N)$化为正规乘积之和. 结果是：$T(X_1X_2\cdots X_N)X_{N+1}$ 可写成为许多项之和，其中每一项具有(5.74)左端的形式. 利用引理，对 $n=N+1$ 建立起(5.76)式，然后定理可用归纳法证明.

5.6 应用

下面的例子说明从威克定理如何引入费恩曼图和如何计算 S 矩阵.

令零自旋场的哈密顿量为

$$H=H_0+H_{\text{int}}, \tag{5.77}$$

$$H_0=\frac{1}{2}\int{:}\Pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2{:}\,\mathrm{d}^3r, \tag{5.78}$$

$$H_{\text{int}}=\int{:}-\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2+\frac{1}{3!}g_0\phi^3+\frac{1}{4!}f_0\phi^4{:}\,\mathrm{d}^3r. \tag{5.79}$$

和以前一样，式中的 Π 是共轭动量，g_0 和 f_0 是未重正化的耦合常数，m 是物理质量，m_0 是力学质量，由方程

$$m_0^2=m^2-\delta m^2 \tag{5.80}$$

定义. 在弱耦合的情况下，假定 δm^2 为 g_0^2 和 f_0^2 的量级. 下面我们将在相互作用表象中工作，并将 $\phi(x)$ 展开成(5.30)—(5.31)的形式. 由于(5.78)中 H_0 由正规乘积表示，我们有

$$H_0=\sum_k\omega a_ka_k^{\dagger}, \tag{5.81}$$

式中

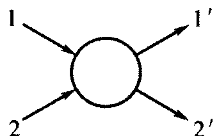


图 5.2 散射过程 $1+2\to 1'+2'$

$$\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2},$$

和(2.44)式一样.

现在我们将讨论图 5.2 中的散射过程. 初态为

$$|\,1,\ 2\rangle\equiv a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\,|\,0\rangle, \tag{5.82}$$

末态为

$$|\,1',\ 2'\rangle\equiv a_1'^{\dagger}a_2'^{\dagger}\,|\,0\rangle. \tag{5.83}$$

式中

$$a_i^{\dagger}=a_{\boldsymbol{p}_i}^{\dagger},\ a_i'^{\dagger}=a_{\boldsymbol{p}_i'}^{\dagger},$$

$i=1,\ 2.$ $\boldsymbol{p}_i$、$\boldsymbol{p}_i'$ 分别是粒子 i 和 i' 的三维动量. 我们的目的是计算矩阵元$\langle 1',\ 2'|S|1,\ 2\rangle$. 其中 S 是(5.70)中给出的 S 矩阵.

1. 为简单起见,先讨论

$$g_0=0,\ \text{但}\ f_0\neq 0 \tag{5.84}$$

的情形. 对于 f_0 的最低次,我们有

$$\langle 1',\ 2'|\ S\ |1,\ 2\rangle=\frac{-\mathrm{i}}{4!}f_0\int \mathrm{d}^4x\langle 1',\ 2'\ |:\phi^4(x):|\ 1,\ 2\rangle. \tag{5.85}$$

这是因为 δm^2 是 f_0^2 的量级 $O(f_0^2)$,因此 H_{int}的展开式(5.79)中准至 f_0 的量级 $O(f_0)$的只有$\frac{1}{4!}f_0\phi^4$. 在(5.85)中我们必须从 $:\phi^4(x):$ 中选出正比于 $a_1'^{\dagger}a_2'^{\dagger}a_1a_2$ 的项,从四个 ϕ 中由于选择方式的不同可选出 $4!=24$ 种这样的因子.

因此,准至 $O(f_0)$量级,我们有

$$\langle 1',\ 2'\ |\ S\ |\ 1,\ 2\rangle=-\mathrm{i}f_0\ \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_1'\omega_2'}}\times\int\frac{\mathrm{d}^4x}{\Omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\cdot x},$$

式中 p_1、p_2、p_1' 和 p_2'分别是粒子 1、2、1′和 2′的四维动量(亦写作 4 动量),ω_i 和 ω_i'是相应的能量;和以前一样, $x=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$, $\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}^3r\mathrm{d}t$. 四维积分贡献因子 $(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')$. 引入下式中的 $\mathfrak{M}$ 是很方便的:

$$\langle 1', 2' \mid S \mid 1, 2\rangle \equiv \mathfrak{M}\frac{(2\pi)^4}{\Omega^2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2'). \quad (5.86)$$

在我们这个简单例子中,

$$\mathfrak{M} = -\mathrm{i}f_0\frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_1'\omega_2'}}. \quad (5.87)$$

图 5.3 过程 $1+2\rightleftharpoons 1'+2'$ 当 $H_{\mathrm{int}} = :\frac{1}{4!}f_0\phi^4:$ 时的最低次费恩曼图

一般情形下 $\mathfrak{M}$ 可用称之为费恩曼的图形或许多这种图形之和来代表. 其规则称为费恩曼定则. 在图 5.3 中画出由(5.87)式给定的 $\mathfrak{M}$ 的图形. 四条线代表两个入射粒子和两个出射粒子;它们的交点称为 4 线顶角,代表相互作用 $:\phi^4:$ 的作用.

对图 5.3 的费恩曼定则是:对每条外线

$$\text{●——— 给出因子} \quad \frac{1}{\sqrt{2\omega}},$$

其中 ω 是外线所携带的能量;每一 4 线顶角

$$\times \quad \text{给出因子} \quad -\mathrm{i}f_0, \quad (5.88)$$

所有这些因子的乘积给出(5.87)式中的 $\mathfrak{M}$.

其次,我们来说明截面的计算. 由于

$$\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = (2\pi)^4\delta^4(p),$$

我们有

$$(2\pi)^4\delta^4(p)\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = [(2\pi)^4\delta^4(p)]^2.$$

由于左端有一 δ^4 函数,所以在被积函数中可令 $p=0$. 积分变为

$$\int \mathrm{d}^4 x = \Omega T.$$

其中对 $\boldsymbol{r}$ 的积分遍及体积 Ω,对时间的积分遍及间隔 T. 最后,Ω 和 T 要 $\rightarrow\infty$. 由此,联合上面二表式,可写

$$[(2\pi)^4\delta^4(p)]^2 = (2\pi)^4\delta^4(p)\Omega T. \quad (5.89)$$

取(5.86)式的平方,有

$$|\langle 1',\ 2'\ |\ S\ |\ 1,\ 2\rangle|^2 = |\ \mathfrak{M}\ |^2\ \frac{(2\pi)^4}{\Omega^4}\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\Omega T. \tag{5.90}$$

取实验室系,在其中粒子 2 是静止的,粒子 1 以速度$\boldsymbol{v}_1$运动.假定 $1+2\to 1'+2'$的截面为 $\mathrm{d}\sigma$,考虑图 5.4 中所示的圆柱体,其中 $v_1 = |\ \boldsymbol{v}_1|$. 由于初态(5.82)相应于在体积 Ω 中只有两个粒子 1 和 2 的态,因此粒子 1 位于柱体内的概率为

$$\frac{v_1 T\mathrm{d}\sigma}{\Omega}. \tag{5.91}$$

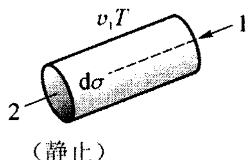


图 5.4 在粒子 2 的静止系中,粒子 1 在柱体 $v_1T\mathrm{d}\sigma$ 内,则反应 $1+2\to 1'+2'$将在时间 T 内发生

若粒子 1 在这柱体内,则反应 $1+2\to 1'+2'$将在时间 T 内发生.因此,这个概率等于

$$|\langle 1',\ 2'\ |\ U\left(\frac{T}{2},\ -\frac{T}{2}\right)|\ 1,\ 2\rangle|^2, \tag{5.92}$$

式中U 矩阵在(5.19)中给出.在 $\Omega\to\infty$然后 $T\to\infty$的极限下,(5.92)式变成(5.90).令它和(5.91)式相等,则得

$$\mathrm{d}\sigma = \sum \frac{(2\pi)^4}{\Omega^2 v_1}\ |\ \mathfrak{M}\ |^2\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2'), \tag{5.93}$$

式中求和要遍及末态各种不同的三维动量 $\boldsymbol{p}_1'$和 $\boldsymbol{p}_2'$. 由于(2.28)式:

$$\sum_{\boldsymbol{p}_i} \to \frac{\Omega}{8\pi^3}\int \mathrm{d}^3 p_i,$$

由(5.39)可得

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\int \frac{\mathrm{d}^3 p_1'\mathrm{d}^3 p_2'}{8\pi^3 v_1}\ |\ \mathfrak{M}\ |^2\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2'), \tag{5.94}$$

式中 v_1 和 $\mathfrak{M}$ 是在粒子 2 的静止系中计算的.

我们看到,从 $\mathfrak{M}$ 的定义(5.86)式到上面 $\mathrm{d}\sigma$ 的表达式均具有普遍性,与相互作用哈密顿量的具体形式无关.

2. 现在我们来考虑一般情形:$g_0\neq 0$ 和 $f_0\neq 0$. 为简单起见,对反应

$1+2\rightarrow 1'+2'$ 的 S 矩阵只计算到 $O(f_0)$ 和 $O(g_0^2)$ 的量级. 计算至这一量级, 对 $|1,\ 2\rangle\neq|1',\ 2'\rangle$, 从(5.70)可得

$$\langle 1',\ 2'|\ S\ |\ 1,\ 2\rangle=-\mathrm{i}f_0\ \frac{1}{4!}\int\langle 1',\ 2'\ |:\phi^4(x):|\ 1,\ 2\rangle\mathrm{d}^4x$$
$$+\frac{(-\mathrm{i}g_0)^2}{2!3!3!}\int\langle 1',\ 2'\ |\ T([:\phi^3(x):][:\phi^3(y):])\ |\ 1,\ 2\rangle\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y. \tag{5.95}$$

首先利用威克定理将第二个积分中的 T 乘积化为正规乘积之和. 然后, 和以前一样, 在和中只保留正比于 $a_1'^{\dagger}a_2'^{\dagger}a_1a_2$ 的项. 形式为

$$\frac{a_1'^{\dagger}a_2'^{\dagger}a_1a_2}{4\Omega^2\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_1'\omega_2'}} \tag{5.96}$$

乘以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\cdot x-\mathrm{i}(p_1'+p_2')\cdot y}+(\text{相同的项,但 } x\text{、}y\text{ 互换}) \tag{5.97}$$

的项有 $(3!)^2$ 个; 还有 $(3!)^2$ 个形式为(5.96)式乘以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p_1')\cdot x+\mathrm{i}(p_2-p_2')\cdot y}+(\text{相同的项,但 } x\text{、}y\text{ 互换}) \tag{5.98}$$

的项; 此外, 还有 $(3!)^2$ 个形式为(5.96)式乘以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p_2')\cdot x+\mathrm{i}(p_2-p_1')\cdot y}+(\text{相同的项,但 } x\text{、}y\text{ 互换}) \tag{5.99}$$

的项. 在每种情形中, $(3!)^2$ 个项以及 x 与 y 互换的项正好和积分号外的因子 $\frac{1}{2!\ 3!\ 3!}$ 相消. 三种形式的项(5.97)—(5.99)导致图 5.5 中的三种图形.

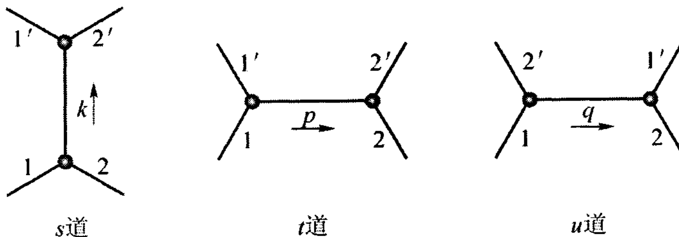


图 5.5 反应 $1+2\rightarrow 1'+2'$ 的三种 $O(g_0^2)$ 的图形. 箭头指明动量的方向 *

* 由于每个动量的分量可正可负, 因此这些动量的箭头的方向可以任意画.

为了计算这些图形，我们用如下的费恩曼规则：和图 5.3 中的一样，对每条外线

$$\text{o——} \quad \text{带有一因子} \ \frac{1}{\sqrt{2\omega}}; \tag{5.100}$$

对每条内线

$$\underset{q}{\text{o——o}} \quad \text{带一因子} \ \frac{-\mathrm{i}}{q^2+(m-\mathrm{i}\varepsilon)^2}, \tag{5.101}$$

式中 q 表示它的 4 动量，$q^2 = \boldsymbol{q}^2 - q_0^2$；对每一 3 线顶角

$$\text{Y} \quad \text{给出一因子} \ -\mathrm{i}g_0. \tag{5.102}$$

这些因子的积是费恩曼图对由(5.86)式定义的 $\mathfrak{M}$ 的贡献.

将图 5.3 中的图形和图 5.5 中的各个图形加起来可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = & \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}\sqrt{2\omega_i'}} \\ & \times\left[-\mathrm{i}f_0 + (-\mathrm{i}g_0)^2\left(\frac{-\mathrm{i}}{k^2+(m-\mathrm{i}\varepsilon)^2}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{-\mathrm{i}}{p^2+(m-\mathrm{i}\varepsilon)^2} + \frac{-\mathrm{i}}{q^2+(m-\mathrm{i}\varepsilon)^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.103}$$

式中下标 i 遍及 1 和 2，$k = p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$，$p = p_1 - p_1' = p_2' - p_2$ 和 $q = p_1 - p_2' = p_1' - p_2$.

反应 $1+2 \to 1'+2'$ 的微分截面仍由(5.94)给出.

费恩曼规则(5.88)和(5.100)—(5.102)可应用于任意次的费恩曼图. 顶角处的 4 动量是守恒的. 在高次图形中会有些圈图，图 5.6 是其一例. 这是一个散射过程 $1+2 \to 1'+2'$ 的 $O(f_0^2)$ 量级的图形.

图 5.6 圈图例

图 5.3 和图 5.5 中都不含有圈图，它们称为树图. 树图中，内线携带的动量均由外线动量决定. 但在圈图中，每个圈携带一个要对它进行积分的自由动量. 比如在图 5.6 中，4 动量 k 是一自由变量，它给出一个附加的因子：

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \tag{5.104}$$

在任一圈图中,对每一自由动量都有这样一个因子.

5.7 $1+2\to 1'+2'+\cdots+n'$的微分截面

1. 微分截面(5.94)式可推广到末态具有 n 体的情形:

$$1+2\to 1'+2'+\cdots+n'. \tag{5.105}$$

一如(5.86)式,将 $\mathfrak{M}$ 定义为

$$\langle 1', 2', \cdots n' \mid S \mid 1, 2\rangle = \frac{(2\pi)^4}{\Omega^{1+(n/2)}}\delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2\right)\mathfrak{M}, \tag{5.106}$$

式中 p_i 和 p_i'分别表示粒子 i 和 i'的 4 动量. 过程(5.105)仍可表示成许多费恩曼图之和. 利用完全相同的费恩曼规则(5.88)、(5.100)—(5.102)和(5.104),可得每一图形对 $\mathfrak{M}$ 的贡献. 根据自(5.90)至(5.93)式同样的考虑,可得

$$d\sigma = \sum \frac{(2\pi)^4}{\Omega^n v_1} \mid \mathfrak{M} \mid^2 \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2\right).$$

式中的求和遍及不同的 3 动量 $\boldsymbol{p}_1'$, $\boldsymbol{p}_2'$, $\cdots$, $\boldsymbol{p}_n'$. 当 $\Omega\to\infty$时,上述表式变成

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v_1}\left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^{n-1}\int \mid \mathfrak{M} \mid^2 \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2\right) \prod_{i=1}^{n} d^3 \boldsymbol{p}_i'. \tag{5.107}$$

式中所有的动量以及粒子 1 的速度 v_1 都是相对于粒子 2 的静止系中的动量和速度.

我们看到,对于内线来说,费恩曼规则(5.101)是洛伦兹不变的;同样对于顶角的规则(5.88)、(5.102)和圈图动量积分的定则(5.104)也一样. 但是对于外线的定则(5.100)则不然. 由此,为方便起见,可把 $\mathfrak{M}$ 中的外线因子分离出来. 引入

$$A \equiv (\sqrt{2})^{n+2}\sqrt{\omega_1'\cdots\omega_n'\omega_1\omega_2}\,\mathfrak{M}, \tag{5.108}$$

这在洛伦兹变换下是不变的.现在,微分截面(5.107)式可写成

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v_1}(\text{相空间})_n \cdot | A |^2 \frac{1}{4\omega_1\omega_2}, \tag{5.109}$$

其中

$$(\text{相空间})_n \equiv \left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^{n-1}\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i'}{2\omega_i'}\delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2\right) \tag{5.110}$$

是 n 体的洛伦兹不变的相空间.

有时选取质心系有便利之处.我们将证明,在质心系中反应(5.105)的微分截面为

$$d\sigma = \frac{2\pi}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^{n-1}\int |\mathfrak{M}^2|$$

$$\times \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2\right)\prod_{i=1}^{n} d^3 p_i', \tag{5.111}$$

式中$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$分别是初态粒子 1 和 2 的速度.[实际上,(5.111)对图 5.7 中所示的任何坐标系 Σ 来说都是成立的.]

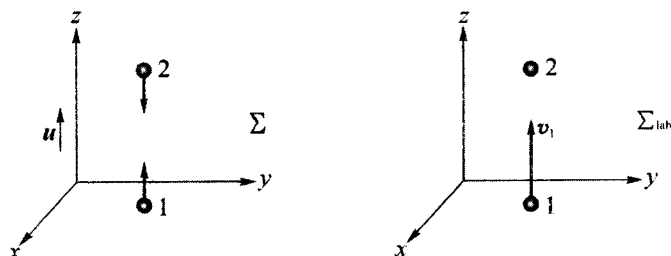


图 5.7 一个相对于坐标系 Σ_{lab} 以匀速 $u \parallel v_1$ 运动的坐标系 Σ

将其中粒子 2 为静止、粒子 1 具有速度$\boldsymbol{v}_1$的坐标系记为 Σ_{lab}. 考虑如图 5.7 所示的另一个相对于 Σ_{lab}以常速 $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}_1$运动的坐标系 Σ. 在 Σ_{lab}中选定 z 轴平行于$\boldsymbol{v}_1$;粒子 1 和 2 的 4 动量分别变为

$$p_1 = \omega_1(0,\ 0,\ v_1,\ i) \text{ 和 } p_2 = m(0,\ 0,\ 0,\ i).$$

令$(\omega_i)_\Sigma$是粒子i在Σ中的能量，根据洛伦兹变换，我们有

$$(\omega_1)_\Sigma = \frac{\omega_1 - uv_1\omega_1}{\sqrt{1-u^2}} \text{和} (\omega_2)_\Sigma = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}},$$

由此有

$$(\omega_1\omega_2)_\Sigma = \omega_1 m \frac{1-uv_1}{1-u^2} \tag{5.112}$$

在Σ中，粒子1、2的速度都和z轴平行，它们的分量分别为

$$(v_1)_\Sigma = \frac{v_1 - u}{1-uv_1} \text{和} (v_2)_\Sigma = -u.$$

由此，我们有

$$|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|_\Sigma = (v_1 - v_2)_\Sigma = v_1 \frac{1-u^2}{1-uv_1}. \tag{5.113}$$

此后，凡ω_1和v_1如不标明下标Σ的都表示是粒子1在Σ_{lab}系中的能量和速度.联合(5.112)和(5.113)得到

$$(\omega_1\omega_2 \mid \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \mid)_\Sigma = \omega_1 m v_1. \tag{5.114}$$

其次注意到在Σ_{lab}中，由于$\omega_2 = m$，故(5.109)可写成

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v_1}(\text{相空间})_n \mid A \mid^2 \frac{1}{4\omega_1 m}. \tag{5.115}$$

由于A和(相空间)$_n$都是洛伦兹不变的，故利用(5.114)我们可导得对任意运动坐标系Σ中的表示式(5.111)，因此对于$\Sigma_{c.m.}$也得到(5.111).

2. $d\sigma$的从Σ_{lab}中的(5.107)式至Σ中的(5.111)式的过渡是普遍的，对任意自旋的粒子都成立.因此给它换一种形式的证明或许是有用的.

令ρ_1和ρ_2是初态粒子1和2在任意坐标系中的数密度，Ω是系统的体积，而T是总的时间间隔.引入反应率是很方便的，它由下式定义

$$(\rho_1\rho_2 R)_\Sigma = (\text{反应的总数}/\Omega T)_\Sigma.$$

由于 ΩT 是四维体积，它和反应总数一样是洛伦兹不变的，因此左端也是洛伦兹不变的，即

$$(\rho_1\rho_2R)_\Sigma = (\rho_1\rho_2R)_{\Sigma'}, \tag{5.116}$$

式中 Σ' 表示另一任意参考系. 在任意参考系 Σ 中，对于 $\rho_1 = \rho_2 = \dfrac{1}{\Omega}$ 时，在 ΩT 内的反应总数由(5.92)给出，只是现在左矢为 $\langle 1', 2', \cdots, n' |$. 故当 $\Omega \to \infty$ 和 $T \to \infty$ 的极限下，有

$$R_\Sigma = \sum \frac{\Omega}{T} | \langle 1', 2', \cdots, n' | S | 1, 2 \rangle |^2,$$

其中求和遍及所有终态的 3 动量. 令 $\mathfrak{M}$ 是由(5.106)与 S 矩阵元相联系的量，上式变为

$$R_\Sigma = \sum \frac{(2\pi)^4}{\Omega^n}\delta^4\left(\sum_{i=1}^n p'_i - p_1 - p_2\right) | \mathfrak{M} |^2.$$

由于(2.28)式，此式可写成

$$R_\Sigma = \frac{2\pi}{(8\pi^3)^{n-1}}\int \prod_{i=1}^n \mathrm{d}^3 p'_i | \mathfrak{M} |^2 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p'_i - p_1 - p_2\right). \tag{5.117}$$

式中所有的动量都在同一坐标系 Σ 中计算. 现在考虑到(5.91)式，在实验室系中有

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{R}{v_1}\right)_{\Sigma_{\mathrm{lab}}}, \tag{5.118}$$

这可给出(5.107)式.

令 j_1 和 j_2 分别是粒子 1 和粒子 2 的四维流. 由于粒子 2 在 Σ_{lab} 中是静止的，它们由下式给出：

$$(j_1)_{\Sigma_{\mathrm{lab}}} = \rho_1(\boldsymbol{v}_1, \mathrm{i})$$

和

$$(j_2)_{\Sigma_{\mathrm{lab}}} = \rho_2(0, \mathrm{i}).$$

考虑一相对于 Σ_{lab} 作恒定速度 $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}_1$ 运动的参考系 Σ. 由于洛伦兹变换，在 Σ 系和 Σ_{lab} 系中粒子 1 和 2 的数密度由

$$(\rho_1)_\Sigma = \frac{1-uv_1}{\sqrt{1-u^2}}(\rho_1)_{\Sigma\,\text{lab}}$$

和

$$(\rho_2)_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(\rho_2)_{\Sigma_\text{lab}}.$$

联系.因此

$$(\rho_1\rho_2)_\Sigma = \frac{1-uv_1}{1-u^2}(\rho_1\rho_2)_{\Sigma_\text{lab}}.$$

利用(5.113),可见

$$(\rho_1\rho_2\ |\ \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|)_\Sigma = (\rho_1\rho_2 v_1)_{\Sigma_\text{lab}}.$$

此式和(5.116)及(5.118)一起,给出

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{R}{v_1}\right)_{\Sigma_\text{lab}} = \left(\frac{R}{|\ \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}\right)_\Sigma. \tag{5.119}$$

由于(5.117),则马上可得 $\mathrm{d}\sigma$ 的表式(5.111).

习题 5.1. 令零自旋场

$$\phi(\boldsymbol{r},\ t) = \sum_{\boldsymbol{k}}(2\omega\Omega)^{-\frac{1}{2}}(a_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_k^\dagger(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$$

的总哈密顿量为

$$H = H_0 + \int J(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}^3 r, \tag{5.120}$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{2}\int :(\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2):\mathrm{d}^3 r, \tag{5.121}$$

$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$, $J(\boldsymbol{r}) = J(\boldsymbol{r})^*$ 是与时间无关的c数函数,而$\Pi(\boldsymbol{r},\ t)$是$\phi(\boldsymbol{r},\ t)$的共轭动量,

$$[\Pi(\boldsymbol{r},\ t),\ \phi(\boldsymbol{r}',\ t)] = -\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

(i) 试证

$$SHS^\dagger = H_0 + \Omega\lambda_J,$$

式中 S 是由下式给定的幺正矩阵：

$$S = \exp \sum_k (-a_k j_k^* + a_k^\dagger j_k)(2\omega^3)^{-\frac{1}{2}},$$

$$j_k = \int \Omega^{-\frac{1}{2}} J(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

和

$$\lambda_J = -\int (16\pi^3\omega^2)^{-1} \mid j_k \mid^2 \mathrm{d}^3 k.$$

[注意：对其对易子 $[A, B]$ 为 c 数的任意二算符 A、B，$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A, B]}$]. 由此，$H_0$ 的本征态

$$\mid n_k \rangle_0 \equiv \prod_k (n_k!)^{-\frac{1}{2}} (a_k^\dagger)^{n_k} \mid \mathrm{vac} \rangle_0 \quad (n_k = 0, 1, 2, \cdots)$$

和 H 的相应本征态 $|n_k\rangle$ 由 $|n_k\rangle = S^\dagger |n_k\rangle_0$ 相联系. 这里

$$H \mid n_k \rangle = \left(\sum_k n_k \omega + \Omega \lambda_J \right) \mid n_k \rangle.$$

新的真空态 $|\mathrm{vac}\rangle$ 满足 $H \mid \mathrm{vac} \rangle = \Omega \lambda_J \mid \mathrm{vac} \rangle$.

(ii) 将 $\Omega\lambda_J$ 看成 $J(\boldsymbol{r})$ 的泛函，试证变分导数为

$$\frac{\delta\lambda_J}{\delta J(\boldsymbol{r})} \equiv \bar{\phi}(\boldsymbol{r}) = -\sum_k \frac{1}{2\omega^2 \Omega^{\frac{1}{2}}} (j_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + j_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}).$$

此外，$\bar{\phi}(\boldsymbol{r})$ 是 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ 的真空期待值：

$$\bar{\phi}(\boldsymbol{r}) = \langle 0 \mid \phi(\boldsymbol{r}, t) \mid 0 \rangle.$$

注意，由于假定 $J(\boldsymbol{r})$ 与 t 无关，因此 $\bar{\phi}(\boldsymbol{r})$ 也与 t 无关.

(iii) 试证

$$\varepsilon(\bar{\phi}) \equiv \Omega\lambda_J - \int J(\boldsymbol{r}) \bar{\phi}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}$$

是受有约束条件

$$\langle \mid \phi(\boldsymbol{r}, t) \mid \rangle = \bar{\phi}(\boldsymbol{r})$$

下的态 $|\rangle$ 中 $\langle | H_0 | \rangle$ 的极小值.

习题 5.2.　将

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

代替习题 5.1 中的(5.120). 其中 H_0 仍是(5.121)式中的 H_0,但

$$H_{\text{int}} = \int\left(J\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)\mathrm{d}^3 r.$$

像上面一样,这里的 $J(\boldsymbol{r}) = J(\boldsymbol{r})^*$ 是个 c 数函数. 可将 H_{int}看成相互作用哈密顿量. 在相互作用表象中,传播子 p 是 $-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 - \mu^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}$,这里 $\varepsilon = 0_+$, 而顶角 $= -\mathrm{i}m^2$, k $= -\mathrm{i}j_k$ 和 k $= -\mathrm{i}j_k^*$,这里的箭头表明动量的方向,动量的第四分量为零,因为这里假设了 c 数函数$J(\boldsymbol{r})$是和时间无关的. 将所有的图形相加后,整个传播子为

$$D_F(p) \equiv \ p \ + \ p \ p \ + \ p \ \ p \ + \cdots$$

$$= -\mathrm{i}(\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + \mu^2 + m^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1},$$

而新的真空态的能量为 $\Omega(\Lambda_J + \Delta)$,其中

$$-\mathrm{i}\Lambda_J = \ + \ + \ + \cdots$$

$$= \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\int[8\pi^3(\boldsymbol{k}^2 + \mu^2 + m^2)]^{-1}\ |\,j_k\,|^2\mathrm{d}^3 k$$

和

$$-\mathrm{i}\Delta = \ + \ + \ + \cdots$$

$$= -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\int(8\pi^3)^{-1}[(\boldsymbol{k}^2 + \mu^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - (\boldsymbol{k}^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}^3 k.$$

注意, , , 等图形都有一个对称数 * 因子$\frac{1}{2}$.

习题 5.3.　(i) 考虑算符

$$J_\mu \equiv : \mathrm{i}\psi_b^\dagger\gamma_4\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma_5)\psi_a : \tag{5.122}$$

---

* 对称数的定义见 19.4 节. 注意,每条厄米玻色子线是没有箭头的[与此相反,对带电的(复数)场则带有指向电荷流向的箭头,还可参见 19.6 节和 81 页]

的矩阵元

$$\langle J_\mu \rangle \equiv \langle b \mid J_\mu \mid a \rangle, \tag{5.123}$$

式中 ψ_a 和 ψ_b 都是自旋为$\frac{1}{2}$的量子场. C_V 和 C_A 是常数,$|a\rangle$是螺旋性为 S_a、质量为 m_a、4 动量为 a_μ 的自由粒子 a 的态,$|b\rangle$是螺旋性为 S_b、质量为 m_b、4 动量为 b_μ 的自由粒子 b 的态.

$$T_{\mu\nu} \equiv \pm \sum_{s_a, s_b} \langle J_\mu \rangle \langle J_\nu \rangle^* \tag{5.124}$$

式中的符号:对 $\nu \neq 4$ 时取+号,对 $\nu = 4$ 时取一号. 利用 3.4 节中的练习,并设 $\Omega = 1$, 证明

$$\begin{aligned} a_0 b_0 T_{\mu\nu} = & (\mid C_V \mid^2 + \mid C_A \mid^2)(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu - \delta_{\mu\nu} a \cdot b) \\ & + (C_V^* C_A + C_A^* C_V) \epsilon_{\mu\nu\lambda\delta} a_\lambda b_\delta \\ & - m_a m_b (\mid C_V \mid^2 - \mid C_A \mid^2) \delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.125}$$

其中 $a_0 = (\boldsymbol{a}^2 + m_a^2)^{\frac{1}{2}}$, $b_0 = (\boldsymbol{b}^2 + m_b)^{\frac{1}{2}}$; 若 $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 1$, 若 $\mu \neq \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$; 而 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = 1$ 或 -1 则取决于 $\mu\nu\lambda\delta$ 是 1234 的偶置换或奇置换而定,其余情形则=0.

(ii) 试证若(5.123)式换成

$$\langle J_\mu \rangle = \langle \bar{a} \mid J_\mu \mid \bar{b} \rangle,$$

则(5.125)仍成立. 这里$|\bar{a}\rangle$是 4 动量为 a_μ 的自由粒子 $\bar{\text{a}}$ 的态,$|\bar{b}\rangle$是 4 动量为 b_μ 的自由粒子 $\bar{\text{b}}$ 的态.

(iii) 若(5.123)式换成

$$\langle J_\mu \rangle = \langle 0 \mid J_\mu \mid a\bar{b} \rangle \text{ 或} \langle \bar{a} b \mid J_\mu \mid 0 \rangle,$$

则(5.124)式所定义的 $T_{\mu\nu}$ 仍由(5.125)表示,只需将右端作下列替换

$$-m_a m_b \to + m_a m_b.$$

这里,$|a\bar{b}\rangle$或$|\bar{a}b\rangle$是 4 动量为 a_μ 的自由粒子 a(或 $\bar{\text{a}}$)和 4 动量为 b_μ 的自由粒子 $\bar{\text{b}}$(或 b)在一起的态.

习题 5.4. 对于

$$\nu_l + \mathrm{a} \rightarrow l^- + \mathrm{b} \tag{5.126}$$

和

$$\bar{\nu}_l + \mathrm{b} \rightarrow l^+ + \mathrm{a} \tag{5.127}$$

的弱作用拉氏量,可唯象地写成

$$\mathscr{L} = 2^{-\frac{1}{2}}[j_\mu J_\mu + j_\mu^\dagger J_\mu^\dagger].$$

这里 a 和 b 是某种自旋为$\frac{1}{2}$的强子,$l^\pm$ 表示带电轻子 $e^\pm$ 或 $\mu^\pm$,

$$j_\mu = \mathrm{i}\psi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}$$

和

$$J_\mu = \mathrm{i}\psi_b^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (C_V + C_A\gamma_5)\psi_a.$$

忽略 a 和 b 的强相互作用,假设强子的质量 $m_a = m_b = m$,令轻子质量 $m_l = 0$,试证对于 C_V 和 C_A 的最低级近似,反应(5.126)和(5.127)的微分截面分别为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\nu}{\mathrm{d}y} = \frac{mE_\nu}{2\pi}\Big[|C_V + C_A|^2 + |C_V - C_A|^2(1-y)^2 + (|C_A|^2 - |C_V|^2)\frac{m}{E_\nu}y\Big] \tag{5.128}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}y} = \frac{mE_\nu}{2\pi}\Big[|C_V - C_A|^2 + |C_V + C_A|^2(1-y)^2 + (|C_A|^2 - |C_V|^2)\frac{m}{E_\nu}y\Big],$$

式中

$$y \equiv \frac{E_\nu - E_l}{E_\nu},$$

E_ν 和 E_l 分别是实验室系(亦即初态强子的静止系)中的中微子和 $l^\pm$ 的能量.

注意,在任意坐标系中,对于反应(5.126),$y = \frac{q \cdot a}{k \cdot a}$;对于反应

(5. 127), $y=\dfrac{q\cdot b}{k\cdot b}$, 这里 $q_\mu \equiv k_\mu - k'_\mu$. k_μ、k'_μ、a_μ 和 b_μ 分别是中微子、$l^\pm$、a 和 b 的 4 动量. y 的变化范围是从 0 到 1. 详细讨论见第 21 和 23 章.

参考文献

Dycon F. *Phys Rev*, 1949, **75**:486.

Feynman R P, Hibbs A R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill, 1965.

Wick G C. *Phys Rev*, 1950, **80**:268.

对于费恩曼发明费恩曼图时原来所用的方法,即路径积分法可参见第 19 章.

第6章　量子电动力学

量子电动力学考虑光子、电子和正电子间的电磁相互作用. 如果我们愿意,也可以将别的带电轻子,如 $\mu^{\pm}$ 和 $\tau^{\pm}$ 包括进来. 因为光子的自旋为1,质量为零,因此这也可作为如何处理一个 $m = 0$ 极限情况下矢量场的例子.

6.1　拉格朗日量

令 ψ 是电子场,A_μ 是电磁 4 势,$F_{\mu\nu}$ 是电磁场张量,它和 A_μ 由下式相联系:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu. \tag{6.1}$$

量子电动力学中的拉氏密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_\gamma + \mathscr{L}_{int}, \tag{6.2}$$

式中

$$\mathscr{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2), \tag{6.3}$$

$$\mathscr{L}_e = -\psi^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi, \tag{6.4}$$

而

$$\mathscr{L}_{int} = e j_\mu A_\mu + \psi^\dagger \gamma_4 \psi \delta m. \tag{6.5}$$

(6.3)式中 $\boldsymbol{E}$ 是电场,$\boldsymbol{B}$ 是磁场,和 $A_\mu(\boldsymbol{A},\ \mathrm{i}A_0)$ 的联系为

$$\boldsymbol{E} \equiv -\nabla A_0 - \dot{\boldsymbol{A}},\ \boldsymbol{B} \equiv \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{6.6}$$

(6.5)式中,电磁流为

$$j_{\mu} \equiv \mathrm{i}\psi^{\dagger}\gamma_4\gamma_{\mu}\psi, \tag{6.7}$$

e 是未重正化的电荷,δm 定义为物理质量和力学质量 m_0 之差:

$$\delta m = m - m_0. \tag{6.8}$$

由变分原理(2.10),可得 A_{μ} 和 ψ 的运动方程:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}F_{\mu\nu} = -ej_{\nu} \tag{6.9}$$

和

$$\gamma_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \mathrm{i}eA_{\mu}\right)\psi + m_0\psi = 0. \tag{6.10}$$

6.2　库仑规范

拉氏密度在规范变换

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu}} \tag{6.11}$$

和

$$\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\theta}\psi \tag{6.12}$$

下是不变的. 选择适当的函数 θ,可使 $\boldsymbol{A}$ 满足横向条件:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{tr}},\ 即\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0. \tag{6.13}$$

这一特殊选择称之为库仑规范. 由于理论是规范不变的,因此选择任意规范都应得到相同的物理结果. 然而我们将会看到,为了进行量子化选择库仑规范是特别方便的. 由于拉氏密度(6.2)不含 $\dot{A}_0$,我们将一如第4章那样将 A_0 看成是不独立变化的. 当 $\nu = 4$ 时,(6.9)变得很简单:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = e\rho, \tag{6.14}$$

这里 $j_4 = \mathrm{i}\rho = \mathrm{i}\psi^{\dagger}\psi$. 由于(6.6)和(6.13),上一方程可写成

$$\nabla^2 A_0 = -e\rho. \tag{6.15}$$

在库仑规范中,我们将 A_0 看成 $\psi^\dagger\psi$ 的泛函,由拉普拉斯方程的解

$$A_0(\boldsymbol{r},\ t) \equiv \int \frac{e\rho(\boldsymbol{r}',\ t)}{4\pi\ |\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ |} \mathrm{d}^3 r' \tag{6.16}$$

给出.

在(6.6)式中,可将电场分解成两项:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{l}}. \tag{6.17}$$

其中横向分量为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}} = -\boldsymbol{A}, \tag{6.18}$$

纵向分量为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{l}} = -\nabla A_0. \tag{6.19}$$

显然 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{l}}$ 是无旋的,而由于(6.13)式 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}}$的散度为零. 通过分部积分,下面的体积积分可化为 0:

$$\int \boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}} \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{l}} \mathrm{d}^3 r = \int \dot{\boldsymbol{A}} \cdot \nabla A_0 \mathrm{d}^3 r = 0.$$

由此可将(6.3)式中的拉氏密度 $\mathscr{L}_\gamma$ 用

$$\mathscr{L}_\gamma = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}})^2 + (\boldsymbol{E}^{\mathrm{l}})^2 - \boldsymbol{B}^2], \tag{6.20}$$

代替而不改变总拉氏量 $L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}^3 r$. 电磁势 $\boldsymbol{A}$ 的共轭动量 $\boldsymbol{\Pi}$ 为

$$\boldsymbol{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{A}}} = -\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}}, \tag{6.21}$$

电场的共轭动量为

$$\mathscr{P} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{i}\psi^\dagger. \tag{6.22}$$

按通常的正则化方法,可得哈密顿量密度为

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\gamma + \mathscr{H}_e + \mathscr{H}_{\mathrm{int}}, \tag{6.23}$$

式中

$$\mathscr{H}_\gamma = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}})^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2, \tag{6.24}$$

$$\mathscr{H}_e = \psi^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi, \tag{6.25}$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}} = -\psi^\dagger\beta\psi\cdot\delta m - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{l}})^2 - ej_\mu A_\mu. \tag{6.26}$$

将 $\mathscr{H}_{\mathrm{int}}$ 中相应于电荷密度之间的库仑相互作用分离出来是有好处的. 定义

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Coul}} \equiv -\frac{1}{2}(E^{\mathrm{l}})^2 + e\rho A_0.$$

由于(6.15)—(6.16)和(6.19), $\mathscr{H}_{\mathrm{Coul}}$ 的空间积分为

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Coul}} &= \int \mathscr{H}_{\mathrm{Coul}}\,\mathrm{d}^3 r = \int\left(\frac{1}{2}A_0\,\nabla^2 A_0 + e\rho A_0\right)\mathrm{d}^3 r \\ &= \frac{1}{2}\int e\rho A_0\,\mathrm{d}^3 r \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^2\rho(\boldsymbol{r},\,t)\rho(\boldsymbol{r}',\,t)}{4\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}^3 r\mathrm{d}^3 r'. \end{aligned} \tag{6.27}$$

从而相互作用哈密顿量由下式给出:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{int}} &= \int \mathscr{H}_{\mathrm{int}}\,\mathrm{d}^3 r \\ &= -\int \psi^\dagger\beta\psi\cdot\delta m\,\mathrm{d}^3 r + H_{\mathrm{Coul}} - e\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}^3 r. \end{aligned} \tag{6.28}$$

总哈密顿量 H 由(6.23)式的空间积分给出. 在 H 中,广义坐标是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{tr}}$ 和 ψ;广义动量是 $\boldsymbol{\Pi} = -\boldsymbol{E}^{\mathrm{tr}}$ 和 $\mathscr{P} = \mathrm{i}\psi^\dagger$.

6.3　量子化

在库仑规范下的量子化步骤可以直截了当的方式进行. 由于横向条件(6.13), $\boldsymbol{\Pi}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的等时对易子为

$$[\Pi_i(\boldsymbol{r},t),\ A_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}(\delta_{ij}-\nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{6.29}$$

式中因子 $(\delta_{ij}-\nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)$ 保证右端满足散度为零的约束：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \quad 和 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=0.\tag{6.30}$$

电子场 ψ 及其厄米共轭 $\psi^\dagger$ 之间，有通常的等时反对易子：

$$\{\psi(\boldsymbol{r},t),\ \psi^\dagger(\boldsymbol{r}',t)\} = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\tag{6.31}$$

同样地，在不同空间位置，ψ 之间（$\psi^\dagger$ 之间）的等时反对易子为零，其他场算符间的等时反对易子也为零.

对任意给定时刻 t，可将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)$ 用傅里叶级数展开：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}[\boldsymbol{a}_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\text{h.c.}],\tag{6.32}$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{E}=\sum_k\sqrt{\frac{\omega}{2\Omega}}[-\mathrm{i}\boldsymbol{a}_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\text{h.c.}],\tag{6.33}$$

其中 $\omega=|\boldsymbol{k}|$. 由于(6.30)，$\boldsymbol{a}_k$ 等满足

$$\boldsymbol{a}_k(t)\cdot\boldsymbol{k}=0.\tag{6.34}$$

展开式(6.32)和(6.33)在任意表象中均成立. 在相互作用表象中，$\boldsymbol{a}_k$ 等具有如自由场中那样的时间依赖关系. 我们有

$$\boldsymbol{a}_k(t)\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.\tag{6.35}$$

一如在第 4 章中那样，对任意给定的 $\boldsymbol{k}$，可引入一组三个相互正交的单位矢量 $\hat{k}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$，$\hat{e}_1$ 和 $\hat{e}_2$：

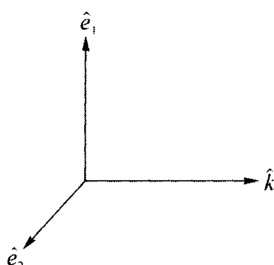


图 6.1　三个正交的右手矢量组

定义

$$a^\dagger_{k,\,s=\pm1}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}^\dagger_k\cdot(\hat{e}_1\pm\mathrm{i}\hat{e}_2)\tag{6.36}$$

和它的厄米共轭

$$a_{k,\,s=\pm1}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_k\cdot(\hat{e}_1\mp\mathrm{i}\hat{e}_2),\tag{6.37}$$

将给我们带来方便，从(6.29)和

$$[A_i(\boldsymbol{r},t),\ A_j(\boldsymbol{r}',t)] = [\Pi_i(\boldsymbol{r},t),\ \Pi_j(\boldsymbol{r}',t)] = 0,$$

可以立刻验明有

$$[a_{\boldsymbol{k},s}(t),\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',s'}(t)] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{ss'} \tag{6.38}$$

和

$$[a_{\boldsymbol{k},s}(t),\ a_{\boldsymbol{k}',s'}(t)] = 0. \tag{6.39}$$

式中 s 和 s' 可为+1 或-1. 我们还可验明下标 s 表示光子的螺旋性(=沿其运动方向的自旋分量). 由此,$a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}$ 是动量为 $\boldsymbol{k}$、螺旋性为 s 的光子的产生算符;其厄米共轭 $a_{\boldsymbol{k},s}$ 是相应的湮没算符.

S 矩阵可按第 5 章中所说的步骤推导出来. (5.70)式给出微扰级数,其中相互作用哈密顿量是 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 正规乘积的积分:

$$H_{\text{int}} = \int :\mathscr{H}_{\text{int}}:\ \mathrm{d}^3 r \tag{6.40}$$

式中 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 由(6.26)给出. 同样地,未微扰哈密顿量为

$$H_0 = \int :\mathscr{H}_{\gamma} + \mathscr{H}_{\mathrm{e}}:\ \mathrm{d}^3 r, \tag{6.41}$$

式中 $\mathscr{H}_{\gamma}$ 和 $\mathscr{H}_{\mathrm{e}}$ 由(6.24)和(6.25)给出.

6.4 光子的传播子和相对论不变性

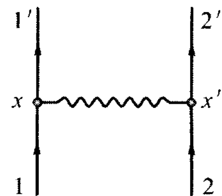


图 6.2 过程 1+2→1′+2′的一个图形

库仑规范中虽然量子化很容易进行,但是 QED 的洛伦兹不变性不明显. 不过可以利用费恩曼图来证明这种不变性. 考虑图 6.2 中所示的图形. 这个图形的振幅由两项组成. 第一项由下式贡献:

$$-\mathrm{i}\int H_{\text{Coul}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int \frac{e^2}{4\pi}\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \frac{e^2}{4\pi}j_4(x)j_4(x')\,\frac{\delta(t-t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x', \tag{6.42}$$

式中 $j_4 = \mathrm{i}\rho$. 第二项由下式贡献：

$$\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int T(e^2 \boldsymbol{j}(x)\cdot \underbrace{\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{j}(x')\cdot \boldsymbol{A}}(x'))\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x', \tag{6.43}$$

式中 T 表示编时乘积. 它们的和为

$$\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int e^2 T(j_\mu(x)D_{\mu\nu}^{\mathrm{Coul}}(x-x')j_\nu(x'))\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x', \tag{6.44}$$

式中 $D_{\mu\nu}^{\mathrm{Coul}}(x-x')$ 是库仑规范中光子的传播子：

$$x \sim\!\sim\!\sim x' = D_{\mu\nu}^{\mathrm{Coul}}(x-x')$$

$$= \begin{cases} D_{ij}^{\mathrm{tr}}(x-x') = \underbrace{A_i(x)A_j}(x'), \\ \qquad \text{若 } \mu = i \neq 4 \\ \qquad \text{和 } \nu = j \neq 4, \\ \dfrac{-\mathrm{i}\delta(t-t')}{4\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|} \ \text{若 } \mu=\nu=4, \\ 0. \qquad \text{其他情形} \end{cases} \tag{6.45}$$

因为 $A_i = A_i^{\mathrm{tr}}$，因此在上式中当 $\mu = i \neq 4$ 和 $\nu = j \neq 4$ 时，光子的传播子由下式给出：

$$D_{ij}^{\mathrm{tr}}(x) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \tag{6.46}$$

式中因子 $\left(\delta_{ij} - \dfrac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)$ 和(6.29)中的因子 $(\delta_{ij} - \nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)$ 来源相同，故 $\nabla_i D_{ij}^{\mathrm{tr}}(x) = 0$. 和以前一样

$$\varepsilon = 0_+,\ k^2 = \boldsymbol{k}^2 - k_0^2.$$

注意到

$$\frac{1}{8\pi^3}\int \frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k = \frac{2\pi}{8\pi^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{d}k\mathrm{d}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k = \frac{1}{4\pi r},$$

故在动量表象中,光子的传播子变成

$$D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(k)=\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\left(\delta_{ij}-\dfrac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right) & \text{若 } \mu=i\neq 4 \text{ 和 } \nu=j\neq 4,\\ -\dfrac{\mathrm{i}}{\boldsymbol{k}^2} & \text{若 } \mu=\nu=4,\\ 0 & \text{其他情形},\end{cases}\tag{6.47}$$

这里的

$$D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(k)\equiv\int D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{d}^4x.$$

根据(6.44),图 6.2 中的费恩曼图的振幅为

$$\frac{1}{2!}(-\mathrm{i}e)^2\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'[\langle 1'\mid j_\mu(x)\mid 1\rangle D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(x-x')\langle 2'\mid j_\mu(x')\mid 2\rangle$$
$$+\text{相同项,但 } x \text{ 与 } x' \text{ 互换}].\tag{6.48}$$

令 p_i 和 p_i' 分别为粒子 i 和 i'的 4 动量,则矩阵元$\langle 1'|j_\mu(x)|1\rangle$正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p_1')\cdot x}$;同样,$\langle 2'\mid j_\mu(x)\mid 2\rangle$ 正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2-p_2')\cdot x'}$. 故可写

$$\langle 1'\mid j_\mu(x)\mid 1\rangle\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p_1')\cdot x}a_\mu$$
和
$$\langle 2'\mid j_\mu(x')\mid 2\rangle\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2-p_2')\cdot x'}b_\mu,\tag{6.49}$$

式中 a_μ 和 b_μ 与 x 和 x'无关. 由于动量守恒,有

$$k\equiv p_1-p_1'=-p_2+p_2'.\tag{6.50}$$

还由于流守恒,有

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu}=0,$$

考虑到(6.49)—(6.50),此式导致

$$k_\mu a_\mu=k_\nu b_\nu=0.\tag{6.51}$$

转换到动量空间时,我们可将图 6.2 重新表记如图 6.3.

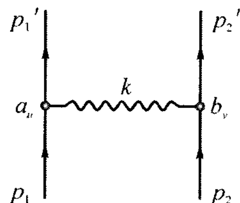


图 6.3　动量空间中过程 $1+2\to 1'+2'$的图

由于(6.47),它的振幅正比于

$$a_\mu D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(k)b_\nu = -\mathrm{i}\left[\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{k}^2}\right)-\frac{a_0b_0}{\boldsymbol{k}^2}\right], \quad (6.52)$$

式中 $a_\mu = (\boldsymbol{a},\ \mathrm{i}a_0)$, $b_\mu = (\boldsymbol{b},\ \mathrm{i}b_0)$, 并且和以前一样 $k^2 = \boldsymbol{k}^2 - k_0^2$. 为简单计,我们在$\frac{1}{k^2}$的分母中略去了$-\mathrm{i}\epsilon$. 根据(6.51),有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a} = k_0a_0$ 和 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b} = k_0b_0$, 振幅(6.52)式变为

$$-\mathrm{i}\left[\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{k^2}-\frac{a_0b_0}{\boldsymbol{k}^2}\left(\frac{k_0^2}{k^2}+1\right)\right]=\frac{-\mathrm{i}}{k^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a_0b_0).$$

因此我们可以将非协变的库仑传播子 $D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}$用协变的传播子 $D_{\mu\nu}$来替换:

$$a_\mu D_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(k)b_\nu = a_\mu D_{\mu\nu}(k)b_\nu, \quad (6.53)$$

式中

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\left[\delta_{\mu\nu}+\lambda\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \quad (6.54)$$

由于(6.51)式,费恩曼振幅(6.53)式和参数 λ 无关,因此 λ 的选择是任意的. 当 $\lambda = 0$ 时,称为费恩曼规范;当 $\lambda = -1$ 时,称为朗道规范.

可以证明,这种替换对所有费恩曼图形都是适用的,从而确立了理论的洛伦兹不变性.

6.5 说明

由于电子偶素态都是不稳定的,因此量子电动力学是一个其中不存在稳定束缚态的例子. 所以,用(6.23)—(6.25)的记号来表示,总哈密顿量

$$H = \int :\mathscr{H}_\gamma + \mathscr{H}_e + \mathscr{H}_{\text{int}}: \mathrm{d}^3 r$$

和

$$H_0 = \int :\mathscr{H}_\gamma + \mathscr{H}_e: \mathrm{d}^3 r \quad (6.55)$$

的谱是相同的,只要 H_0 中的质量 m 是电子的物理质量. 自由哈密顿量的本征态$|n\rangle$

$$H_0 \mid n\rangle = E_n \mid n\rangle,$$

可写成

$$\mid n\rangle = \Pi a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_i,s_i} b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_j,s_j} a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_k,s_k} \mid 0\rangle, \tag{6.56}$$

式中 $a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_i,s_i}$、$b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_j,s_j}$ 和 $a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_k,s_k}$ 分别为电子、正电子和光子的产生算符. 态 $|0\rangle$ 是 H_0 的真空态,

$$H_0 \mid 0\rangle = 0. \tag{6.57}$$

令 $U(t, t_0)$是(5.20)—(5.21)的解. 引入

$$\mid n^{\text{in}}\rangle \equiv U(t, -\infty) \mid n\rangle \tag{6.58}$$

和

$$\mid n^{\text{f}}\rangle \equiv U^{\dagger}(\infty, t) \mid n\rangle \tag{6.59}$$

很是方便的. 式中 t 可以是任意有限的时间,上指标"in"和"f"分别表示初态和末态. 可以证明 * ,这两种态都是总哈密顿量的本征态,亦即

$$H \mid n^{\text{in}}\rangle = E_n \mid n^{\text{in}}\rangle \tag{6.60}$$

和

$$H \mid n^{\text{f}}\rangle = E_n \mid n^{\text{f}}\rangle. \tag{6.61}$$

对于一个多粒子态, $|n^{\text{in}}\rangle$ 代表由(6.56)式描述的平面波加上由于相互作用引起的**出射波**. 图6.4中说明这一情况,其中自由态 $|n\rangle$ 由二粒子1和2组成. 通过从 $-\infty$ 至 t 的时间间隔,这两个粒子连续地相互作用导致 $U(t, -\infty)|n\rangle$ 的出射波分量. 用类似的方式,考虑从 t 至 $+\infty$ 的时间演化,可以证明 $|n^{\text{f}}\rangle$ 代表平面波的迭加加上**入射波**. 两个"自由粒子"态 $|n\rangle$ 和 $|n'\rangle$ 之间的 S 矩阵是

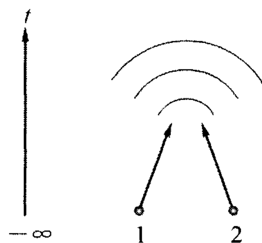


图 6.4 从时刻为 $-\infty$ 的二自由粒子态演化至 t 时刻的出射波

---

* 例如见 Schweber S S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. New York: Row, Peterson and Co, 1961, 320—25, *and* Lee T D, Nauenberg M. *Phys Rev*, 1964, **133** B:1549, Appendix A.

$$\langle n' \mid S \mid n \rangle = \langle n' \mid U(\infty, -\infty) \mid n \rangle.$$

式中$|n\rangle$和$|n'\rangle$都是(6.56)的形式.由于(6.58)—(6.59)的关系,S矩阵元还可以写成

$$\langle n' \mid S \mid n \rangle = \langle n'^{f} \mid n^{in} \rangle. \tag{6.62}$$

由于每个集合$\{|n^{in}\rangle\}$和$\{|n^{f}\rangle\}$都是希尔伯特空间中基矢的正交全集,因此S矩阵就是这两个集合之间的幺正变换.对任一散射过程

$$1 + 2 \longrightarrow 1' + 2' + \cdots$$

来说,状态$|n^{in}\rangle$的平面波部分是和初态粒子$1+2$相联系的,而状态$|n^{f}\rangle$的平面波部分则和末态粒子$1'+2'+\cdots$相联系.

习题 6.1. 证明过程$e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$准至α^2量级的微分截面和总截面为

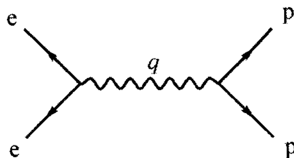
$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi\alpha^2 v(2 - v^2 \sin^2\theta) \frac{d\cos\theta}{4E^2}$$

和$\sigma = \frac{1}{2}\pi\alpha^2 v\left(1 - \frac{1}{3}v^2\right)\Big/E^2$,这里$2E$、$v$和$\theta$分别为总能量、$\mu$子速度和质心系中$e^-$与$\mu^-$动量间的夹角,$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.为简单计,电子质量设为0.

习题 6.2. 证明过程$e^- + p \to e^- + p$在$m_e = 0$的近似下并忽略质子的强相互作用时准至α^2量级的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{q^2}\right)^2\left[1 - \frac{q^2}{q^2_{max}} + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2m_p E}\right)^2\right],$$

式中m_p是质子质量,E是初态质子的静止系(实验室系)中初态e^-的能量,q^2是e^-与p之间的(4动量转移)^2:



由此，$q^2 = \boldsymbol{q}^2 - q_0^2$ 可以从 0 变到

$$q_{\max}^2 = \frac{2m_p E}{\left(1 + \frac{m_p}{2E}\right)}.$$

参考文献

Bjorken J, Drell S D. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1964.

Feynman R. *Quantum Electrodynamics*. New York: W A Benjamin, 1962.

Wentzel G. *Quantum Theory of Fields*. New York: Interscience Publishers, Inc, 1949.

第7章 孤 立 子

人们通常对于束缚态的描写，如果是非相对论性的情形，则用薛定谔方程；如果是相对论性的情形，则用其推广，即贝特-萨佩特（Bethe-Salpeter）方程. 在原子和分子的场合下，这种描写方法是非常成功的；对于核结构也相当合适. 在这些描写当中，普朗克常量起着重要的作用. 这些束缚态只在量子力学中才存在. 在物质与电磁场相耦合的情形下，经典物理要提供一个能防止辐射而保持稳定的原子是完全不可能的. 正是这一失败才导致量子力学的发现. 从此以后，人们通常认为在相对论性理论中，为了使稳定的束缚态得以存在，量子力学是必须严格遵守的. 我们将会看到，事情**并非**如此. 在非线性场论中，有了适当程度的非线性之后，稳定的束缚态不仅在量子力学并且在经典力学的范畴内也能存在. 这种束缚态称为孤立子.

7.1 早期历史

最早讨论这个问题的是 J. 司各特・罗素. 他给不列颠科学进展协会的报告发表于 1845 年(参见图 7.1).

此后司各特・罗素接着提出：他所遇到的孤立体实际上代表着流体力学中范围很广的一类解. 他首先称之为“平移波”，后来称为“孤立波”. 和冲击波不同，冲击波在波前处是奇异的，而“孤立波”是到处规则的没有奇异性. 孤立波是稳定的不会弥散的，因此它和任何由通常的平面波解组成的波包是不同的. 然而司各特・罗素并不能使他所有的同事们都相信. 如我们从图 7.2(取自瑞利勋爵 1876 年的文章)中所看到的，孤立波的问题在当时仍是在执领导地位的物理学家中间激烈争论的课题. 这一争论一直延续到 1895 年才得到解决，当时科特韦格和德

关于波动

关于波动的报告. J. 司各特・罗素绅士,文学硕士,爱丁堡皇家学会会员,于1842和1843年会上所作

委员会会员{约翰・鲁宾逊爵士,爱丁堡皇家学会秘书
J. 司各特・罗素,爱丁堡皇家学会会员}

我相信我还是最好用描述这一我第一次亲身与之相识的情况来介绍这个现象. 当时,我正在观看沿不宽的水道由两匹马牵引迅速向前的一只小船的运动. 当小船骤然停止时,水道中为小船所推动的一大堆水却并不停止,水积聚在船头前面猛烈地搅动着,然后水浪突然呈现出一个很大的、孤立的凸起,那是一个滚圆而光滑、周界分明的水堆. 它以巨大的速度向前滚动,而将小船留在它后面. 这一水堆沿着水道继续行进并没有明显地改变其形状或降低其速度. 我骑马紧跟,并追上了它,它仍保持其原来的大约30英尺长、1英尺至1英尺半的高度的外形以大约每小时8或9英里的速度滚滚向前. 渐渐地它的高度下降. 当我追赶一、二英里后在水道的弯曲处它不见了. 这样,在1834年的8月,这是我第一次有机会见到这样一个独一无二的美丽的现象. 这现象我称之为平移波,这个名字现在已非常普遍地为人们所接受. 这一现象自被我发现以来几乎在每一流体阻力中都是一个重要的组成部分;而属于这类波的有海洋的巨大的升举,它和行星的节律一起使我们的河流升涨并在我们的海岸上滚动.

图 7.1

弗里斯*根据非线性流体力学方程——科特韦格和德弗里斯方程的解(现在称之为孤立子解)给出了全面的分析说明. 然而,剩下的问题是,是否这种稳定的、非奇异的和不弥散的解能在物理学流体力学以外的其他领域中出现. 通过1950年代初费米、巴斯塔和乌拉姆**的工作,这一问题得到新的推进. 利用最大的计算机之一 Maniac I,他们研究了64个谐振子的能量趋向均匀分配的过程,在这些谐振子之间存在着某种很弱的非线性耦合. 初始时,所有的能量都集中在一个谐

---

* Korteweg D J, de Vries G. *Phil Mag*, 1895, **39**:422.

** Collected Papers of Enrico Fermi. general editor *Segré E*. Chicago: University of Chicago Press, 1965, Vol. II:978.

振子上.他们很惊异地发现,通常关于怎样达到热平衡的概念是十分错误的.

伦敦,爱丁堡和都伯林

哲学杂志

和

科学期刊

[第 5 集]

1876 年 4 月

XXXII.关于波动 瑞利勋爵,文学硕士,皇家学会会员

…………

孤 立 波

这是司各特·罗素为一种特殊的波起的名字.这种波他于 1844 年在不列颠协会的报告中有所描述.

…………

艾里(Airy)关于潮汐和波的论文可能仍是最有权威性的论说,他似乎在孤立波中没有认识到有什么与众不同的东西.

…………

另一方面斯托克斯教授说:"罗素先生的意见即孤立波是一种特殊现象,这决不是从波的产生的环境来推测的.

图 7.2

一如我们在图 7.3 中所见到的,经过大约一万次循环之后,其能量几乎不变地完全回到初始的模式.总能量只有百分之几留给极少数的其他振子.[这**不是**庞加莱循环,庞加莱循环要求有更长的持续时间.]这种集体模式的发展是个普遍现象,可近似地用户田(Toda)格点*的孤立子解来表示.孤立子解的重要的普遍特征是:即使非线性耦合非常弱,孤立子解仍是存在的:

$$\text{弱耦合} \neq \text{弱振幅}. \tag{7.1}$$

---

* Toda M. *Progr Theor Phys Suppl*, 1970, **45**:174.

非线性问题的研究

E. 费米,J. 帕斯塔和 S. 乌拉姆　文献 *LA*-1900(1955 年 5 月)

摘　　要

在洛斯阿拉莫斯的计算机 MANIAC I 上研究了一个由 64 个质点组成的一维动力学系统. 在邻近质点间含有非线性的力. 考虑的非线性项有二次的,三次的和破缺线性型. 结果分解为傅里叶分量并作为时间的函数画出.

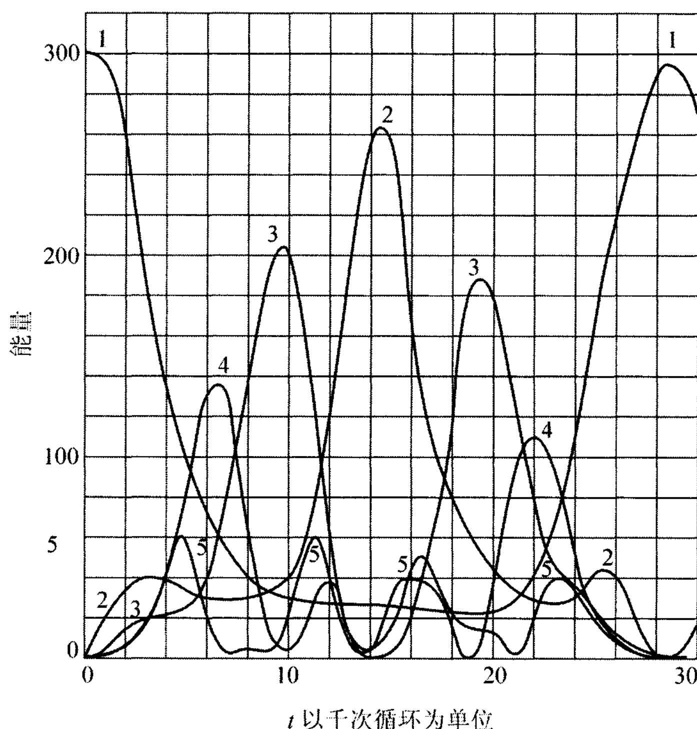


图 1. ——画出的量是能量(头五个模式的动能加势能). 能量的单位是任意的. $N=32$; $\alpha=1/4$, $\delta t^2=1/8$. 弦的初始形状是单一正弦波. 能量最高的模式不超过我们所给定单位的 20 倍. 计算了大约有 3 万次计算循环.

图　7.3

此后就有大量关于孤立子的文章出现. 1973 年的斯科特,邱和麦克

劳克林 * 的评述性文章中列举了总共 267 篇参考文献. 但是所有这些文章都只涉及到经典的孤立子解,同时几乎都限于一维空间,而且只是对七种特殊方程而言:科特韦格-德弗里斯方程,正弦-戈登方程等. 最近在这一领域里有较大的进展,既有推广到三维空间的经典解,还在量子孤立子解方面发展起一些一般的技术(至少在弱耦合下的玻色子场的情形)使得对于每一种经典解,都存在着一种相应的量子解. 这些新的发展将是我们讨论的主要部分.

7.2 定义、分类和若干一般说明

让我们从定义开始:

经典场论的任一空间有限、非弥散的解是经典孤立子.

在整个讨论中,我们只对相对论性定域场论感兴趣. 为了得到孤立子解,必须有非线性耦合;否则,只有平面波解. 虽然通过平面波的迭加就能得到波包,但这种波包总是弥散的,因此不是孤立子.

下面的说明应用于任何玻色子场的孤立子.

1. 一般情形下,拉氏量可由几种场和几种耦合组成. 可将各种不同的场方便地合起来记成 ϕ,而将拉氏密度写成

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}}\right)^{2}-\frac{1}{g^{2}}V(g\phi),\tag{7.2}$$

式中 g 是无量纲的,而 V 在 $\phi=0$ 时为极小. 不失任何普遍性,这个极小值可选为零. 故可用幂级数展开:

$$\frac{1}{g^{2}}V(g\phi)=\frac{1}{2}m^{2}\phi^{2}+O(g\phi^{3})+O(g^{2}\phi^{4})+\cdots,\tag{7.3}$$

其中二次项 ϕ^2 与 g 无关. 若理论中只有一种场,则 m 是个数. 否则 ϕ 代表有 n 个分量的一列矩阵,$\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 表示$\frac{1}{2}\tilde{\phi}m^2\phi$, m 是$n\times n$ 的矩阵. 运动方

---

* Scott A C, Chu F Y F, McLaughlin D W. *Proc* IEEE, 1973, **61**:144.

程可通过变分原理(2.10)得到,它是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu^2}-\frac{1}{g}V'(g\phi)=0, \tag{7.4}$$

式中 $V'(\sigma)=\frac{dV(\sigma)}{d\sigma}$, $\sigma=g\phi$. 由于(7.3),上一方程变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu^2}=m^2\phi+O(g\phi^2)+O(g^2\phi^3)+\cdots. \tag{7.5}$$

当 $g=0$, 方程变为线性方程. 因此在方程中 g 标志着不同的非线性耦合. 如前所述,由于孤立子是不弥散的,当 $g=0$ 时并不存在孤立子. 一如我们将会见到的,所有的孤立子解当 $g\to 0$ 时都是奇异的.

2. 在经典理论中,这种奇异性总是一个简单的极点. 为证明这点,可写

$$\phi_{\text{经典}}=\frac{1}{g}\sigma. \tag{7.6}$$

则拉氏密度变为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{g^2}\mathscr{L}_\sigma, \tag{7.7}$$

式中

$$\mathscr{L}_\sigma=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right)^2-V(\sigma) \tag{7.8}$$

和 g 无关. 由于经典解是由作用量积分的极值确定的,因此 $\mathscr{L}_\sigma$ 与 g 无关说明对应的孤立子解 σ 也是与 g 无关的,从而确立了(7.6). 由此只要 $g\neq 0$, 孤立子解的**存在性并不依赖于 g 的强度**. 一如我们在(7.1)中所见到的,这就是为什么即使是弱耦合的情形下也不可能略去孤立子解的道理. 与平面波不同,当 $g\to 0$ 时,孤立子解$\to\infty$.

3. 只是最近才发现的一个重要而令人高兴的特点是:对任何一种玻色子场系统,只要经典孤立子存在,则总存在相应的量子孤立子解,至少在弱耦合的情形是如此.

为预期这点,最简单的办法是注意到量子理论中的作用量 A 可设为 $\hbar^{-1}$乘以经典作用量,即

$$A=\hbar^{-1}\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x=(\hbar g^2)^{-1}\int\mathscr{L}_\sigma\mathrm{d}^4x,\tag{7.9}$$

式中 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_\sigma$ 由(7.7)式相联系. 在量子理论中,考虑从初始位形到终极位形的所有路径[见图 7.4]. 每一路径带有正比于 e^{iA} 的振幅,所有这些振幅的迭加即为态矢量. 当$\hbar$趋于 0 时,具有稳定相位 $\delta A=0$ 的路径才是重要的路径,这就导致经典的描述法. 以$\hbar$的形式展开,就是著名的 W. K. B 近似法. 由于(7.9),可以期望 g^2 起到如同$\hbar$所起的作用:

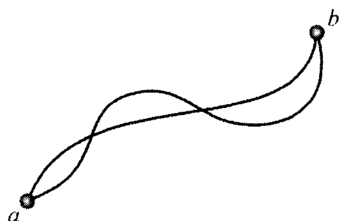


图7.4 在量子理论中,从 a 至 b 的每条路径都带有正比于 e^{iA} 的振幅,这里 A 是作用量积分[见第 19 章]

$$g^2\sim\hbar.\tag{7.10}$$

因此以 g^2 的展开式和以$\hbar$的展开式是等价的;带头项必须和经典极限相同. 怎样实现这种量子展开式将在 7.6 节中给出. 这里我们仅指明:(7.10)式解释了为什么在弱耦合的情形下,经典孤立子的存在性就意味着一个对应的量子解. 例如,考虑到(7.6)—(7.7),经典孤立子的能量为

$$E_{\text{经典}}=O(g^{-2})\tag{7.11}$$

的形式. 在微扰展开式中,相应量子解的能量为

$$E_{\text{量子}}=E_{\text{经典}}[1+O(g^2)+O(g^4)+\cdots].\tag{7.12}$$

由此,至少在形式上

$$\text{当 } g\to 0 \text{ 时},E_{\text{量子}}\to E_{\text{经典}}.\tag{7.13}$$

另一个令人高兴的方面是,在传统的可重正化的一类理论中,所有在(7.12)式中的辐射修正 $O(g^2)$, $O(g^4)$, …对孤立子来说可望自动地都是有限的. 这和经典孤立子解到处是规则这一点紧密联系着的. 在非常高的频率下,一入射平面波为孤立子散射的散射振幅必定是小得可以忽略. 故孤立子解的存在性应不改变理论的高能行为. 对于可重正化的理论来说,由于所有的辐射修正是有限的,在现实意义上讲,极限(7.13)是成立的,由此经典解联系着量子解. 由于测不准原理,一量子孤立子不能一直局限在空间中. 量子孤立子的定义是通过(7.12)—(7.13)与对应的经典

解相联结的.

若局限于可重正化相对论定域场论,则所有孤立子解可分为两大类(详细的将在下面几节中给出).

(1) 拓扑孤立子. 必要条件是应存在简并的真空态使得孤立子态在无穷远处的边界条件在拓扑上和物理的真空态**不同**. 拓扑孤立子解的一些典型例子是一维空间中的正弦-戈登方程*,二维空间中的尼尔森和奥尔森**的涡旋解和三维空间的特霍夫特和普列耶可夫***的磁单极子解.

(2) 非拓扑孤立子. 对于非拓扑孤立子的无穷远处的边界条件和真空态的**相同**. 由此,不需要简并真空态. 非拓扑孤立子存在的必要条件是应当存在一个附加的守恒定律. 一如我们将在下面几节中要讨论的,非拓扑孤立子也能存在于任何维空间****中.

7.3 一维空间例

为简单计,首先考虑一维空间(加上时间一维)中的孤立子. 由于(7.10)—(7.13),我们只需检验经典系统. 由此,一如将在7.6节中证明的,量子孤立子可由微扰级数推导出来.

1. **拓扑孤立子** 设 ϕ 为厄米场. 按(7.2),拉氏密度可写成

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2-\frac{1}{g^2}V(g\phi), \tag{7.14}$$

式中 $x_\mu=(x,\ \mathrm{i}t)$,作替换

$$\phi=\frac{1}{g}\sigma,$$

* 它的定义见习题7.1.

** Nielsen H B, Olesen P. *Nucl Phys*, 1973, **B61**: 45.

*** 'tHooft G. *Nucl Phys*, 1974, **B79**: 276; Polyakov A M. *JETP Lett*, 1974, **20**:194.

**** Friedberg R, Lee T D, Sirlin A. *Phys Rev*, 1976, **D13**: 2739; *Nucl Phys*, 1976, **B115**:1, 32.

$\mathscr{L}$变为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{g^2}\mathscr{L}_\sigma, \tag{7.15}$$

式中

$$\mathscr{L}_\sigma=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right)^2-V(\sigma). \tag{7.16}$$

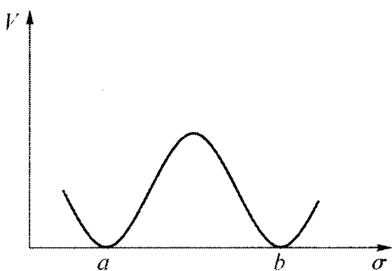


图 7.5 具有拓扑孤立子解的理论中 $V(\sigma)$的示意图

由于拓扑孤立子的必要条件是存在简并的真空态,故 $V(\sigma)$必然存在一个以上的极小. 不失普遍性,可选 V 的极小为 0. 故一如图 7.5 中所示,$V\geqslant 0$,且具有一个以上的极小,比如在 $\sigma=a, b, \cdots$ 处 $V(\sigma)=0$. 运动方程以 σ 表示,有

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_\mu^2}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\sigma}=0. \tag{7.17}$$

与时间无关的解由

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\sigma}=0$$

确定. 可将上式乘以$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}$然后积分,这导致

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2-V(\sigma)=\text{常数}. \tag{7.18}$$

存在一种简单的力学类比:考虑一点粒子,其"位置"为 σ,其"时间"为 x,在一个"势"$-V(\sigma)$中运动,一如图 7.6 所示. 则上述方程就是在这类比中的能量守恒定律. 在这个类比中,设在"时间" $x=-\infty$ 时,粒子的"位置"σ 处于 a. 非常轻地推动粒子使之向右开始运动. 在"时间"x 增加时,σ 从 a 移至 b;

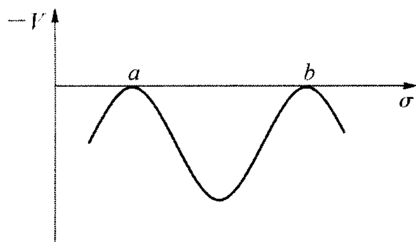


图 7.6 在力学类比问题中的"势"$-V$

由于能量守恒,当 $x \to \infty$ 时,$\sigma \to b$. 其解析表达式为

$$x = \int^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sqrt{2V(\sigma')}}, \tag{7.19}$$

式中包含一积分常数 ξ,一如图 7.7 所示.

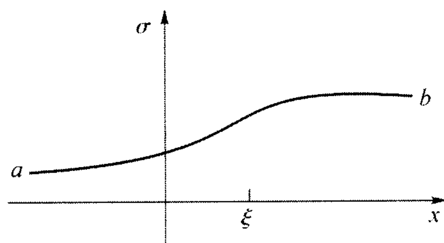


图 7.7 一个拓扑孤立子

现在回到原来的场论问题,由于(7.14)—(7.16),对于一个与时间无关的解,能量密度可写为

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{g^2}\varepsilon_\sigma(x),$$

式中

$$\varepsilon_\sigma(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 + V(\sigma). \tag{7.20}$$

从图 7.7 以及 $V(a) = V(b) = 0$ 可得能量密度 $\varepsilon(x)$为图 7.8 中所给出的形式,它在任意时刻在空间上是有限制的. 由于场 $\phi = \frac{\sigma}{g}$ 在 $x = \pm\infty$ 的边界条件是不一样的,因此称它为拓扑孤立子解. 其稳定性为无穷远处的

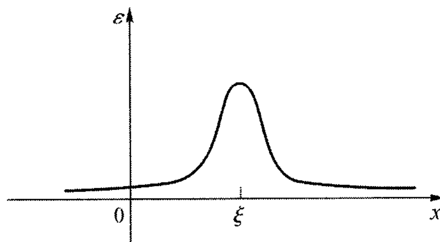


图7.8 对于图 7.7 中的孤立子的能量密度示意图

边界条件所保证.

在力学类比中,令"时间" $x=-\infty$,"位置" σ 处于 b,则可导出另外一个解.当 x 增加时,σ 从 b 移至 a.如果称图 7.7 给出的解为孤立子,这个新的解则称为反孤立子,两者具有相同的能量.由此,正反粒子共轭的概念在经典领域里就已经存在.

由于洛伦兹不变性,如果 $\sigma(x)$ 是(7.17)的一个解,则一定也满足同一场方程,这里 $\gamma=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}$.由此,对于一个运动着的孤立子或反孤立子解也是存在的.

为了描写一孤立子和一反孤立子之间(或二孤立子之间或二反孤立子之间)的散射,考虑 $t=-\infty$ 时的初始条件,其中一个处于 $x=-\infty$ 以速度 $v>0$ 运动,另一个处于 $x=+\infty$ 以速度 $-v$ 运动.一般说来,由于碰撞,状态在时间进程之中将发生变化.在正弦-戈登方程(在习题 7.1 中定义)的特殊情形中,由于无限多个守恒定律的出现,每个孤立子或反孤立子的形状和速度将保持不变,即使在这种对头碰之后也是如此.我们称这种特殊情形为**不受破坏的**孤立子.不受破坏的孤立子仅在一维空间中存在.如又要求有相对论不变性,则它只有正弦-戈登方程的情形下才存在.

2. **非拓扑孤立子** 为构造非拓扑孤立子,人们无需简并的真空.但一如我们将会见到的,由于要求有附加的守恒定律,则至少必须存在一个复数场.

同样我们将首先考虑一维空间的情形.令 ϕ 为一复数场.按一般形式(7.2),假设拉氏密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}}-\frac{1}{g^{2}}U(g^{2}\phi^{\dagger}\phi),\tag{7.21}$$

式中 † 表示厄米共轭.利用变分原理(2.10),可得运动方程为

$$\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x_{\mu}^{2}}-\phi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(g^{2}\phi^{\dagger}\phi)}U(g^{2}\phi^{\dagger}\phi)=0,\tag{7.22}$$

式中,和以前一样 $x_{\mu}=(x,\ it)$.我们将假定 $U(\phi^{\dagger},\ \phi)$ 在 $\phi=0$ 处有一单一的极小.此外,U 的极小值为 0.正如(7.3)中那样

$$当\ \phi\rightarrow 0\ 时,\frac{1}{g^{2}}U\rightarrow m^{2}\phi^{\dagger}\phi,\tag{7.23}$$

其中 m 为普通的平面波解的质量[见(7.35)—(7.36)以下].

拉氏密度(7.21)在相位变换

$$\phi \to e^{-i\theta}\phi. \tag{7.24}$$

下是不变的.故可直接验证:流

$$j_\mu = i\phi^\dagger \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu}\right)} - i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)}\phi \tag{7.25}$$

满足

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{7.26}$$

在我们的情形中,考虑到(7.21),流 j_μ 为

$$j_\mu = i\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu}\phi - i\phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}. \tag{7.27}$$

粒子密度 ρ 由 j_μ 的时间分量乘以 $-i$ 给出.从(7.27)可得

$$\rho = i(\phi^\dagger\dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger\phi). \tag{7.28}$$

其空间积分为粒子数

$$N = \int\rho dx. \tag{7.29}$$

由于(7.26),N 是守恒的,即

$$\dot{N} = 0. \tag{7.30}$$

从(7.28)—(7.29)可见对于 $N\neq 0$,ϕ 必须随时间变化.不难证明最低能量的经典解应具有如下形式

$$\phi = \frac{1}{g}\sigma(x)e^{-i\omega t}, \tag{7.31}$$

式中 $\sigma(x)$是实的.(7.22)用 σ 表示为

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \omega^2\sigma - \sigma\frac{d}{d\sigma^2}U(\sigma^2) = 0, \tag{7.32}$$

此式乘以$\frac{d\sigma}{dx}$后变为可积. 结果为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 - V(\sigma) = \text{常数}, \tag{7.33}$$

式中

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}U(\sigma^2) - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2. \tag{7.34}$$

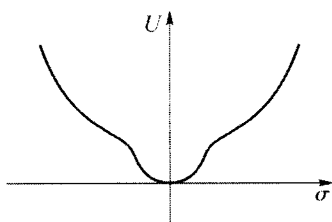


图 7.9　$U(\sigma^2)$对 σ 的一例

图 7.9 的例子中，画出了 U 函数对 σ 的关系；一如前述，U 在 $\sigma = 0$ 处有一单一极小.

令 Ω 是包含整个系统的体积. 当 $\Omega \to \infty$ 时，(7.22)允许有通常的平面波解.

$$\phi = \sqrt{\frac{N}{2\omega\Omega}}\,e^{i(kx-\omega t)}, \tag{7.35}$$

式中

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2}. \tag{7.36}$$

这是因为在这极限中，振幅 ϕ 变成无穷小；故考虑到(7.23)，(7.22)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu^2} - m^2\phi = 0, \tag{7.37}$$

而(7.35)为其解. 由于当 $\Omega \to \infty$，x 有限时孤立子的振幅并不是无穷大，因此孤立子解和平面波解是不同的. 此外，当 $x \to \pm\infty$ 时，孤立子振幅指数地趋向于零，故 $\omega^2 < m^2$. 因此我们可将孤立子的这两种解的类型看成在解析上彼此是连续的：

$$\text{对平面波解}, \omega^2 > m^2,$$
$$\text{对孤立子解}, \omega^2 < m^2, \tag{7.38}$$

这一关系在任意维空间中成立.

现在我们来证明：为了求非拓扑的孤立子解，(7.34)式所定义的函数 $V = \frac{1}{2}(U - \omega^2\sigma^2)$ 至少在 $\omega^2 = m^2$ 处必须具有图 7.10 的形式. 具体地

讲,有条件

$$U(\sigma^2)-\omega^2\sigma^2=0. \qquad (7.39)$$

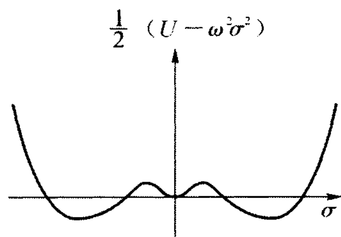


图 7.10 $V=\frac{1}{2}(U-\omega^2\sigma^2)$ 示意图

对于 $\omega^2\leqslant m^2$,除了有 $\sigma=0$ 的解外还有其他 $\sigma\neq 0$ 的解存在.假定的确如此,则如同上面的拓扑孤立子例子那样,我们可考虑如下的力学类比:在"位置"σ 处、在"时间"x 时刻,一个点粒子在位势 $-V=-\frac{1}{2}[U-\omega^2\sigma^2]$ 中运动,如图 7.11 所示.在"时间" $x=-\infty$ 时,可令粒子处于 $\sigma=0$ 的"位置".我们仍然极端缓慢地推动粒子使之向右方运动.当 x 增加时,σ 移动到 A 处然后在 $x=+\infty$ 时回至 0 点.普遍解由下式给出

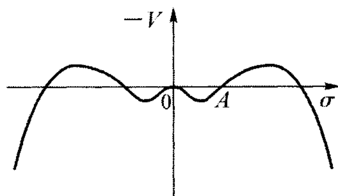


图 7.11 在力学类比中的"位势"$-V$

$$x-\xi=\int_A^\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{2V(\sigma)}}, \qquad (7.40)$$

式中 ξ 是积分常数.图 7.12 中给出解的示意图.当 $x=\xi$, $\sigma=A$.在两个无穷处,非拓扑孤立子解 σ 满足同一个条件:

$$当\ x\to\infty\ 或\ -\infty\ 时,\sigma\to 0$$

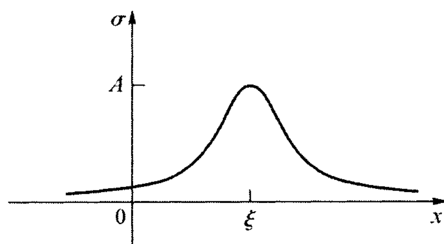


图 7.12 一个非拓扑孤立子解

我们看到,考虑到(7.23),当 $\sigma\to 0$ 时,函数

$$V=\frac{1}{2}(U-\omega^2\sigma^2)$$

变为

$$V \to \frac{1}{2}(m^2 - \omega^2)\sigma^2 + O(\sigma^4). \tag{7.41}$$

由此，为使图 7.10 中的曲线 $V(\sigma)$ 在原点 $\sigma = 0$ 处弯向上方，必须有

$$\omega^2 < m^2,$$

这肯定了(7.38)式. 此外若 σ^4 的项<0，则条件(7.39)很容易得到满足，这相当于场之间吸引的情形.

作为一个显然的例子，可参考习题 7.2，其中

$$\frac{1}{g^2}U = \frac{m^2\phi^\dagger\phi}{1+\varepsilon^2}[(1-g^2\phi^\dagger\phi)^2 + \varepsilon^2],$$

解为

$$\phi = \frac{1}{g}\left[\frac{a}{1+\sqrt{1-a}\cosh y}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}, \tag{7.42}$$

式中

$$a = (1+\varepsilon^2)\frac{1}{m^2}(m^2 - \omega^2)$$

和

$$y = 2\sqrt{m^2 - \omega^2}(x - \xi).$$

方程(7.19)和(7.40)将寻找一个一维空间的任意拓扑的或非拓扑的孤立子解的问题归结为积分问题.

7.4 德里克定理

当空间维数(时间维数除外) $D > 1$ 时，德里克(Derrick)* 定理对孤立子解的类型给以严格的限制. 考虑一由标量场 $\phi_1, \cdots, \phi_N$ 组成的经典系统，其拉氏密度为

---

* Derrick G H. *J Math Phys*, 1964, **5**:1252.

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_{a}[\dot{\phi}_a^2-(\nabla\phi_a)^2]-U(\phi_a),$$

其中 $a=1, 2, \cdots, N$. ∇是 D 维的梯度矢量,U 假定 $\geqslant 0$ 具极小值为

$$\min U(\phi_a)=0. \tag{7.43}$$

因此,基态是能量为零的态.但是可以存在一个以上这样的态.

定理. 对于 $D\geqslant 2$,只有基态是能量有限,与时间无关的解;亦即 ϕ_a 到处等于常数,对此 $U(\phi_a)=0$.

证明. 由拉氏密度,可得哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\sum_{a}[\Pi_a^2+(\nabla\phi_a)^2]+U(\phi_a).$$

式中 $\Pi_a=\dot{\phi}_a$ 是 ϕ_a 的共轭动量.令 $\phi_a(\boldsymbol{r})$是理论的与时间无关的解,故 $\phi_a(\boldsymbol{r})$满足场方程:

$$\nabla^2\phi_a-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\phi_a}=0.$$

相应的总能量 $\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3r$ 为

$$E(1)=T_1+V_1,$$

式中

$$T_1\equiv\frac{1}{2}\sum_{a}\int(\nabla\phi_a(\boldsymbol{r}))^2\mathrm{d}^Dr$$

和

$$V_1\equiv\int U(\phi_a(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}^Dr.$$

可以构造一个新的函数 $\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r})$,定义为

$$\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r})\equiv\phi_a(\lambda\boldsymbol{r}).$$

若场的分布在任何地方都取这一新的函数 $\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r})$,由于它也是与时间无关的,因此现在的总能量为

$$E(\lambda)=T_\lambda+V_\lambda,$$

式中

$$T_\lambda = \frac{1}{2}\sum_a \int (\nabla \phi_a^\lambda(\boldsymbol{r}))^2 \mathrm{d}^D r$$

和

$$V_\lambda \equiv \int U(\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}^D r.$$

因为 $\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r})$是从 $\phi_a(\boldsymbol{r})$通过标度变换

$$\boldsymbol{r} \to \lambda \boldsymbol{r}$$

得到的,我们见到 T_λ 和 V_λ 的值和它们在 $\lambda = 1$ 处的值相联系:

$$T_\lambda = \lambda^{2-D} T_1$$

和

$$V_\lambda = \lambda^{-D} V_1.$$

由此,$E(\lambda)$对 $\ln\lambda$ 的导数为

$$\lambda \frac{\mathrm{d}E(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = (2-D)T_\lambda - DV_\lambda.$$

当 $\lambda = 1$ 时,$\phi_a^\lambda(\boldsymbol{r})$变为 $\phi_a(\boldsymbol{r})$,后者是场方程的解,从而其总能量对小的变更必须是稳定的.因此$\frac{\mathrm{d}E(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$在 $\lambda = 1$ 时为零,由此得

$$(2-D)T_1 - DV_1 = 0. \tag{7.44}$$

现在,对于 $D \geqslant 2$ 的情形下,$(2-D)T_1$ 和 $-DV_1$ 都 $\leqslant 0$. 若 $D > 2$,则(7.44)式显然不能满足,除非 $T_1 = V_1 = 0$. 对于 $D = 2$,(7.44)式意味着 $V_1 = 0$,意即到处 $U(\phi_a) = 0$ 并且 $E(1) = T_1$. 假设当 ϕ_a 要么等于常数 c_a,要么等于常数 c_a'时,有 $U(\phi_a) = 0$. 若在空间某区域内 $\phi_a = c_a$,而在邻域内 $\phi_a = c_a'$,则$\nabla\phi_a$ 在穿越两区域边界时含有一δ 函数,从而$(\nabla\phi_a)^2$的积分给出∞.因此能量为有限的解只有一个,即到处是 $\phi_a =$ 同一常数,证毕.

由此,当 $D > 1$ 时,为了使孤立子解存在,我们必须要末将非零自旋场包含进来,要么考虑与时间有关的但是非弥散的解.前者导致规范场的拓扑孤立子,一如前面提到过的尼尔森和奥勒森的二维涡旋解以及特霍夫特和波列雅可夫的三维磁单极解.后者为多维非拓扑孤立子所代表,其

特性将在下节中讨论.

7.5 孤立子与平面波的关系

在(7.35)式已见到,任何一个非线性相对论场方程总是允许有

$$\sqrt{\frac{N}{2\omega\Omega}}e^{ik\cdot r-i\omega t} \tag{7.45}$$

形式的平面波解.这里 $\Omega\to\infty$ 是系统的体积, $\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$.

由于拓扑的和平面波的两类解所满足的边界条件不同,因此对拓扑孤立子来说其稳定性得到保证使它不会衰变成平面波.对于非拓扑孤立子,其稳定性则依赖于最低能量解的类型.下面将对这一问题作一较详细的分析.

考虑非线性理论,其中比如说粒子数 N 是守恒的;此外还假定理论具有非拓扑孤立子解.对于平面波解(7.45),其能量和 N 成线性关系,因此

$$E(\text{平面波})=N\omega. \tag{7.46}$$

由于

$$\omega(\text{平面波})\geqslant m,$$

有

$$E(\text{平面波})\geqslant Nm. \tag{7.47}$$

对于孤立子解,能量 E 是 N 的非线性函数,一如在(7.38)中所见,相应的 $\omega<m$.

1. 一维空间 我们将证明,在一维空间中,若存在非拓扑孤立子解,则最低能量永远小于 Nm:

$$E(\text{孤立子})<Nm, \tag{7.48}$$

这一点在图7.13中表示出来.为证明(7.48)式,先注意 N 和复数场 ϕ 的相角 $\theta\equiv\omega t$ 是共轭变量.从哈密顿量方程,

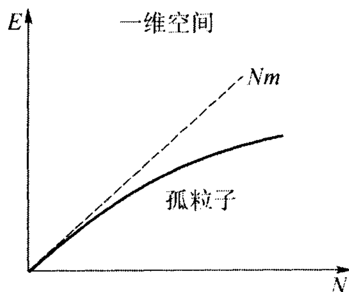


图7.13 N 给定下,一维空间的孤立子能量永远小于平面波的能量

我们有

$$\dot{N} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \tag{7.49}$$

和

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial N}. \tag{7.50}$$

由于在(7.24)的相位变换下的不变性,哈密顿量是和 θ 无关的. 故从(7.49)即可给出(7.30),即 N 守恒. 由于 $\omega = \dot{\theta}$ 和 H 的值即为能量 E,因此(7.50)可写成

$$\omega = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}N}. \tag{7.51}$$

现在根据(7.38),有

$$\omega(\text{孤立子}) < m, \tag{7.52}$$

(7.51)意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N} E(\text{孤立子}) = \omega < m. \tag{7.53}$$

其次,我们将证明当 $\omega \to m_-$ 以及 $|x|$ 大时,非拓扑孤立子的振幅有如下的量级:

$$|\phi| \sim \frac{\sqrt{m^2-\omega^2}}{g} \mathrm{e}^{-\sqrt{m^2-\omega^2}\,|x|}. \tag{7.54}$$

一如从(7.42)式可见,这个渐近行为至少在所引用的例子中是成立的. 当 $|x|$ 大时,$\phi = \dfrac{\sigma}{g}$ 一定是小的. 一般来说可以由此导出渐近行为成立. 从(7.41)有

$$\text{当}\ \sigma \to 0\ \text{时} \quad V \to \frac{1}{2}(m^2-\omega^2)\sigma^2 + O(\sigma^4).$$

在(7.54)中,指数因子是从 $-\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x^2}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\sigma}$ 相等而来的,乘数因子 $\dfrac{\sqrt{m^2-\omega^2}}{g}$ 是由于 $V(\sigma)$ 中二次项和四次项的近似平均分配而来的,即

$$(m^2-\omega^2)\sigma^2 \sim \sigma^4. \tag{7.55}$$

由此,在任何一维空间中(7.54)是成立的.在一维空间中,当 $\omega \to m_-$ 时

$$N \to 2m\int |\phi|^2 dx \sim \frac{1}{g^2}\sqrt{m^2-\omega^2} \to 0, \tag{7.56}$$

这是因为 $|\phi|^2$ 带有一个 $\frac{m^2-\omega^2}{g^2}$ 因子,而 x 的积分给出另一个 $\frac{1}{\sqrt{m^2-\omega^2}}$ 的因子.图 7.13 中,虚线代表平面波解的最低能量态 $\omega = m$. 由于非拓扑孤立子是平面波解至 $\omega < m$ 区域的解析延拓,故曲线 E(孤立子)对 N 的关系应在 $\omega \to m_-$ 时与直线 E(平面波)$=Nm$ 相连接.从(7.56)可见,这连结处位于 $N=0$. 故对于一维非拓扑解,(7.53)式导致

$$E(\text{孤立子}) = \int_0^N \omega\, dN < m\int_0^N dN = mN, \tag{7.57}$$

对任意 N 和 g,这个式子确立了(7.48).

2. **二维空间** 将非拓扑孤立子推广到 >1 维空间的情形已在文献中给出.细致的讨论已超过了本书的范围.和在一维空间的情形一样,人们所需的全部东西就是某种非线性相互作用,它能产生场(或场量子)之间的吸引力;通过标量场传递的相互作用正是这种情形.利用变分不难证明

$$\text{当 } N \to \infty \text{ 时}, E(\text{孤立子}) < Nm. \tag{7.58}$$

不论二维空间或三维空间,按照导致(7.54)的推理可见,当 $\omega \to m_-$ 且径向距离 r 大时,非拓扑孤立子的振幅为

$$|\phi| \sim \frac{\sqrt{m^2-\omega^2}}{g} e^{-\sqrt{m^2-\omega^2}\, r}. \tag{7.59}$$

的量级.由此,在二维空间中,当 $\omega \to m_-$ 时

$$N \to 2m\int |\phi|^2 d^2 r = N_c \sim O(1). \tag{7.60}$$

这是因为在 $|\phi|^2$ 中的因子 $(m^2-\omega^2)$ 正好与 $d^2 r$ 积分中相应的因子

$(m^2-\omega^2)^{-1}$ 严格相消的缘故. 结果在图 7.14 中给出. 存在一个临界数 N_c. 非拓扑孤立子只在 $N > N_c$ 时存在;在这区域内,最低能量解总是孤立子,而不是平面波.

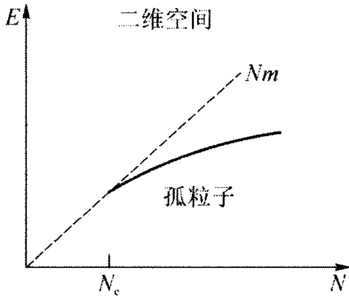


图 7.14 实线是二维非拓扑孤立子的 E(孤立子)对 N 的关系

3. **三维空间** 当 $\omega \to m_-$ 和 r 大的时候,非拓扑孤立子的渐近行为仍由(7.59)给出,N 的对应值为

$$N \to 2m\int |\phi|^2 \mathrm{d}^3 r.$$

由于(7.59)式中的指数因子,对 $\mathrm{d}^3 r$ 积分时给出一个 $\sim (m^2-\omega^2)^{-\frac{3}{2}}$ 的因子. 故当 $\omega \to m_-$ 时

$$N \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{m^2-\omega^2}}\right) \to \infty. \tag{7.61}$$

还可证明*,当 ω 足够小时,N 必须随 ω 的减小而增长,并以这种方式趋向(7.58)式给出的极限. 这和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N} E(\text{孤立子}) = \omega > 0 \tag{7.62}$$

一起产生如图 7.15 中所示的形式颇为奇特的 E(孤立子)曲线. 当 $\omega = m_-$ 时 $N \to \infty$,但孤立子的能量为 Nm_+. 当 ω 从 m_- 下降时,N 亦随之下降直到 N_s;在这整个间隔内,孤立子能量$> Nm$. 当 ω 进一步下降时,N 则开始回升;在 $N = N_c$ 处穿过直线 $E = Nm$. 若 ω 再下降,则 N 保持上升,直到 $N \to \infty$ 其 E(孤立子)总是 $< Nm$.

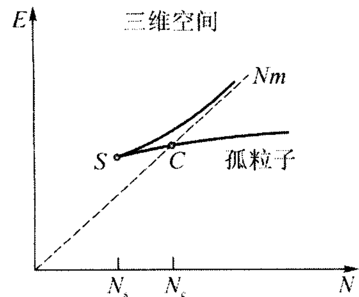


图 7.15 实线是三维拓扑孤立子的 E(孤立子)对 N 的关系

现在,除了存在一个临界点 c 外还

---

* Friedberg R, Lee T D, Sirlin A. *Phys Rev*, 1976, **D13**: 2739; *Nucl Phys*, 1976, **B115**: 1, 32.

有一个尖峰 s,满足 $N_c > N_s$. 对于 $N < N_s$,没有孤立子解. 对于 $N_s < N < N_c$,能量最低的解是平面波;对于 $N > N_c$,能量最低的解总是孤立子. 在图 7.15 中,沿孤立子曲线的下面分支,对 $N > N_c$ 的孤立子解是绝对稳定的,是能量最低的解. 当 $N_c > N > N_s$,对无限小的微扰来说,可以证明,孤立子解是稳定的,即使它并不是能量最低的态. 沿孤立子上面分支,孤立子解总是不稳定的. N_c 和 N_s 的数值依赖于理论中的参数. 当 $N_c < 1$,从而 N_s 也 < 1,这时要找个例子是不难的.

在量子理论中 N 只取整数 0, 1, 2, …. 由此,当 $N_c < 1$,若经典结果是量子解的良好近似时,则从真空态 $(N = 0)$变到任何 $N \neq 0$ 的态时,系统的最低能量态的特性改变是很突然的. 当 N 小时,N 体束缚态的经典孤立子描述方法是和常用的贝特-萨佩特方程(比如在梯形近似下)的解的描写方法十分不同,注意到这一点是很重要的. 例如在孤立子的描写方法中,$N = 1$ 的态和 $N = 2$ 的态之间并无显著的不同,两者都是"团状的". 在贝特-萨佩特的描写方法中,$N = 1$ 的态是"点状的",而 $N = 2$ 的态是由两个"点状"粒子的波函数形成的"团状"物.

说明. 在非线性系统中,不难想象这样的情况:只要稍稍改变基态的参数,基态就会突然改变其性质. 上面三维空间的情形就是这种例子;当 N 从 $< N_c$ 改变到 $> N_c$ 时,能量最低的解从平面波改变为孤立子. 类似的例子还可以在简单的力学问题中找到.

为举例说明这点,让我们考虑在中心位势中运动的单个点粒子. 粒子的位矢为 $\boldsymbol{r}$,其共轭动量为 $\boldsymbol{p}$. 假定哈密顿量为

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}r^2[(1-gr)^2 + \Delta^2], \tag{7.63}$$

式中 $r = |\boldsymbol{r}|$, g 和 Δ 为实参数. 角动量 $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 是守恒的. 在固定值 $l = |\boldsymbol{l}|$ 下,(7.63)变为

$$\frac{1}{2}p_r^2 + V_l(r),$$

式中 p_r 为径向动量,而

$$V_l(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}r^2[(1-gr)^2 + \Delta^2].$$

这里 l 和上面讨论中的守恒量 N 起着相同的作用. 对于 l 和 Δ 都不太

大、$g>0$ 时,$V_l(r)$有两个定域极小,例如在 $r=r_1$ 和 r_2,且 $r_1<r_2$. 如在图 7.16(a)中所示,当 $l=0$, 可见 $r_1=0$. 因此 r_1 表示当 l 小的时候的绝对极小. 很易证明,存在着一个临界值 l_c. 对 $l>l_c$ 时,$V_l(r)$的绝对极小值从 r_1 移到 r_2,一如图 7.16(b)所示. 现在转到量子理论中来,这时 l 只取整数值. 故若 $l_c<1$, 则 $l=0$ 态的特性和所有 $l\neq 0$ 的态大不相同. 这和我们场论中的问题是十分相似的,场论问题是和参数相关的,倘使 $N_c<1$, 则真空态($N=0$)也可以和所有 $N\neq 0$ 的态大不相同.

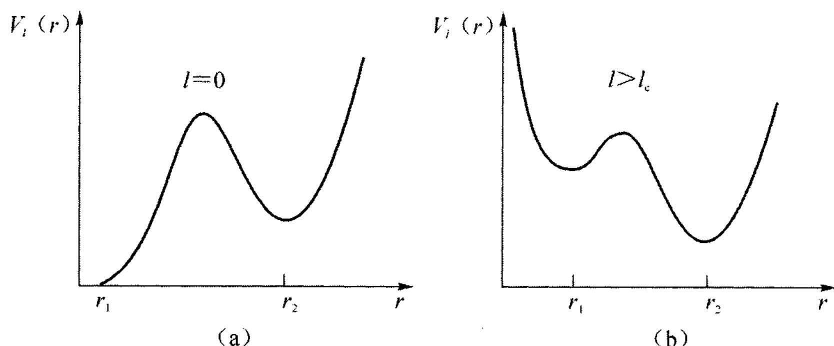


图 7.16 简单例子中的 $V_l(r)$对 r 的关系

(a) $l=0$; (b) $l>l_c$

注意,在这个例子中,如 Δ 足够小,则总可以通过安排使对任意给定的 g 有 $l_c<1$. g 小只意味着非线性解离原点很远.

若 N_c 小,则孤立子描写(比如说二体束缚态的)方法和通常的贝特-萨佩特描写方法(例如用梯形近似)确实是十分不同的.

7.6 量子化

现在我们回到量子化这一重要问题上来,这已在 7.2 节中简略评述过. 要作出量子展开式(7.12),有多种方法*. 这里我们将用集体

---

* 详细参考文献见 Extended Systems in Field Theory 会议集, *Physics Reports*, 1976, **23C**.

坐标 * 按正则量子化步骤来进行.

1. **拉氏量、哈密顿量和对易关系** 为简洁起见,考虑在 7.3 节中讨论过的一维空间的非拓扑孤立子的例子. 拉氏密度由(7.21)给出

$$\mathscr{L}=-\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}-\frac{1}{g^2}U(g^2\phi^\dagger\phi).$$

相应的哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}=\Pi^\dagger\Pi+\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{g^2}U(g^2\phi^\dagger\phi), \tag{7.64}$$

式中 Π 和 $\Pi^\dagger$ 分别为 ϕ 和 ϕ^+ 的共轭动量,由

$$\Pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^\dagger,\ \Pi^\dagger=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger}=\dot{\phi} \tag{7.65}$$

给定.

经典孤立子解可写成

$$\phi_{cl}=\frac{1}{g}\sigma(x-\xi)e^{-i\theta}, \tag{7.66}$$

式中 σ 由(7.40)给定,ξ 是积分常数,$\theta=\omega t$ +常数. 在 ξ 或是 θ 变更一常量时,经典解是简并的;亦即 ϕ_{cl} 在

$$\phi_{cl}\to\phi_{cl}+\delta\phi, \tag{7.67}$$

$$\delta\phi=-\frac{1}{g}e^{-i\theta}\left[\frac{d\sigma}{dx}\delta\xi+i\sigma\delta\theta\right]. \tag{7.68}$$

的变更下,它仍是一个解,且具有相同能量. 式中变更 $\xi\to\xi+\delta\xi$ 代表一空间平移,而 $\theta\to\theta+\delta\theta$ 相应于 ϕ 中的相位改变;它们的共轭动量相应于系统的总动量 P 和粒子数 N. 在变换(7.67)—(7.68)下的不变性意味着 P 和 N 是守恒的. 经典里 ξ 和 θ 与 P 和 N 是对易的,因此当系统具有确定动量 P 和确定的粒子数 N 时,ξ 和 θ 都可任意变化,导致了前述的经典解的简并性. 一如我们将会看到的,在量子力学中将 ξ 和 θ 处理成集体坐标就可得到这一简并性;它们的共轭动量变为导数算符

---

* Christ N H, Lee T D. *Phys Rev*, 1975, **D12**:1606.

$$P = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \xi} \quad 和 \quad N = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{7.69}$$

首先我们将按第 2 章中给出的标准方法作出量子化. 对易关系由

$$[\Pi(x, t), \phi(x', t)] = [\Pi^\dagger(x, t), \phi^\dagger(x', t)]$$
$$= -\mathrm{i}\delta(x - x') \tag{7.70}$$

给出,其他 ϕ, $\phi^\dagger$, Π 和 $\Pi^\dagger$ 间的等时对易子为 0. 系统的动力学则由对任意算符 $O(t)$ 都适用的海森伯方程

$$[H, O(t)] = -\mathrm{i}\dot{O}(t)$$

确定. 如在(2.48)中一样,可将复数场分解为厄米分量

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \quad 和 \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2), \tag{7.71}$$

式中 ϕ_1 和 ϕ_2 为厄米场. 它们的傅里叶级数可写成

$$\phi_\alpha(x, t) = \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}}[x_{\alpha, k}(t)\cos kx + y_{\alpha, k}(t)\sin kx], \tag{7.72}$$

式中 $\alpha = 1$ 和 2, L 是系统的体积(即长度),而 k 由

$$k = \frac{2n\pi}{L}, \; n = 0, 1, 2 \cdots \tag{7.73}$$

给出. ϕ_α 的厄米性意味着 $x_{\alpha, k}$和 $y_{\alpha, k}$也是厄米的,即

$$x_{\alpha, k} = x^\dagger_{\alpha, k} \quad 和 \quad y_{\alpha, k} = y^\dagger_{\alpha, k}. \tag{7.74}$$

共轭动量 Π 和 $\Pi^\dagger$ 可以用类似的方式分解成

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_1 - \mathrm{i}\Pi_2) \quad 和 \quad \Pi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_1 + \mathrm{i}\Pi_2). \tag{7.75}$$

Π_1 和 Π_2 的傅里叶分量可用 $x_{\alpha, k}$和 $y_{\alpha, k}$的微分算符写出,有

$$\Pi_\alpha = -\mathrm{i}\sum_k \sqrt{\frac{2}{L}}\left[\cos kx \frac{\partial}{\partial x_{\alpha, k}} + \sin kx \frac{\partial}{\partial y_{\alpha, k}}\right]. \tag{7.76}$$

由于(7.72)和(7.76),有

$$[\Pi_\alpha(x,t),\ \phi_\beta(x',t)] = -\mathrm{i}\delta(x-x')\delta_{\alpha\beta} \tag{7.77}$$

和

$$[\phi_\alpha(x,t),\ \phi_\beta(x',t)] = [\Pi_\alpha(x,t),\ \Pi_\beta(x',t)] = 0.$$

式中 α、β 可为 1 或 2,这依次又导致原来的对易关系(7.70)式.

由于

$$\int \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi}\,\mathrm{d}x = \sum_{\alpha,k} \frac{1}{2}(\dot{x}_{\alpha,k}^2 + \dot{y}_{\alpha,k}^2), \tag{7.78}$$

拉氏量可用这些傅里叶分量表示成

$$\int \mathscr{L}\mathrm{d}x = \sum_{\alpha,k} \frac{1}{2}(\dot{x}_{\alpha,k}^2 + \dot{y}_{\alpha,k}^2) - V(x_{\alpha,k},\ y_{\alpha,k}), \tag{7.79}$$

式中

$$V = \int \left[\frac{\partial \phi^\dagger}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{g^2}U(g^2\phi^\dagger\phi)\right]\mathrm{d}x. \tag{7.80}$$

相应的哈密顿量 $H = \int \mathscr{H}\mathrm{d}x$ 为

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha,k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha,k}^2}\right) + V(x_{\alpha,k},\ y_{\alpha,k}). \tag{7.81}$$

虽则对于分析平面波来说傅里叶级数是一种方便的展式,但对于孤立子来说却是特别不恰当的.因此我们作一变量的变换将傅里叶分量变到一个新的集合.

2. **集体坐标** 新的集合由两个以前引进过的集体坐标 $\xi(t)$ 和 $\theta(t)$ 和一些振动坐标 $q_{\pm,n}(t)$, $(n = 2, 3, \cdots)$ 组成.要是愿意的话可记成 $q_{+,1}(t) = \xi(t)$ 和 $q_{-,1}(t) = \theta(t)$ 使得新的集合为 $\{q_{\pm,n}(t)\}$.让我们选择两个独立的正交完全的实数 c 数函数集 $\{\psi_{+,n}(x)\}$ 和 $\{\psi_{-,n}(x)\}$,它们具有条件

$$\psi_{+,1}(x) = 常数 \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} \tag{7.82}$$

和

$$\psi_{-,1}(x) = 常数 \cdot \sigma. \tag{7.83}$$

因此,对于 $n = 2, 3, \cdots$ 我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\psi_{+,n}\mathrm{d}x = \int \sigma\psi_{-,n}\mathrm{d}x = 0. \tag{7.84}$$

除上述条件外，这两个 c 数函数集合可以任意选定. 现在我们将量子场算符 $\phi(x, t)$展成

$$\phi(x, t) = \left\{\frac{1}{g}\sigma(x-\xi) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}[q_{+,n}(t)\psi_{+,n}(x-\xi) + \mathrm{i}q_{-,n}\psi_{-,n}(x-\xi)]\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \tag{7.85}$$

新坐标 $\xi(t)$、$\theta(t)$和 $q_{\pm,n}(t)$都是厄米的.

为理解(7.84)中的两个条件，让我们将 ϕ 在孤立子解

$$\frac{1}{g}\sigma(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

附近展开，并将 $\delta\xi$、$\delta\theta$ 和 $q_{\pm,n}(n \geqslant 2)$ 看成小量. 利用(7.68)和(7.85)可见

$$\delta\phi = \left[-\frac{1}{g}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\delta\xi + \mathrm{i}\sigma\delta\theta\right) + \sum_{n=2}^{\infty}2^{-\frac{1}{2}}(q_{+,n}\psi_{+,n} + \mathrm{i}q_{-,n}\psi_{-,n})\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \tag{7.86}$$

方程(7.84)保证了由于集体坐标 ξ 和 θ 的变更引起的运动不致和振动模式弄错.

将(7.85)式和傅里叶展式(7.71)—(7.72)相等，得到坐标变换

$$x_{a,k},\ y_{a,k} \to q = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ q_{+,2} \\ q_{-,2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{7.87}$$

这使我们可将微分算符$\dfrac{\partial}{\partial x_{a,k}}$和$\dfrac{\partial}{\partial y_{a,k}}$表示成$\dfrac{\partial}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial}{\partial q_{+,2}}$, $\dfrac{\partial}{\partial q_{-,2}}$, …的线性函数. 将这些线性关系代入(7.81)可将哈密顿量用这些新变量表示出来. 推导这种显示形式的最简单的方法是，首先来考虑经典问题.

(7.85)式对时间的导数给出 $\dot{\phi}$ 作为 $\dot{\xi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{q}_{\pm,2}$, …的线性函数;亦即

$$\dot{\phi}=\sum_{\lambda,n}\frac{\partial\phi}{\partial q_{\lambda,n}}\dot{q}_{\lambda,n},\tag{7.88}$$

式中

$$n=1,2,3,\cdots,\lambda=+,-.$$

为记号上的方便,设

$$q_{+,1}=\xi\quad 和\quad q_{-,1}=\theta.\tag{7.89}$$

由此(7.78)式又可写成

$$\int\dot{\phi}^{\dagger}\dot{\phi}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\widetilde{\dot{q}}\mathfrak{M}\dot{q},\tag{7.90}$$

式中 $\dot{q}$ 是(7.87)中列矩阵对时间的导数,而

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(q)\tag{7.91}$$

是对称的 $\infty\times\infty$ 维的实矩阵,其矩阵元为

$$\mathfrak{M}_{\lambda,n;\lambda',n'}(q)=\int\left(\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial q_{\lambda,n}}\frac{\partial\phi}{\partial q_{\lambda',n'}}+\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial q_{\lambda',n'}}\frac{\partial\phi}{\partial q_{\lambda,n}}\right)\mathrm{d}x.\tag{7.92}$$

通过(7.90)式对 $\dot{q}_{\lambda,n}$进行微分可见,广义坐标 $q_{\lambda,n}$的共轭动量 $p_{\lambda,n}$为列矩阵

$$p=\mathfrak{M}\dot{q}.\tag{7.93}$$

的第(λ,n)个分量.从经典方面看,哈密顿量为

$$H_{\mathrm{cl}}=\frac{1}{2}\widetilde{p}_{\mathrm{cl}}\mathfrak{M}^{-1}p_{\mathrm{cl}}+V(q),\tag{7.94}$$

式中 $\mathfrak{M}^{-1}$是 $\mathfrak{M}$ 的逆,而函数 $V(q)$可将(7.85)代入(7.80)得到.从量子力学方面看,由于变换(7.87)是一个点变换,(7.81)中的广义拉普拉斯算符满足(见习题 7.3)

$$\sum_{\alpha,k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha,k}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha,k}^2}\right)=\frac{1}{\mathscr{J}}\widetilde{p}\,\mathfrak{M}^{-1}\mathscr{J}p.\tag{7.95}$$

式中列矩阵 p 的矩阵元现在是微分算符

$$p_{\lambda, n} = -\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial q_{\lambda, n}}, \tag{7.96}$$

$\mathfrak{M}^{-1}$仍是(7.94)中同一个逆矩阵，而

$$\mathscr{J} = \sqrt{\det \mathfrak{M}(q)}. \tag{7.97}$$

考虑到(7.69)和(7.89)，p 的头两个分量是系统的总动量 P 和粒子数 N，即

$$p_{+,1} = P = -\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad 和 \quad p_{-,1} = N = -\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{7.98}$$

量子的哈密顿量(7.81)等于哈密顿量算符

$$H = \frac{1}{2\mathscr{J}} \widetilde{p}\, \mathfrak{M}^{-1} \mathscr{J} p + V(q). \tag{7.99}$$

由于经典的孤立子解(7.66)在对两集体坐标 ξ、θ 的变更(7.67)—(7.68)下不变，函数 $V(q)$、$\mathscr{J}(q)$和 $\mathfrak{M}(q)$均不依赖于 ξ 和 θ，故 P 和 N 都和 H 对易，

$$[P, H] = [N, H] = 0, \tag{7.100}$$

这意味着两者都是运动常数. P 的本征值是连续的，且为系统的总动量. 由于 θ 是一循环变量，故 N 只有分立的整数本征值…，-2，-1，0，1，2，…，对于粒子是正数，对于反粒子是负数. 和通常一样，系统的能量由薛定谔方程

$$H\,|\rangle = E\,|\rangle \tag{7.101}$$

确定.

3. **微扰展开** 为证明 H 的本征值可用 g 的微扰级数来解得，假定振动坐标 $q_{\pm,2}$，$q_{\pm,3}$，…及它们的时间导数均为 $O(1)$的量级. 由此，(7.85)给出

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\dot{\xi} + \mathrm{i}\sigma\dot{\theta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + O(1). \tag{7.102}$$

由此(7.90)为 $O(g^{-2})$的量级，且由下式给出

$$\int \dot{\phi}^{\dagger} \dot{\phi}\, \mathrm{d}x = \frac{M}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + O(g^{-1}), \tag{7.103}$$

式中

$$M = \frac{2}{g^2}\int\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x,\ I = \frac{2}{g^2}\int\sigma^2\,\mathrm{d}x. \tag{7.104}$$

将(7.85)代入(7.80),可见 $V(q)$也是 $O(g^{-2})$的量级:

$$V(q) = \frac{1}{g^2}\int\left[\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\sigma^2)\right]\mathrm{d}x + O(g^{-1}). \tag{7.105}$$

为了简化我们的分析,假定孤立子是静止的,即

$$P\,|\rangle = 0. \tag{7.106}$$

按照(7.90)—(7.99)的步骤,且利用(7.105)—(7.106),可见

$$H = \frac{N^2}{2I} + \frac{1}{g^2}\int\left[\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\sigma^2)\right]\mathrm{d}x + O(g^{-1}). \tag{7.107}$$

让我们通过设定 N 的本征值

$$N = I\omega \tag{7.108}$$

来定义 ω. 由于 N 也是(7.103)关于$\dot{\theta}$ 的导数,可见 $N = I\dot{\theta}$, 因此 ω 是表征经典解 σ 的同一参数. 对量子解的惟一限制则是 N 必须是整数. 由此,考虑到(7.104)和(7.108), (7.107)式可写成

$$H = \frac{1}{g^2}\int\left[\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\sigma^2) + \omega^2\sigma^2\right]\mathrm{d}x + O(g^{-1}). \tag{7.109}$$

利用经典孤立子解(7.31),可见其能量恰为同一形式:

$$E_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{g^2}\int\left[\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\sigma^2) + \omega^2\sigma^2\right]\mathrm{d}x; \tag{7.110}$$

因此量子解变为

$$H\,|\rangle = [E_{\mathrm{cl}} + O(1)]\,|\rangle. \tag{7.111}$$

在(7.109)式中,似乎有一 $O(g^{-1})$量级的修正项. 但由于 σ 是经典方程的解,不难证明 $O(g^{-1})$项实际上是零,这就导致(7.111)式.

由此,当 g 小的时候,经典孤立子解的存在保证了量子解的存在;此外,当 $g \to 0$ 时,量子孤立子的质量由同一经典曲线 $E_{\mathrm{cl}}(N)$给出,只是 N

必须是整数.一如在(7.12)—(7.13)中所见,这些性质的正确性具有普遍性,并不只限于本节中讨论的一维空间的例子.

说明. 在这个场论简引中,我们已经论及了基本的量子化步骤和计算 S 矩阵的一般方法.按平面波解的微扰级数对于没有强作用的轻子和光子的描述将是有用的;一如我们将会见到的,存在充分的理由可将已知的强子看成是夸克的束缚态.夸克似乎永远被禁闭在一定的空间内,这就是为什么人们看不到自由夸克.在距离~强子半径时,这些夸克复合体(即强子)的动力学可以用孤立子解作最好的描写.但是在强子内的小距离处,由于量子色动力学的渐近自由性质,按平面波的通常的微扰展开式变为近似成立.这一论题将在后面加以分析.

后继各章我们要讨论的粒子物理将由两个主要部分组成:对称性和相互作用.在对称性方面,分析将完全是唯象的,而且还能推导出严格的结论而无需任何详细的动力学知识.关于相互作用的各章,对哈密顿量将作特别的假设,这就能使我们作更详细的计算.

现在我们将进入粒子物理.

习题 7.1. 设一维空间厄米场 σ 的拉氏密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right)^2-V(\sigma),$$

式中 $x_\mu=(x,\ it)$. 试证对于

(i) $V(\sigma)=\frac{1}{8}(1-\sigma^2)^2$ 的经典孤立子解为

$$\sigma=\tanh\left[\frac{1}{2}(x-\xi)\right];$$

(ii) $V(\sigma)=1-\cos\sigma$ 的经典孤立子解为 $\sigma=4\tan^{-1}e^{x-\xi}$, ξ 为积分常数.

(ii) 的场方程称为正弦-戈登方程.

习题 7.2. 设一维空间复数场 σ 的拉氏密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{\partial\sigma^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}-U(\sigma^\dagger\sigma).$$

试证对于

$$U = \frac{\sigma^{\dagger}\sigma}{1+\varepsilon^2}[(1-\sigma^{\dagger}\sigma)^2+\varepsilon^2]$$

的经典孤立子解为

$$\sigma = \left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a}\cosh y}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{7.112}$$

式中 $a = (1+\varepsilon^2)(1-\omega^2)$ 和 $y = 2\sqrt{1-\omega^2}(x-\xi)$.

为简单起见在上面二习题中都设有标度,即设 $g = 1$, $m = 1$.

习题 7.3. 在变换 $x_i \rightarrow q_j = q_j(x_i)$ 中,其中下标可从 1 变至 n,定义 M 为 $n \times n$ 的矩阵

$$M = (M_{ij}) \equiv \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\right), \; M^{-1} = (M_{ij}^{-1})$$

为其逆,$|M| = \mathscr{J}^2$ 为其行列式. 试证

$$\text{(i)} \; \frac{1}{|M|}\frac{\partial |M|}{\partial q_k} = M_{ji}^{-1}\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = -2\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)$$

和

$$\text{(ii)} \; \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\mathscr{J}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(M_{ij}^{-1}\mathscr{J}\frac{\partial}{\partial q_j}\right). \tag{7.113}$$

参 考 文 献

关于量子化,特别是关于拓扑孤立子有几篇极好的评述性文章:

Coleman S. In New Phenomena in Subnuclear Physics. Part A. ed. A. Zichichi New York and London: Plenum Press, 1977:297.

Faddeev L D, Korepin V E. *Physics Reports*. 1978, **C42**, No. 1. Jackiw R. *Revs Mod Phys*, 1977, **49**:681.

第二篇

粒 子 物 理

第8章 数量级估计

按唯象的观点来看,粒子之间存在着四种不同的相互作用,见表8.1.

表 8.1

相互作用	唯象耦合常数	媒介场的量子
强相互作用	~ 1	有色胶子
电磁相互作用	$\alpha \cong \frac{1}{137}$	光子
弱相互作用	$Gm_{\mathrm{p}}^2 \sim 10^{-5}$	中间玻色子
引力相互作用	$\mathscr{g} m_{\mathrm{p}}^2 \sim 6\times 10^{-39}$	引力子

四类唯象的相互作用. α 是精细结构常数,G 是 β 衰变的费米常量,$\mathscr{g}$ 是牛顿引力常量,m_{p} 是质子质量;所有的常量都以自然单位表示.

在我们整个讨论当中,将只集中于强、弱和电磁相互作用. 除了媒介场的量子外,所有的粒子都可分成两种. 具有强相互作用的粒子称为强子,其余称为轻子. 例如 p, n, Λ, π 都是强子;e, μ, τ 和各种中微子都是轻子(由于 τ 的质量大约是 2 GeV,因此涵义为轻粒子的"轻子"一词有点用词不当). 这些粒子的详细性质在书末的表中给出.

本章中,我们将举例说明怎样来估计物理量的数量级,比如各种不同粒子的大小和截面等等. 在这些估计中,要用到下面少数几个参数作为输入.

$$
\begin{aligned}
&\text{精细结构常数} && \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137},\\
&\text{费米常量} && G \cong 10^{-5}/m_{\mathrm{p}}^2,\\
&\text{电子质量} && m_{\mathrm{e}} \cong 0.51\ \mathrm{MeV} \cong (4\times 10^{-11}\ \mathrm{cm})^{-1},\\
&\text{质子质量} && m_{\mathrm{p}} \cong 1\,800 m_{\mathrm{e}},\\
&\pi\ \text{介子质量} && m_\pi \cong \frac{1}{7} m_{\mathrm{p}}.
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

量级估计的技巧基于：

(i) 简单的物理考虑；

(ii) 量纲分析.

这些将在下面的例子中给以说明.

8.1 氢原子半径

氢原子半径 r 是用电子的轨道来确定的. 因此，电子的动量为 $p \sim \frac{1}{r}$，其动能为 $\sim \frac{p^2}{2m_e}$. 静电势能应为 $\sim -\frac{\alpha}{r}$. 能量 E 可以估计出来，

$$E \sim \frac{1}{2m_e}\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{\alpha}{r}. \tag{8.2}$$

其极小由

$$\frac{dE}{dr} = 0$$

确定，给出

$$r = \frac{1}{m_e \alpha}. \tag{8.3}$$

利用(8.1)中的 α 和 m_e 值，可得

$$r \cong 5 \times 10^{-9} \text{ cm}. \tag{8.4}$$

这是玻尔半径，现在不用解微分方程也推导了出来.

说明. 在量子电动力学中，有三种重要的长度，彼此具有不同的 α 的幂：

玻尔半径	$\frac{1}{m_e \alpha}$,
电子的康普顿波长	$\frac{1}{m_e}$,
电子的经典半径	$\frac{\alpha}{m_e}$. (8.5)

8.2 强子大小

按照表 8.1,强相互作用耦合常数不是 α 而是~1.因此初看一下(8.5)就可知道,对于强子只有一种长度,它可取为这种粒子的康普顿波长.由于 π 介子是质量最小的强子,因此它的康普顿波长最长.由于强相互作用的关系,在其他强子,例如在 p, n, Λ, …中必然会存在 π 介子云.所有这些强子,包括 π 介子在内,其大小应为$\sim\frac{1}{m_\pi}$,按(8.1)是$\sim 10^{-13}$ cm=1 费米(fermi).

因此,人们可以预期质子的电荷半径应有同样的量级.实验上发现

$$r_p \cong 0.81 \text{ 费米}, \tag{8.6}$$

和上面的简单估计相一致.

8.3 高能 pp、πp 和 Kp 总截面

由于 pp 具有强作用,因此我们可预期 pp 碰撞的总截面在高能下将为

$$\sigma_{pp} \sim \pi r_p^2. \tag{8.7}$$

由于 r_p 为$\sim 10^{-13}$cm,所以可估计得

$$\sigma_{pp} \sim 3\times 10^{-26}\ \mathrm{cm}^2 \cong 30\ \mathrm{mb}, \tag{8.8}$$

这里 $1\ \mathrm{mb} = 10^{-3}\ \mathrm{b}$, $1\ \mathrm{b} = 1$ 靶恩(barn) $= 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2$.

后面讨论夸克-部分子模型时我们会看到,核子(质子或中子)是由三个夸克组成的,而介子(π 或 K)则由两个夸克组成.另外在高能下我们可以把这些夸克当作自由粒子来处理,至少在讨论总截面时可以这样做.因此可期望有

$$\frac{\sigma_{\pi p}}{\sigma_{pp}} \cong \frac{\sigma_{Kp}}{\sigma_{pp}} \cong \frac{2}{3},$$

这和 π 和 K 的电荷无关. 利用(8.8)可估计总截面

$$\sigma_{\pi^+p} \cong \sigma_{\pi^-p} \cong 20\ \text{mb},$$
$$\sigma_{K^+p} \cong \sigma_{K^-p} \cong 20\ \text{mb}. \tag{8.9}$$

同样地有

$$\sigma_{np} \cong \sigma_{pp} \cong \sigma_{\bar{p}p} \cong \sigma_{\bar{n}p}. \tag{8.10}$$

现今的高能实验值为

$$\sigma_{pp} \cong \sigma_{np} \cong \sigma_{\bar{p}p} \cong \sigma_{\bar{n}p} \cong 45\ \text{mb},$$
$$\sigma_{\pi^{\pm}p} \cong 25\ \text{mb}$$

和

$$\sigma_{K^{\pm}p} \cong 20\ \text{mb},$$

都和上述的估计相一致.

8.4 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$

我们将估计这一反应在高能下的总截面. 由于 $e^{\pm}$ 和 $\mu^{\pm}$ 都是轻子, 因此它们之间最强的相互作用是电磁相互作用. 图 8.1 中给出最低级的图形, 其中波形线代表虚光子.

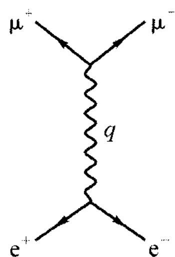


图 8.1 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 的费恩曼图

令 σ 为总截面. 图 8.1 每一顶角贡献一个正比于电荷的因子; 故费恩曼振幅正比于精细结构常数 α. 只要我们仅讨论总截面, 则问题中惟一的洛伦兹不变量是虚光子携带的 4 动量 q 的平方. 将过程在质心系(如果这是一个标准的碰撞束实验, 则也就是实验室系)中表达, 并记 s 是质心系能量 $E_{\text{c.m.}}$ 的平方是非常有用的. 在我们的情形中, 有

$$s \equiv E_{\text{c.m.}}^2 = -q^2 = q_0^2 - \boldsymbol{q}^2. \tag{8.11}$$

因此总截面必须是下列形式

$$\sigma = \alpha^2 f(s,\ m_e,\ m_\mu), \tag{8.12}$$

式中 m_e 和 m_μ 分别是 e 和 μ 的质量，函数 f 是待求的. 当 $E_{c.m.}$ 远大于轻子质量时，作为近似可设 $m_e = m_\mu = 0$. 现在，α 是无量纲的，而 σ 和 s 在自然单位制中的量纲为

$$[\sigma] = [L^2] \quad \text{和} \quad [s] = [L^{-2}], \tag{8.13}$$

式中 L 表示长度. 因此从量纲分析可知(8.12)式中的函数 f 在 s 大时必须正比于 s^{-1}，即

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{s}. \tag{8.14}$$

图 8.1 中的费恩曼图立刻可以计算得，而在高能极限下的 σ 的完整答案是

$$\sigma = \frac{3}{4}\pi\frac{\alpha^2}{s} \tag{8.15}$$

(见习题 6.1). 这里的要点在于不作任何的计算也可以给出截面的估计，尽管还缺个因子 $\frac{4}{3}\pi$.

从(8.14)式，可立刻估计出，例如当 $s \cong (1\ \text{GeV})^2$ 时

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \sim 4 \times 10^{-32}\ \text{cm}^2 = 0.04\ \mu\text{b}, \tag{8.16}$$

式中 $1\ \mu\text{b} = 1$ 微靶 $= 10^{-6}$ b.

8.5 $\nu + \text{N} \to \cdots$

令 $\sigma(\nu\text{N})$ 是这一反应的遍及所有终态求和的总截面. 初态中的 ν 可以是 μ 子型中微子 ν_μ 或是电子型中微子 ν_e，而 N 则是核子. 和上面一样，s 表示质心系中的能量平方. 由于这是个弱作用过程，其振幅应正比于费米常量 G. 故 $\sigma(\nu\text{N})$ 必须具有形式

$$\sigma(\nu\text{N}) = G^2 f(s,\ m_\text{N}), \tag{8.17}$$

式中 m_N 是核子质量，而函数 f 是待定的. 像上面的例子那样，对于 $s \gg$

m_N^2,作为近似可设 $m_N = 0$. 由于 G 的量纲是

$$[G] = [L^2], \tag{8.18}$$

利用(8.13)可得在(8.17)中的函数 f 必须正比于 s;因此

$$\sigma(\nu N) \sim G^2 s. \tag{8.19}$$

在典型的高能中微子实验中,实验室系是初态核子为静止的系统. 令 E_ν 和 $\boldsymbol{p}_\nu$ 分别是实验室系里中微子的能量和动量,则有

$$\begin{aligned} s = E_{\text{c.m.}}^2 &= (E_\nu + m_N)^2 - \boldsymbol{p}_\nu^2 = m_N(2E_\nu + m_N) \\ &\cong 2m_N E_\nu. \end{aligned} \tag{8.20}$$

由此(8.19)式又可用 E_ν 表示为

$$\sigma(\nu N) \sim G^2 m_N E_\nu. \tag{8.21}$$

利用(8.1),可得在高能下

$$\sigma(\nu N) \sim 4 \times 10^{-38} \left(\frac{E_\nu}{m_N}\right) \text{cm}^2. \tag{8.22}$$

实验结果为

$$\sigma(\nu N) \cong 0.6 \times 10^{-38} \left(\frac{E_\nu}{m_N}\right) \text{cm}^2. \tag{8.23}$$

不作任何计算我们又一次估计出这种反应的数量级[请注意在相仿的能量下(8.8)、(8.16)和(8.22)之间的巨大差别].

8.6 康普顿散射

图 8.2 中给出康普顿散射

$$\gamma + e^{\pm} \to \gamma + e^{\pm} \tag{8.24}$$

的最低级费恩曼图. 按照导出(8.12)式的相同推理可以预期这一反应的总截面 σ_{Comp} 具有形式

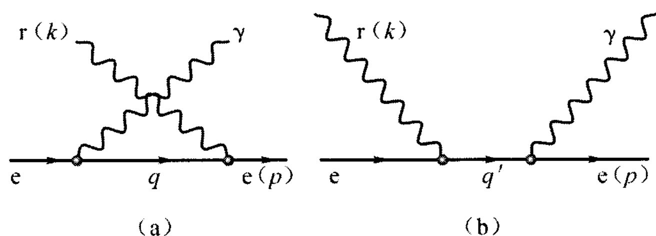


图 8.2 康普顿散射的最低次图形,其中 p 和 k 表示末态 e 和初态 γ 的 4 动量

$$\sigma_{\mathrm{Comp}} = \alpha^2 f(s,\ m_e). \tag{8.25}$$

和以前一样,这里 s 是质心系能量平方,而函数 f 是待定的.

在非相对论极限下,$s \to m_e^2$,故 f 是一个依赖于 m_e 的函数.从量纲考虑,可以预期有

$$\sigma_{\mathrm{Comp}} \sim \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad \text{N. R.} \tag{8.26}$$

这里 N. R. 表示非相对论极限. 当 $s \gg m_e^2$ 时,可略去(8.25)式中的 m_e,通过量纲分析导致

$$\sigma_{\mathrm{Comp}} \sim \frac{\alpha^2}{s} \quad \text{E. R.} \tag{8.27}$$

这里 E. R. 表示极端相对论极限.

图 8.2 中的费恩曼图的精确计算给出 *

$$\sigma \cong \begin{cases} \dfrac{8}{3}\pi\left(\dfrac{\alpha}{m_e}\right)^2 & \text{N. R.} \\ 2\pi\dfrac{\alpha^2}{s}\ln\dfrac{s}{m_e^2} & \text{E. R.} \end{cases} \tag{8.28}$$

(8.26)的估计和准确的非相对论公式(称为汤姆逊极限)只差一个因子 $\frac{8\pi}{3}$. 然而在极端相对论情况下,估计的公式(8.27)丢了一个和 s 相关的因子 $2\pi\ln\frac{s}{m_e^2}$. 虽则这仅是一个 s 的缓变函数,然而这种对数项的存在是有

* 见 Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. Oxford: Oxford University Press, 1944.

深刻道理的,这一点下面来进行解释.

8.7 质量奇异性和高能行为

我们先对因子 $\ln \frac{s}{m_e^2}$ 给一个技术上的解释. 考虑图 8.2 中的图形(a). 图中的虚电子携带 4 动量

$$q = p - k, \tag{8.29}$$

式中 p 是末态 e 的 4 动量, k 是初态 γ 的 4 动量. p 和 k 的分量可写成 $p = (\boldsymbol{p}, \mathrm{i}p_0)$ 和 $k = (\boldsymbol{k}, \mathrm{i}k_0)$. 由于末态 e 和初态 γ 都是在质壳上的,因此有

$$p^2 + m_e^2 = 0 \quad 和 \quad k^2 = 0,$$

即

$$p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_e^2} \quad 和 \quad k_0 = |\boldsymbol{k}|. \tag{8.30}$$

为确定起见,让我们考虑实验室系. 在 E. R. 极限下, $p_0 \gg m_e$, 因此

$$p_0 \cong |\boldsymbol{p}| + \frac{m_e^2}{2p_0}. \tag{8.31}$$

在图形(a)中,电子传播子有一分母

$$q^2 + m_e^2 = (p - k)^2 + m_e^2. \tag{8.32}$$

由于(8.30)式,它等于

$$-2p \cdot k = -2\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k} - 2p_0 k_0.$$

在 E. R. 极限下,对于几乎是向前散射的情形我们有

$$\begin{aligned} q^2 + m_e^2 &\cong m_e^2 \frac{k_0}{q_0} + 2|\boldsymbol{p}| k_0 (1 - \cos\theta) \\ &\cong \frac{k_0}{p_0}(m_e^2 + p_0^2\theta^2), \end{aligned} \tag{8.33}$$

式中 $\theta \ll 1$ 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角. 故图形(a)对截面 σ_a 的贡献与$(q^2+m_e^2)^2$ 成反比. 在所考虑的能量范围中，预期 σ_a 对简单估计式(8.27)的偏离为

$$\frac{\sigma_a}{(\alpha^2/s)} \sim \int \frac{\theta^2 2\pi \sin\theta d\theta}{(m_e^2+p_0^2\theta^2)^2} \cdot p_0^4$$

$$\sim 2\pi \ln\left(\frac{p_0}{m_e}\right)^2 \sim 2\pi \ln\left(\frac{s}{m_e^2}\right), \tag{8.34}$$

式中 $2\pi\sin\theta d\theta$ 是立体角，p_0^4 使整个表达式无量纲，而分母中的因子 θ^2，一如下面要解释的，是由于 γ_5 不变性引起的. 新的估计式(8.34)和 Klein-Nishina 在(8.28)中给出的严格极限 * 符合得很好.

γ_5 变换

$$\psi \to \gamma_5 \psi, \tag{8.35}$$

与二分量理论有关已在 3.8 节中讨论过. 对于电子场 ψ，由于 $m_e \neq 0$，质量项就破坏 γ_5 不变性. 然而电磁相互作用在 γ_5 变换下是不变的. 这一点可以将(8.35)式代入(6.7)式而马上得到验证. 在 E. R. 极限下，m_e 可以忽略，因此按照 3.8 节中的讨论可以看出电子的螺旋性在电磁作用下不改变. 由于光子的螺旋性是 $+1$ 或 -1，故一个螺旋性守恒的电子不能吸收或发射方向是严格向前的光子，这一点通过沿运动方向的角动量守恒很容易看出. 因此，对于 $m_e=0$，当 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为 0 时，费恩曼振幅必须为零. 最后就使图 8.2 中图形(a)的矩阵元中带上一个正比于 θ 的因子. 这就解释了(8.34)式中的 θ^2 项. [对于 $m_e \neq 0$，但 $\theta=0$，则振幅 $\propto m_e$；正比于 m_e 的项并不引起质量奇异性.]

从(8.34)式我们看到，在 E. R. 极限下当 $m_e \to 0$ 时截面具有对数奇异性(称为质量奇异性). 质量奇异性的起源是因为当 $m_e=\theta=0$ 时(8.33) 式变成零；亦即相应的传播子变为无穷大，意即虚粒子趋向质壳. 这中间有着一个简单而又普遍的道理：如果我们有许多零质量粒子沿相同方向运动，则它们的总能量 $E=\sum E_a$ 变得与它们的三维动量之和

---

* Klein O, Nishina Y. *Zeit i phys*, 1929, **52**:853.

$\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{p}_a$ 相等，

$$\sum_a E_a = \left| \sum \boldsymbol{p}_a \right|, \tag{8.36}$$

式中下标 a 表示第 a 个粒子. 故当 $m_e \to 0$，只要 e 和 γ 的动量全平行时，能量守恒可从动量守恒导出；亦即在这特殊情形下，

$$e \rightleftharpoons e + \gamma$$

中的所有粒子都可处于质壳上.

可以建立一个普遍的定理：对任一过程

$$i \to f, \tag{8.37}$$

虽则其费恩曼图具有质量奇异性，但 S 矩阵元的平方

$$\sum_{\{i\},\{f\}} |\langle f | S | i \rangle|^2, \tag{8.38}$$

却没有奇异性. 式中的求和遍及集合 $\{i\}$ 和 $\{f\}$，它们分别包含所有 i 和 f 的简并态（在能量宽度 $\varepsilon \neq 0$ 内，ε 可任意选定）. 展开式(8.38)与宽度 ε 有关，但当 $m_e \to 0$ 时，微扰展开中的每一级都具有确定的极限. 这定理不仅在量子电动力学中成立，也在其他场的理论中成立，比如说量子色动力学. 上述定理的证明十分简单将在第 23 章中给出.

8.8 高能光子产生 e^+e^- 对

考虑反应

$$\gamma + Z \to e^+ + e^- + Z, \tag{8.39}$$

式中 Z 表示电荷为 Z（以正电子电荷为单位）的重原子核，其最低级的图形见图 8.3，其中波纹线代表实光子或虚光子. 为求(8.39)的截面，首先考虑双光子引起的对产生：

$$\gamma + \gamma \to e^+ + e^- \tag{8.40}$$

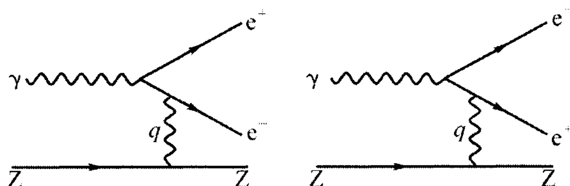


图 8.3　反应(8.39)的最低级费恩曼图

其图形见图 8.4. 按照与推导(8.27)式相同的论据,可估计出在高能下

$$\sigma(\gamma\gamma \to e^+e^-) \sim \frac{\alpha^2}{s}. \tag{8.41}$$

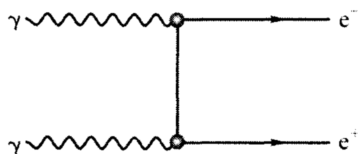


图 8.4　$\gamma+\gamma \to e^+ + e^-$ 的最低级图形

其次我们来比较一下反应(8.39)和(8.40)的差别. 为简单起见,假定在实验室系中原子核特别重. 原子核在距离 r 处所产生的静电势为

$$\frac{Ze}{r}. \tag{8.42}$$

因此在实验室系中,图 8.3 中的虚光子所携带的 4 动量为 $q=(\boldsymbol{q},\ 0)$; 亦即 q 的第四分量为零. $\boldsymbol{q}$ 的分布由(8.42)式的傅里叶变换给出,因此它正比于

$$\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}, \tag{8.43}$$

这样一来,过程 $\gamma+Z \to e^+ + e^- + Z$ 就可看成是 $\gamma+\gamma \to e^+ + e^-$ 的一个特例,只是其中的 γ 是虚的,其动量分布在实验室系中由(8.43)给出. 从而反应(8.39)的 e^+ 和 e^- 的三维动量 $\boldsymbol{p}_+$ 和 $\boldsymbol{p}_-$ 互相独立,因此末态的相空间应与(8.40)不同,有个附加因子

$$\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_0} \sim \boldsymbol{p}^2 \sim s, \tag{8.44}$$

式中 $p_0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_e^2}$，$\boldsymbol{p}$ 可为 $\boldsymbol{p}_+$ 或 $\boldsymbol{p}_-$. 将(8.44)式和(8.41)式相乘，可见因子 s 相消. 因此在高能下，反应(8.39)的截面 σ_{pair} 近似与 s 无关. 图 8.3 中每个费恩曼图都有三个顶点，一个正比于 Ze，而另两个正比于 e. 因此，σ_{pair} 具有下列形式

$$\sigma_{\text{pair}}\sim Z^2\alpha^3 f(m_e),$$

式中函数 f 可通过量纲分析确定，由此可得出如下的估计

$$\sigma_{\text{pair}}\sim\frac{Z^2\alpha^3}{m_e^2}. \tag{8.45}$$

至此，我们仅作了最粗略的估计，完全忽略了可能的质量奇异性. 按照类似于(8.29)—(8.34)之间给出的论据，可推导出如下的在高能下较好的估计

$$\sigma_{\text{pair}}\sim\frac{Z^2\alpha^3}{m_e^2}\ln\frac{E_\gamma}{m_e}, \tag{8.46}$$

式中 E_γ 是反应(8.39)中初始 γ 的实验室能量. 由贝特-海特勒公式*给出的严格极限是

$$\sigma_{\text{pair}}=\frac{28}{9}\frac{Z^2\alpha^3}{m_e^2}\ln\frac{E_\gamma}{m_e}, \tag{8.47}$$

上述估计和它是一致的.

对于没有屏蔽的原子核，方程(8.47)是成立的. 若原子核完全被屏蔽，则(8.47)式中的对数因子该用 $\simeq\ln(183Z^{-\frac{1}{3}})$ 的常量代替. 和 σ_{Comp} 不同，随着能量的增长，σ_{pair} 并不下降. 这一点具有重要的实验推论，这意味着在物质中，一个高能光子具有有限的非零的与能量无关的平均自由程. 例如在空气(1 大气压，0 ℃)中约为 460 米，在铝中为 13 米，在铅中为 7 厘米.

---

* Bethe H, Heitler W. *Proc Roy Soc*, 1934, **146**:83; Heitler W. The Quantum Theory of Radiation, loc. cit.

第9章 一般讨论

物理学自发展之初起,对称性的考虑在我们了解自然的尝试中一直为我们提供了一个强有力的、有用的工具. 逐渐地它们变成了物理规律理论表述形式的支柱. 本章中我们将评述这些对称运算并考查它们的基础. 特别是由于在过去四分之一个世纪中发现了各种不同的不对称性,所以这种考查是十分有用的.

人们发现,物理学中主要的对称性或破缺对称性有四类:

1. 置换对称性:玻色-爱因斯坦和费米-狄拉克统计;
2. 连续时空对称性,诸如平移,转动,加速等等;
3. 分立对称性,诸如空间反射,时间反演,正反粒子共轭等等;
4. 幺正对称性,它包括

U_1 对称性,诸如和电荷、重子数、轻子数等的守恒相联系的对称性;

SU_2(同位旋)对称性;

SU_3(颜色)对称性;

SU_n(味道)对称性.

在这些对称性当中,人们相信头两类和一些 U_1 对称性以及或许还有 SU_3(颜色)对称性是严格的,其余看来都是破缺的.

9.1 不可观测量、对称变换和守恒定律

一切对称性的根源在于对于某些基本量的不可观测性;这些基本量将称为"不可观测量". 我们举一简单的例子来说明不可观测量、对称变换和守恒定律之间的关系. 考虑位于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的两粒子间的相互作用能量 V. **绝对位置是一个不可观测量**这一假设是指我们可以任意选择画出矢量的原点 O;相互作用能应与 O 点无关. 换言之,在任意的空间平移下,

如图 9.1 所示的从 O 改变至 O'，

$$\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{d} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{r}_2 \to \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{d}, \tag{9.1}$$

V 是不变的. 因此，V 只是相对距离 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 的函数

$$V = V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2). \tag{9.2}$$

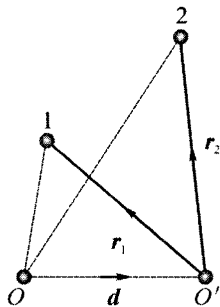


图 9.1 粒子 1 与 2 之间的相互作用能量 V 在原点改变 $O \longrightarrow O'$ 下是不变的

由此，可以导得这二粒子系统的总动量必须守恒，因为其改变率等于力

$$-(\nabla_1 + \nabla_2)V,$$

由于(9.2)式，力为零.

这个例子说明一个对称性原理的三个方面的相互关联性，即不可观测量的物理假设，相关的数学变换下所蕴涵的不变性以及守恒律或选择定则的物理结果. 以完全类似的方式，我们可以假设绝对时间是个不可观测量，则在时间平移

$$t \to t + \tau$$

下，物理规律必须不变，这导致能量守恒. 假定绝对的空间方向是个不可观测量，则我们可导得转动不变性，并得到角动量守恒定律. 假定绝对(均匀)速度是个不可观测量，则可导得洛伦兹不变性的对称要求，和这种对称性相应的守恒律与洛伦兹群的六个生成元相联系. 类似的，广义相对性的基础寓于下述假设：加速度和适当安排的引力场是不可区分的.

下节的表中总结了物理学中用到的一些对称性原理的这三个基本方面.

9.2 不对称性和观测量

所有的对称性原理的正确性都依赖于不可观测量的理论假设，所以一旦一个不可观测量被认为实际上是可观测量时，就产生对称性的破坏. 在这种意义上说，多种"破坏"的发现是不足为怪的. 不难想象，有一些"不可观测量"确实是基本的，但是另一些可能只是由于我们现有的测量手段

的局限性造成的.随着实验技术的改进,我们的观测领域也随着扩大.不是完全不可期望,关于那些假设上的"不可观测量"我们可能在某个时候对其中的一个进行探测会获得成功,从而在那里奠定对称破缺的基础.

表 9.1

不可观测量	对称性变换	守恒定律或选择定则
全同粒子间的差别	置换	B-E 统计或 F-D 统计
绝对空间位置	空间平移 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Delta}$	动量
绝对时间	时间平移 $t \to t + \tau$	能量
绝对空间方向	转动 $\hat{r} \to \hat{r}'$	角动量
绝对速度	洛伦兹变换	洛伦兹群的生成元
绝对的左(或绝对的右)	$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$	宇称
电荷的绝对符号	$e \to -e$ (或 $\psi \to e^{i\phi}\psi^\dagger$)	电荷共轭(或正反粒子共轭)宇称
电荷 Q 不同的态之间的相对相位	$\psi \to e^{iQ\theta}\psi$	电荷
重子数 N 不同的态之间的相对相位	$\psi \to e^{iN\theta}\psi$	重子数
轻子数 L 不同的态之间的相对相位	$\psi \to e^{iL\theta}\psi$	轻子数
p 和 n 的不同的相干混合态之间的差别	$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$	同位旋

这种发现的著名例子是物理规律在左右镜像变换下,在正反粒子共轭下和在时间流向的变化下,即过去变为未来、未来变为过去的不对称性.逐渐地我们搞清楚,所有这些假设的不可观测量实际上是可观测的.让我们来举例说明"不对称性和观测量"之间的关系.首先考虑左右不对称性,通常称为宇称不守恒.

当然,众所周知,即使在日常生活中,左右是彼此有差别的.例如,我们的心脏通常不会在右边.英语的"right"(右)也有正确的意思,而"sinister"(邪恶——译者注)按其拉丁语义来源意思是左.在英语中,我们说"right-left"(右左),但在汉语中说"左右":左总是放在右的前面.然而,这种日常生活中的不对称性可归结为或者是我们环境的偶然不对称性或者是初始条件的偶然不对称性.在 1957 年发现宇称不守恒之前,人们认为自然规律在左右变换下的对称性是当然的事.

人们可能会惊讶,在 1956 年之前实际上所有的物理学家不顾在日常

生活中左右的明显差别会去相信物理规律的左右对称性.

考虑两辆制作完全相似的小汽车,只是一个是另一个的镜像,一如图 9.2 中所示.小汽车 a 在左前座有位司机,油门在他的右边;而小汽车ɒ在右前座有位司机,油门在他的左边.两辆小汽车都灌有相同数量的汽油(为讨论方便起见,可以忽略汽油分子不是严格镜像对称的事实).现在假定小汽车 a 的司机按顺时针方向转动点火钥匙使汽车发动并用右脚踩下油门使汽车以一定速度,比如说 20 哩/小时向前运动.另一辆小汽车完全相同,只是左右互换而已;亦即,他按反时针方向转动点火钥匙,用左脚踩下油门,但保持油门以相同的倾斜度.小汽车ɒ将如何运动?请读者作一猜测.

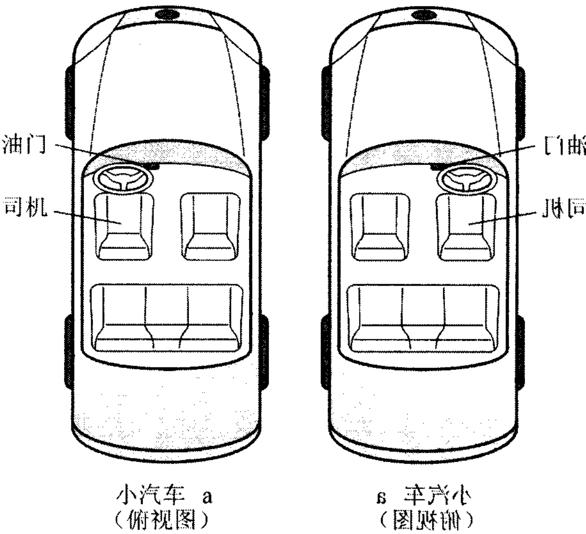


图 9.2 互为镜像的两辆小汽车的俯视图

或许你们的常识会说两辆汽车应当向前以相同速度运动.如果这样,你就恰恰和 1956 年前的物理学家一样了.除了一个是另一个的镜像外,两种全同的安排,在各个方面的表现应该完全相同(当然,原来的左右差别除外),这看来似乎是合理的.但恰恰发现这是错误的.自然规律的左右不对称的可能性在 1956 年首先是联系到 τ-θ 疑难在理论上 * 提出来的(见第 15

* Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1956, **104**:254.

章). 几个月之内左右不对称性在实验上,在β衰变* 与 π^- 和 μ^- 衰变** 中被发现. 原则上,上面两辆小汽车的例子中,我们可以安装比如说 Co^{60} β衰变作为发动机构的一部分. 这样就有可能制造两辆严格互为镜像的小汽车,但是可以以完全不同的方式运动. 小汽车 a 可以以一定的速度向前运动,而小汽车 ɐ 可以以全然不同的速度运动或者甚至向后运动. 这就是左右不对称性或宇称不守恒的实质.

一如我们将要讨论的,1957 年的一些发现不仅建立了左右不对称性,也建立了正电荷和负电荷之间的不对称性. 在标准的命名法中,左右不对称性叫做 *P* 破坏或宇称不守恒. 正电荷和负电荷之间的不对称性叫做 *C* 破坏或电荷共轭的破坏或有时也叫做正反粒子不对称性.

与 *P* 和 *C* 破坏的可能性被提出来的同时,对时间反演下和 *CP* 变换下的可能不对称性也产生了疑问***. 实际的实验证实在若干年之后才得到****.

由于不可观测量蕴涵着对称性,因此不对称的发现就意味着可观测量. 人们会问,与这些对称性破坏现象相联系的观测量是什么? 回想一下在我们的日常生活中电荷符号的规定只是一种约定而已. 因为我们碰巧把质子的电荷规定为正的,于是才把电子的电荷认为是负的;反过来也是对的. 现在随着不对称性的发现是否有可能给出一种绝对的定义呢? 我们能否在电的正负号之间或者在左右之间找到某种绝对的差异?

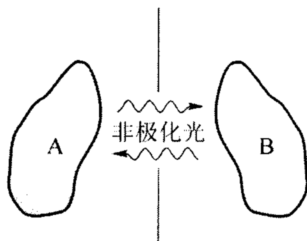


图 9.3　两个虚构的文明世界通过中性的非极化的讯号进行通信

作为一个例证,我们来考虑两个虚构的、先进的文明世界 A 和 B(见图 9.3). 假

---

* Wu C S, Ambler E, Hayward R W, Hoppes D D, Hudson R P. *Phys Rev*, 1957, **105**:1413.

** Garwin R L, Lederman L M, Weinrich M. *Phys Rev*, 1957, **105**:1415; Telegdi V L, Friedman A M. *Phys Rev*, 1957, **105**:1681.

*** Lee T D, Oehme R, Yang C N. *Phys Rev*, 1957, **106**:340.

**** Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, Turlay R, *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:138.

设这两个文明世界彼此互相隔离，然而他们掌握通信手段. 但只能通过中性的非极化讯号，比如非极化的光来通信. 经过几年这种方式的通信，这两个文明世界或许决定要加强他们的接触. 由于变得非常先进，他们认识到首先必须对

(i) 电荷的符号，

(ii) 右手螺旋的定义

取得一致. 为了证实在文明世界 A 中的质子是相应于文明世界 B 中的质子还是反质子，第一条是很重要的. 如果 A 中的质子和 B 中的相同，则紧密的接触才是可能的，否则会发生湮没. 如果这两个文明世界决定要有更为紧密的接触，比如说进行机器的贸易，那么右手螺旋的确定是非常重要的. 要是没有 P、C 和 CP 不对称性的发现，这会是很不好办的事. 现在，假定这两个文明世界和我们一样的先进，因此原则上他们是能够达成协议的.

首先，这两个文明世界应建立起高能物理实验室来，能够产生长寿命的中性 K_L^0 介子. 通过分析 K_L^0 在磁场下的三体半轻子衰变，他们可以很容易的把 $K_L^0 \to e^- + \pi^+ + \bar{\nu}$ 衰变和 $K_L^0 \to e^+ + \pi^- + \nu$ 分开. 他们会发现，虽然粒子 K_L^0 是中性而且是球对称的，然而这两种衰变的衰变率是不一样的，

$$\frac{(K_L^0 \to e^+ + \pi^- + \nu)}{(K_L^0 \to e^- + \pi^+ + \bar{\nu})} = 1.006\,48 \pm 0.000\,35. \tag{9.3}$$

这确是值得注意的，因为这意味着借助于衰变率的计数人们可以把 e^- 和 e^+ 区分开. 这样一来，在相反的两种电荷之间就存在一种绝对的差别了. 现在，对每一个文明世界来说只需鉴别出(9.3)式中较快的衰变方式，然后将终态 e 的电荷和“质子”的电荷相比较. 如果两个世界具有相同的相对电荷符号，则意味着他们是用相同的物质建造出来的.

其次，来看第二条任务：右手螺旋的定义. 这可以用测量 π 衰变：$\pi^+ \to e^+ + \nu$ 和 $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}$ 中的中微子或反中微子的自旋和动量的方向来解决. 虽然 $\pi^\pm$ 是球对称的，但在它的衰变中，每个 ν 定义了一个左手螺旋，每个 $\bar{\nu}$ 却定义了一个右手螺旋；即 ν 的螺旋性永远是 $-\frac{1}{2}$，而 $\bar{\nu}$ 的螺旋性则为 $+\frac{1}{2}$，一如图 9.4 中所示. 因此中微子和反中微子可用 3.8 节中的

二分量理论来描写*.

结果我们见到,这两个世界通过中性非极化的讯号的确能够给电荷的+号和一号以一种绝对的意义,对左右也是这样.

在衰变 $\pi^{\pm}\rightarrow e^{\pm}+\nu$(或$\bar{\nu}$) 中,我们注意到 C 和 P 对称性都是被破坏的,但如果我们把+和一交换,把左和右也交换,则看来似乎对称性又可复得(称为 CP 对称性). 然而在 K_L^0 衰变中 CP 对称性也是破坏的,这是因为在终态 $e^+\pi^-\nu$ 和 $e^-\pi^+\bar{\nu}$ 之间绝对衰变率存在差异. 我们将在后面第15章中看到,从 CP 不对称性和测量各种K衰变的振幅可以推断关于时间反演 T 的不对称性. 现在看来,物理规律对于 C, P, T, CP, PT 和 TC 都不对称了. 然而一切迹象表明 CPT 的联合作用(即粒子⇌反粒子,左⇌右和过去⇌未来)下仍然是个好的对称性.

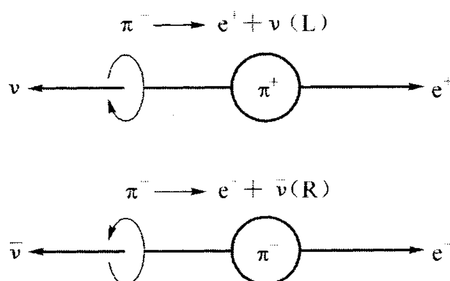


图 9.4 中微子是个纯粹的左手螺旋,而它的反粒子是个纯粹的右手螺旋

* Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1957, **105**:1671; Landau L, *Nucl Phys*, 1957, 3:127; Salam A. *Nuovo Cimento*, 1957, **5**:299.

第 10 章　U_1 对称性和 P、C 不变性

10.1　QED 例

量子理论中这些对称性运算的用法最好是用量子电动力学(QED)来举例说明. 这一节中我们来讨论轻子数守恒以及空间反射 P 和正反粒子共轭 C 下的不变性. 像第 6 章中一样,我们采用库仑规范. 因此独立的广义坐标是横向场 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{tr}}$ 和电子场 ψ. 它们的共轭动量 $\boldsymbol{\Pi}$ 和 $\mathscr{P}$ 由(6.21)—(6.22)式给出. 按照(6.30),有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \quad 和 \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} = 0.$$

定理. 由(6.55)式给出的 QED 哈密顿量 H 在下面的幺正变换下是不变的.

1.
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = H, \tag{10.1}$$

其中 θ 是任意实数,L 是由正规乘积

$$L \equiv \int :\psi^\dagger(x)\psi(x): \mathrm{d}^3 r \tag{10.2}$$

定义的轻子数算符. 和以前一样,式中 $x_\mu = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}t)$.

2.
$$CHC^\dagger = H \tag{10.3}$$

式中 C 是正反粒子共轭算符,它满足

$$C\boldsymbol{A}(x)C^\dagger = -\boldsymbol{A}(x),\ C\boldsymbol{\Pi}(x)C^\dagger = -\boldsymbol{\Pi}(x) \tag{10.4}$$

和

$$C\psi(x)C^{\dagger} = \eta_c \psi^c(x), \tag{10.5}$$

式中 η_c 是常数相因子，$|\eta_c| = 1$，ψ^c 的分量按第 3 章的符号为

$$\psi^c_\alpha(x) \equiv (\gamma_2)_{\alpha\lambda}\psi^{\dagger}_\lambda(x). \tag{10.6}$$

3.
$$PHP^{\dagger} = H, \tag{10.7}$$

式中 P 是空间反射(即宇称)算符，它满足

$$P\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)P^{\dagger} = -\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r},\ t),\ P\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ t)P^{\dagger} = -\boldsymbol{\Pi}(-\boldsymbol{r},\ t), \tag{10.8}$$

$$P\psi(\boldsymbol{r},\ t)P^{\dagger} = \eta_p \gamma_4 \psi(-\boldsymbol{r},\ t), \tag{10.9}$$

式中 η_p 是常数相因子，$|\eta_p| = 1$.

一如我们将会见到的，算符 $e^{iL\theta}$、C 和 P 都是幺正算符. 还由于(10.1)、(10.3)和(10.7)，它们都和时间 t 无关.

证. 1. 首先考虑 L 和 $\psi(x)$之间的对易子，由于(3.24)和(10.2)，有

$$[L,\ \psi(x)] = -\psi(x). \tag{10.10}$$

其次引入

$$\psi_\theta(x) \equiv e^{iL\theta}\psi(x)e^{-iL\theta}, \tag{10.11}$$

它的导数为

$$\frac{\partial \psi_\theta(x)}{\partial \theta} = e^{iL\theta} i[L,\ \psi(x)]e^{-iL\theta} = -i\psi_\theta(x). \tag{10.12}$$

方程(10.12)可以立刻积分出来，得到

$$\psi_\theta(x) = e^{-i\theta}\psi_{\theta=0}(x) = e^{-i\theta}\psi(x),$$

这导致

$$e^{iL\theta}\psi(x)e^{-iL\theta} = e^{-i\theta}\psi(x). \tag{10.13}$$

从定义(10.2)可见，L 是个厄米算符，故 $e^{iL\theta}$是幺正的. 由此，(10.13)的厄米共轭是

$$e^{iL\theta}\psi^{\dagger}(x)e^{-iL\theta} = e^{i\theta}\psi^{\dagger}(x). \tag{10.14}$$

令 Γ 是任意的 4×4 矩阵,如在第 3 章中引入的 γ_μ, $\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu$, …. 则有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\psi^\dagger\Gamma\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\psi^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta}\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} \\ &= \psi^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\psi = \psi^\dagger\Gamma\psi, \end{aligned} \tag{10.15}$$

其中我们用了 Γ 的矩阵元是 c 数,因此和希尔伯特空间的算符 L 对易的性质. 在 QED 中,电磁流为 $j_\mu = \mathrm{i}:\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi:$. 故

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}j_\mu(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = j_\mu(x). \tag{10.16}$$

此外,由于 L 只依赖于费米子场,因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\boldsymbol{A}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = \boldsymbol{A}(x) \quad 和 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\boldsymbol{\Pi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = \boldsymbol{\Pi}(x). \tag{10.17}$$

由于 $j_4 = \mathrm{i}\rho$ 和(6.16)式的 $A_0(\boldsymbol{r},\ t)$,我们又有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}A_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = A_0(x), \tag{10.18}$$

可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}j_\mu A_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = j_\mu A_\mu.$$

从而得到(10.1). 对(10.1)式进行微分,并令 $\theta = 0$, 有

$$[L,\ H] = 0, \tag{10.19}$$

这说明 L 和时间无关,即 L 是守恒的.

从傅里叶展开式(3.32),

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{p},\,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(a_{\boldsymbol{p},\,s}u_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + b^\dagger_{\boldsymbol{p},\,s}v_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}), \tag{10.20}$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = \sum_{\boldsymbol{p},\,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(&\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}a_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta}u_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}b^\dagger_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta}v_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}). \end{aligned} \tag{10.21}$$

它和(10.13)一起导出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L\theta}b^\dagger_{\boldsymbol{p},\,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}b^\dagger_{\boldsymbol{p},\,s} \tag{10.22}$$

和

$$e^{iL\theta}a_{p,s}e^{-iL\theta} = e^{-i\theta}a_{p,s},$$

其厄米共轭是

$$e^{iL\theta}a_{p,s}^{\dagger}e^{-iL\theta} = e^{i\theta}a_{p,s}^{\dagger}. \tag{10.23}$$

利用(3.32)—(3.33)式可立刻验证

$$L = \sum_{p,s}(a_{p,s}^{\dagger}a_{p,s} - b_{p,s}^{\dagger}b_{p,s}). \tag{10.24}$$

一如(3.40)那样,QED 的希尔伯特空间由一组基矢

$$|0\rangle,\ a_{p,s}^{\dagger}|0\rangle,\ b_{p,s}^{\dagger}|0\rangle,\ \alpha_{p,s}^{\dagger}|0\rangle,\ \cdots$$

$$|n_-e^-,\ n_+e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle = \prod_{i=1}^{n_-}\prod_{j=1}^{n_+}\prod_{k=1}^{n_\gamma}a_{p_i,s_i}^{\dagger}b_{p_j,s_j}^{\dagger}\alpha_{p_k,s_k}^{\dagger}\ |0\rangle, \tag{10.25}$$

所张成. 其中 $\alpha_{p,s}^{\dagger}$ 是(6.36)中给定的光子产生算符. 由于(3.41)和(10.24),

$$L\ |\ 0\rangle = 0. \tag{10.26}$$

此外,按照 3.5 节中的讨论,可见

$$L\ |\ n_-e^-,\ n_+e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle = (n_- - n_+)\ |\ n_-e^-,\ n_+e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle, \tag{10.27}$$

因此有

$$e^{iL\theta}\ |\ n_-e^-,\ n_+e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle = e^{i(n_- - n_+)\theta}\ |\ n_-e^-,\ n_+e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle, \tag{10.28}$$

此式也可以直接利用(10.22)—(10.23)得到,再取(10.28)对 θ 的微分并令 $\theta = 0$, 可又返回(10.27)式.

2. 其次考虑由(10.4)—(10.5)式中定义的 C 算符. 由傅里叶展开式,有

$$C\psi(x)C^{\dagger} = \sum_{p,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(Ca_{p,s}C^{\dagger}u_{p,s}e^{ip\cdot r} - Cb_{p,s}^{\dagger}C^{\dagger}v_{p,s}e^{-ip\cdot r}), \tag{10.29}$$

其中我们用了 $C^{\dagger}$ 是希尔伯特空间的算符因此和 $e^{ip\cdot r}$以及 c 数旋量 $u_{p,s}$、

$v_{p,s}$对易的性质. 利用同一展开式,可把(10.6)式写成:

$$\psi_\alpha^c(x) = (\gamma_2)_{\alpha\lambda}\psi_\lambda^\dagger(x) = \sum_{p,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

$$\cdot\,[a_{p,s}(\gamma_2)_{\alpha\lambda}(u_{p,s}^*)_\lambda e^{-ip\cdot r} + b_{p,s}(\gamma_2)_{\alpha\lambda}(v_{p,s}^*)_\lambda e^{ip\cdot r}].$$

由于(3.81),此式变为

$$\psi^c(x) = \sum_{p,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(b_{p,s}u_{p,s}e^{ip\cdot r} + a_{p,s}^\dagger v_{p,s}e^{-ip\cdot r}). \tag{10.30}$$

从(10.5),将(10.30)乘以 η_c 和(10.29)相等,得到

$$Ca_{p,s}C^\dagger = \eta_c b_{p,s}, \tag{10.31}$$

$$Cb_{p,s}^\dagger C^\dagger = \eta_c a_{p,s}^\dagger. \tag{10.32}$$

(10.31)式的厄米共轭为

$$Ca_{p,s}^\dagger C^\dagger = \eta_c^* b_{p,s}^\dagger. \tag{10.33}$$

同样地,利用(10.4)和傅里叶展开(6.32)—(6.33)和(6.36),对于光子的产生算符可导得

$$C\alpha_{p,s}^\dagger C^\dagger = -\alpha_{p,s}^\dagger. \tag{10.34}$$

在习题 10.2 中给出的公式表明:满足(10.32)—(10.34)式的幺正算符的确存在. 这里我们给一个简单的更为直接的证明. 考虑由(10.25)张成的希耳伯特空间中的一个线性变换

$$\begin{aligned} &|0\rangle \to |0\rangle,\ a_{p,s}^\dagger|0\rangle \to \eta_c^* b_{p,s}^\dagger|0\rangle, \\ &b_{p,s}^\dagger|0\rangle \to \eta_c a_{p,s}^\dagger|0\rangle,\ \alpha_{p,s}^\dagger|0\rangle \to -\alpha_{p,s}^\dagger|0\rangle,\ \cdots \\ &|n_- e^-, n_+ e^+, n_\gamma\gamma\rangle \to \eta_c^{*n_-}\eta_c^{n_+}(-)^{n_\gamma}|n_- e^+, n_+ e^-, n_\gamma\gamma\rangle. \end{aligned} \tag{10.35}$$

基矢全集的正交性显然保持不变,因此变换算符是幺正的. 此外,很容易看出这算符满足(10.32)—(10.34). 因此 C 存在,且有

$$C^\dagger C = 1. \tag{10.36}$$

此外,在(10.35)中,由于要求 $|0\rangle \to |0\rangle$, 从而已经固定了 C 的整个相因

子,即

$$C\mid 0\rangle=\mid 0\rangle. \tag{10.37}$$

其次,我们来建立 H 在 C 变换下的不变性. 由于(6.55)的自由哈密顿量可写成

$$H_0=\sum_{\boldsymbol{p},\,s=\pm\frac{1}{2}}E_p(a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s}+b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s})+\sum_{\boldsymbol{k},\,s=\pm 1}\omega\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\alpha_{\boldsymbol{k},s}, \tag{10.38}$$

式中 $\omega=|\boldsymbol{k}|$, $E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$, m 为物理电子的质量,由(10.30)—(10.34)立刻可见

$$CH_0C^\dagger=H_0. \tag{10.39}$$

根据我们的约定(3.7)—(3.11), $\gamma_2=\rho_2\sigma_2$ 是实数并且是对称矩阵. 因此

$$C\psi_\alpha C^\dagger=\eta_c(\gamma_2)_{\alpha\lambda}\psi^\dagger_\lambda \tag{10.40}$$

的厄米共轭是

$$C\psi^\dagger_\alpha C^\dagger=\eta^*_c(\gamma_2)_{\alpha\lambda}\psi_\lambda=\eta^*_c\psi_\lambda(\gamma_2)_{\lambda\alpha}. \tag{10.41}$$

已知电磁流算符是 $j_\mu=\mathrm{i}:\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi:$, 利用(10.40)—(10.41)可得

$$\begin{aligned}Cj_\mu C^\dagger&=\mathrm{i}:C\psi^\dagger_\alpha C^\dagger(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}C\psi_\beta C^\dagger:\\&=\mathrm{i}:\psi_\lambda(\gamma_2)_{\lambda\alpha}(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_2)_{\beta\lambda'}\psi^\dagger_{\lambda'}:\\&=-\mathrm{i}:\psi^\dagger_{\lambda'}(\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\gamma_2)_{\lambda\lambda'}\psi_\lambda:\end{aligned} \tag{10.42}$$

式中的负号是由于交换费米子算符 ψ_λ、$\psi^\dagger_{\lambda'}$ 引起的. 这是由于正规乘积的缘故,而不是由于它们的反对易子为零. 由于 γ_2、γ_4 是对称的,γ_1、γ_3 是反对称的,$\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\gamma_2$ 的转置是

$$\widetilde{\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\gamma_2}=\gamma_2\tilde{\gamma}_\mu\gamma_4\gamma_2=\gamma_4\gamma_\mu. \tag{10.43}$$

将(10.43)式代入(10.42),可推得

$$Cj_\mu C^\dagger=-j_\mu. \tag{10.44}$$

由于 $j_4=\mathrm{i}\rho$,可得

$$C\rho C^{\dagger}=-\rho. \tag{10.45}$$

它和(6.16)一起可得

$$CA_0C^{\dagger}=-A_0. \tag{10.46}$$

合并(10.4)和(10.46)可写

$$CA_{\mu}C^{\dagger}=-A_{\mu}, \tag{10.47}$$

从而得到

$$Cj_{\mu}A_{\mu}C^{\dagger}=j_{\mu}A_{\mu},$$

此式建立了电磁相互作用的正反粒子对称性.

3. 最后,我们来检验由(10.8)—(10.9)式定义的宇称算符 P. 将傅里叶展开式(10.20)代入(10.9),可得其左端变为

$$P\psi(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}=\sum_{\boldsymbol{p},s}(Pa_{\boldsymbol{p},s}P^{\dagger}u_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+Pb^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}P^{\dagger}v_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}), \tag{10.48}$$

考虑到(3.82),其右端可写成

$$\begin{aligned}\eta_p\gamma_4\psi(-\boldsymbol{r},t)&=\sum_{\boldsymbol{p},s}\eta_p(a_{\boldsymbol{p},s}\gamma_4u_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}\gamma_4v_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}})\\&=\sum_{\boldsymbol{p},s}\eta_p(a_{\boldsymbol{p},s}u_{-\boldsymbol{p},-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}-b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}v_{-\boldsymbol{p},-s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}})\\&=\sum_{\boldsymbol{p},s}\eta_p(a_{-\boldsymbol{p},-s}u_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}-b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},-s}v_{\boldsymbol{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}).\end{aligned} \tag{10.49}$$

因此,使(10.48)、(10.49)两式相等可得

$$Pb^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}P^{\dagger}=-\eta_pb^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},-s} \tag{10.50}$$

和

$$Pa_{\boldsymbol{p},s}P^{\dagger}=\eta_pa_{-\boldsymbol{p},-s}, \tag{10.51}$$

其厄米共轭为

$$Pa^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}P^{\dagger}=\eta_p^*a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},-s}. \tag{10.52}$$

同样地,利用(10.8)和傅里叶展开式(6.32)—(6.33),对光子的产生算符可推得

$$P\boldsymbol{\alpha}_{p}^{\dagger}P^{\dagger}=-\boldsymbol{\alpha}_{-p}^{\dagger}. \tag{10.53}$$

和(6.34)一样,这里有

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{p}^{\dagger}=0. \tag{10.54}$$

对于具有确定螺旋性的光子,可用(6.36)式定义的产生算符. 方程(10.53)取如下形式

$$P\alpha_{p,s}^{\dagger}P^{\dagger}=-\alpha_{-p,-s}^{\dagger}. \tag{10.55}$$

其次,考虑由(10.25)式张成的希尔伯特空间中的一个线性变换:

$$\begin{aligned}&|0\rangle\to|0\rangle,\ a_{p,s}^{\dagger}|0\rangle\to\eta_{p}^{*}a_{-p,-s}^{\dagger}|0\rangle,\\&b_{p,s}^{\dagger}|0\rangle\to-\eta_{p}b_{-p,-s}^{\dagger}|0\rangle,\ \alpha_{p,s}^{\dagger}|0\rangle\to-\alpha_{-p,-s}^{\dagger}|0\rangle,\end{aligned} \tag{10.56}$$

和(10.35)中的一样,这变换保持完全基矢集合的正交性,因此它是幺正算符. 可以立刻看出,变换算符满足(10.51)—(10.53). 故 P 存在,且有

$$P^{\dagger}P=1. \tag{10.57}$$

此外,由于(10.56)中的第一式,通过

$$P|0\rangle=|0\rangle \tag{10.58}$$

已经固定了 P 的整个相因子. 从(10.38)可见自由哈密顿量在 P 变换下是不变的,即

$$PH_{0}P^{\dagger}=H_{0}. \tag{10.59}$$

像在(10.42)中那样,电磁流算符 j_{μ} 在 P 的变换下由下式给出:

$$\begin{aligned}Pj_{\mu}(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}&=\mathrm{i}:P\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}\gamma_{4}\gamma_{\mu}P\psi(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}:\\&=\mathrm{i}:\psi^{\dagger}(-\boldsymbol{r},t)\gamma_{4}\gamma_{4}\gamma_{\mu}\gamma_{4}\psi(-\boldsymbol{r},t):\\&=\begin{cases}-j_{i}(-\boldsymbol{r},t) & \mu=i\neq 4\\+j_{4}(-\boldsymbol{r},t) & \mu=4,\end{cases}\end{aligned} \tag{10.60}$$

它和(10.8)一起,可导得

$$P\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}=\boldsymbol{j}(-\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r},t). \tag{10.61}$$

由于 $j_{4}=\mathrm{i}\rho$ 和 $\nabla^{2}A_{0}=-e\rho$,有

$$P\rho(\boldsymbol{r},t)A_{0}(\boldsymbol{r},t)P^{\dagger}=\rho(-\boldsymbol{r},t)A_{0}(-\boldsymbol{r},t). \tag{10.62}$$

此外,由于(10.9)及其厄米共轭,可得

$$P\psi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t)\beta\psi(\boldsymbol{r},\ t)P^\dagger = \psi^\dagger(-\boldsymbol{r},\ t)\beta\psi(-\boldsymbol{r},\ t). \tag{10.63}$$

综合(10.61)—(10.63)和(6.28),可见

$$PH_{\text{int}}P^\dagger = H_{\text{int}}. \tag{10.64}$$

方程(10.59)和(10.64)建立了 H 在 P 变换下的不变性.

说明. 在空间反射下,粒子的动量 $\boldsymbol{p}$ 变号,但自旋 $\boldsymbol{\sigma}$ 不变号,因此它的螺旋性 $s=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\to -s$, 这和(10.50)—(10.55)相一致. 对于一个非相对论粒子,其自旋和动量的耦合消失,可用

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{z}\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\sigma_z}\\ v_{-\boldsymbol{p},\sigma_z}\end{cases} = \sigma_z\begin{cases}u_{\boldsymbol{p},\sigma_z}\\ -v_{-\boldsymbol{p},\sigma_z}\end{cases} \tag{10.65}$$

来代替(3.27)式. 上式中 $\hat{z}$ 是沿 z 轴的单位矢量,它可任意选择;而 $\frac{1}{2}\sigma_z=\pm\frac{1}{2}$ 是粒子沿 $\hat{z}$ 方向的自旋. 相应地,(3.31) 式变为

$$S_{\boldsymbol{p}}(t) = \sum_{\sigma_z=\pm1}(a_{\boldsymbol{p},\sigma_z}(t)u_{\boldsymbol{p},\sigma_z} + b^\dagger_{-\boldsymbol{p},\sigma_z}(t)v_{-\boldsymbol{p},\sigma_z}). \tag{10.66}$$

从(10.52)—(10.53),可立刻推导出

$$\begin{aligned} Pa^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma_z}P^\dagger &= \eta_p^* a^\dagger_{-\boldsymbol{p},\sigma_z},\\ Pb^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma_z}P^\dagger &= -\eta_p b^\dagger_{-\boldsymbol{p},\sigma_z}, \end{aligned} \tag{10.67}$$

这清楚表明,自旋作为一种角动量是个赝矢量,从而在 P 变换下不变号.

10.2 应用

1. 弗里定理 考虑 n 个光子的状态

$$|\,n\gamma\rangle \equiv \prod_{i=1}^{n} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_i,s_i}\,|\,0\rangle. \tag{10.68}$$

从(10.34)和(10.37),我们有

$$C \mid n\gamma\rangle = (-1)^n \mid n\gamma\rangle. \tag{10.69}$$

由于 QED 的哈密顿量具有 C 不变性，因此由(5.20)—(5.21)定义的 $U(t, t_0)$矩阵满足

$$CU(t, t_0)C^\dagger = U(t, t_0). \tag{10.70}$$

在 $t\to\infty$和 $t_0\to-\infty$的极限下，$U(t, t_0)$变为 S 矩阵. 因此

$$CSC^\dagger = S. \tag{10.71}$$

考虑矩阵元

$$\langle n'\gamma \mid S \mid n\gamma\rangle, \tag{10.72}$$

由于(10.69)和(10.71)，这矩阵元等于

$$\langle n'\gamma \mid C^\dagger SC \mid n\gamma\rangle = (-1)^{n+n'}\langle n'\gamma \mid S \mid n\gamma\rangle, \tag{10.73}$$

若 $n+n'$ 为奇数，此式必须为零. 因此定理

$$\text{偶数个 } \gamma \not\rightleftharpoons \text{ 奇数个 } \gamma \tag{10.74}$$

对各级电磁相互作用都成立.

很容易将上面的选择定则推广到包括强作用在内的情形，倘使也假定强作用哈密顿量 H_{st}具有 C 不变性，即

$$CH_{st}C^\dagger = H_{st}. \tag{10.75}$$

因此，选择定则(10.74)对各级强相互作用以及电磁相互作用都成立.

从粒子性质表可以知道 π^0 的主要衰变方式是

$$\pi^0 \to 2\gamma. \tag{10.76}$$

从假设(10.75)和方程(10.69)，可知 π^0 的 $C=+1$，因此

$$\pi^0 \not\to \text{奇数个 } \gamma. \tag{10.77}$$

$\pi^0\to 3\gamma$ 的分支比的实验上限是 $<5\times10^{-6}$，这肯定了上面的选择定则，从而也支持了我们关于 H_{st}具有 C 不变性的假设的正确性.

说明.　在 QED 的情形中，C 不变性明确地建立了；而在强作情形中，这是个假定. 在任一情形中，从 C 不变性导致选择定则(10.74)和(10.77)的推理和哈密顿量的具体形式无关. 理论的普遍假设和精确的实

验结果之间的紧密联系使对称性的研究特别富有成效.

2. **电子偶素** 习惯上把电子偶素 e^+e^- 的状态标记为 $^{2S+1}L_J$,这里量子数 L 是轨道角动量,J 是总角动量,而 S 是总自旋,$S=0$ 时是单态,$S=1$ 时是三重态. 首先我们来证明这种态是

$$P=-(-1)^L \quad 和 \quad C=(-1)^{L+S} \tag{10.78}$$

的态.

证明. 由于电磁相互作用对 C 和 P 变换都是不变的,故我们可以绝热地减小电磁耦合常数 e^2 而不改变电子偶素 $^{2S+1}L_J$ 状态的 C 和 P 量子数. 在 e^2 非常小的极限下,用非相对论的描写就可以了,因此可以忽略自旋与轨道角动量之间的耦合以及虚光子的出现. 因此态矢为

$$\begin{aligned}|^{2S+1}L_J\rangle = \sum_{m,\sigma_z,\sigma_z'}\int & \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(\hat{p})x_m(\sigma_z,\sigma_z')C_{Mm}(p) \\ & \cdot a^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^\dagger_{-\boldsymbol{p},\sigma_z'}\mid 0\rangle.\end{aligned} \tag{10.79}$$

一如在(10.65)—(10.66)中的那样,式中的下标 σ_z 和 σ_z' 可取 ± 1,表示 e^- 和 e^+ 的自旋沿 z 轴的分量,对于单态自旋波函数 $\chi_m(\sigma_z,\sigma_z')$ 为反对称,对于三重态则为对称:

$$\chi_m(\sigma_z,\sigma_z')=(-1)^{S+1}\chi_m(\sigma_z',\sigma_z). \tag{10.80}$$

在文献中对三重态常写成:对 $m=1$, $\chi_m=\uparrow_-\uparrow_+$;对 $m=0$, $(\uparrow_-\downarrow_+ + \downarrow_-\uparrow_+)/\sqrt{2}$;对 $m=-1$, $\downarrow_-\downarrow_+$. 对单态,只有 $m=0$,相应的 $\chi_m=(\uparrow_-\downarrow_+ - \downarrow_-\uparrow_+)/\sqrt{2}$. 其中下标 $-$ 指 e^-,$+$ 指 e^+. 在(10.79)式中,e^- 和 e^+ 的动量分别为 $\boldsymbol{p}$ 和 $-\boldsymbol{p}$, $\hat{p}=\boldsymbol{p}/p$, $p=|\boldsymbol{p}|$; Y_{LM} 表示(1.38)—(1.40)所给出的球谐函数,它满足

$$Y_{LM}(-\hat{p})=(-1)^L Y_{LM}(\hat{p}). \tag{10.81}$$

电子偶素的总角动量的 z 分量为 $J_z=M+m$; $C_{Mm}(p)$ 表示相应的克莱布什-戈丹系数乘径向函数,它与 $\boldsymbol{p}$ 的方向无关.

现在将希尔伯特空间算符 P 作用于态矢(10.79),

$$P\,|^{2S+1}L_J\rangle = \sum_{m,\sigma_z,\sigma_z'}\int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(\hat{p})\chi_m(\sigma_z,\sigma_z')C_{Mm}(p)$$

$$\cdot\, Pa^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle. \tag{10.82}$$

由于(10.58)和(10.67),

$$\begin{aligned} Pa^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle &= Pa^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} P^{\dagger} P b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} P^{\dagger} P \mid 0\rangle \\ &= - a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle, \end{aligned} \tag{10.83}$$

它和(10.82)一起,给出

$$\begin{aligned} P \mid {}^{2S+1}L_J\rangle = - \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z} \int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(\hat{p}) \chi_m(\sigma_z, \sigma'_z) C_{Mm}(p) \\ \cdot\, a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle. \end{aligned} \tag{10.84}$$

更换下标 $-\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}$,利用(10.81)可将(10.84)重写为

$$\begin{aligned} P \mid {}^{2S+1}L_J\rangle &= - \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z} \int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(-\hat{p}) \chi_m(\sigma_z, \sigma'_z) C_{Mm}(p) \\ &\quad \cdot\, a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle \\ &= -(-1)^L \mid {}^{2S+1}L_J\rangle, \end{aligned} \tag{10.85}$$

此式给出(10.78)中的第一个方程.

利用(10.32)—(10.33)和(10.37),有

$$\begin{aligned} Ca^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle &= Ca^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} C^{\dagger} C b_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} C^{\dagger} C \mid 0\rangle \\ &= b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle \\ &= - a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} \mid 0\rangle. \end{aligned} \tag{10.86}$$

因此将 C 作用于态矢(10.79),给出

$$\begin{aligned} C \mid {}^{2S+1}L_J\rangle &= \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z} \int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(\hat{p}) \chi_m(\sigma_z, \sigma'_z) C_{Mm}(p) \\ &\quad \cdot\, Ca^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle \\ &= - \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z} \int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(\hat{p}) \chi_m(\sigma_z, \sigma'_z) C_{Mm}(p) \\ &\quad \cdot\, a^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} \mid 0\rangle \\ &= - \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z} \int \mathrm{d}^3 p Y_{LM}(-\hat{p}) \chi_m(\sigma'_z, \sigma_z) C_{Mm}(p) \end{aligned}$$

$$\cdot\, a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},\sigma_z} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{p},\sigma'_z} \mid 0\rangle. \tag{10.87}$$

由于(10.80)和(10.81),此式为

$$(-1)^{L+S} \mid {}^{2S+1}L_J\rangle,$$

从而确立了(10.78)中的第二个方程.

合(10.78)和(10.69)式,导致选择定则:

$$L+S\ \text{为偶的态} \nrightarrow \text{奇数个}\ \gamma \tag{10.88}$$

这一选择定则可应用于${}^1S_0$, ${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3P_2$, …等态.

$$L+S\ \text{为奇的态} \nrightarrow \text{偶数个}\ \gamma \tag{10.89}$$

这可应用于${}^3S_1$, ${}^1P_1$, …等态.

说明. 有个简单的方法来记忆(10.78)的两个方程.按照(10.67), e^+和e^-之间的相对宇称为-1;在空间反射下,自旋是不变的,而$\boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p}$,因此$Y_{LM}\to(-1)^L Y_{LM}$.合起来有$P=-(-1)^L$.

在C变换下,变换e^+和e^-;由于轨道角动量给出因子$(-1)^L$,自旋部分给出因子$(-1)^{S+1}$,又由于费米统计给出因子-1,合起来有$C=(-1)^L(-1)^{S+1}(-1)=(-1)^{L+S}$.

3. **零自旋粒子$\to 2\gamma$的衰变**　考虑零自旋粒子的静止系.在2γ末态中,二光子的动量是相等的,每个γ有一个极化方向,可定义为它的电场方向.我们将证明

$$\text{对标量粒子}(P=+1),\text{这两个}\ \gamma\ \text{的极化方向是平行的} \tag{10.90}$$

$$\text{对赝标粒子}(P=-1),\text{这两个}\ \gamma\ \text{的极化方向是垂直的} \tag{10.91}$$

证明. 在2γ的质心系中,2γ的任一态可写成

$$\mid 2\gamma\rangle = \int d^3 p \chi_{ij}(\boldsymbol{p})\alpha_i^{\dagger}(\boldsymbol{p})\alpha_j^{\dagger}(-\boldsymbol{p}) \mid 0\rangle, \tag{10.92}$$

式中$\alpha_i^{\dagger}(\boldsymbol{p})$表示在(6.32)—(6.33)中光子的产生算符$\boldsymbol{\alpha}_p^{\dagger}$的第$i$个分量.从(6.34)可得

$$p_i\alpha_i^{\dagger}(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{10.93}$$

这里和以前一样,对重复指标求和.对于(10.92)自旋为零时,函数$\chi_{ij}(\boldsymbol{p})$

在空间转动下必须是二阶张量. 由于它只依赖于一个矢量 $\boldsymbol{p}$,故 $\chi_{ij}(\boldsymbol{p})$的最一般的形式为

$$\chi_{ij}(\boldsymbol{p}) = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ijk}p_k + Cp_ip_j, \tag{10.94}$$

式中 δ_{ij}是克罗内克符号,而

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{当 } ijk \text{ 为 } 1、2、3 \text{ 的偶置换}, \\ -1, \text{当 } ijk \text{ 为 } 1、2、3 \text{ 的奇置换}, \\ \ \ 0, \text{其他情形}. \end{cases} \tag{10.95}$$

A, B, C 是$|\boldsymbol{p}|$的函数. (10.94)式中的 Cp_ip_j 一项,由于(10.93)的缘故它对(10.92)式的$|2\gamma\rangle$态不作贡献;故 $\chi_{ij}(\boldsymbol{p})$可简化为

$$\chi_{ij}(\boldsymbol{p}) = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ijk}p_k. \tag{10.96}$$

考虑到(10.53),在现在采用的符号下我们有

$$Pa_i^\dagger(\boldsymbol{p})P^\dagger = -a_i^\dagger(-\boldsymbol{p}). \tag{10.97}$$

因此,

$$\begin{aligned} P\mid 2\gamma\rangle &= \int d^3p\chi_{ij}(\boldsymbol{p})Pa_i^\dagger(\boldsymbol{p})P^\dagger Pa_j^\dagger(-\boldsymbol{p})P^\dagger P\mid 0\rangle \\ &= \int d^3p\chi_{ij}(\boldsymbol{p})a_i^\dagger(-\boldsymbol{p})a_j^\dagger(\boldsymbol{p})\mid 0\rangle \\ &= \int d^3p\chi_{ij}(-\boldsymbol{p})a_i^\dagger(\boldsymbol{p})a_j^\dagger(-\boldsymbol{p})\mid 0\rangle, \end{aligned} \tag{10.98}$$

这说明对于 $P=\pm 1$ 的态,有

$$\chi_{ij}(-\boldsymbol{p}) = \pm\chi_{ij}(\boldsymbol{p}).$$

因此得到

$$\chi_{ij}(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} A\delta_{ij}, & P=1, \\ B\epsilon_{ijk}p_k, & P=-1. \end{cases} \tag{10.99}$$

根据傅里叶展开式(6.33), $\boldsymbol{\alpha}^\dagger$ 的矢量方向相应于 $\boldsymbol{E}$ 的方向. 方程(10.99)说明,当 $P=+1$ 时两个光子的极化是平行的,当 $P=-1$ 时则是垂直的. 这就证明了(10.90)—(10.91).

假定 π^0 是零自旋的,我们可以利用在

$$\pi^0 \to 2\gamma$$

中末态二光子的极化方向来确定 π^0 的宇称. 在

$$\pi^0 \to \gamma_a + \gamma_b \to (e_a^+ + e_a^-) + (e_b^+ + e_b^-)$$

衰变中,由 $e_a^+ e_a^-$ 确定的平面包含光子 γ_a 的电场矢量(在 $e_b^+ e_b^-$ 和 γ_b 间也有同样的关系). 契诺夫斯基和斯泰因贝格尔* 通过由 $e_a^+ e_a^-$ 和 $e_b^+ e_b^-$ 确定的两平面的相对取向确定 π^0 是赝标介子;亦即 $P_{\pi^0} = -1$. 只要强作用和电磁作用是 P 不变的,这结论是成立的.

说明. 从唯象方面也可以导出和(10.90)—(10.91)同样的结论. 可用一自旋为零的场 ϕ 代表介子,考虑 ϕ 和 2γ 的分别记为 a 和 b 的电磁场之间的有效拉氏密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$. 从洛伦兹不变性,若 ϕ 是标量,则

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} \propto \phi F_{\mu\nu}(\mathrm{a}) F_{\mu\nu}(\mathrm{b}) \propto \phi[\boldsymbol{E}(\mathrm{a}) \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{b}) - \boldsymbol{B}(\mathrm{a}) \cdot \boldsymbol{B}(\mathrm{b})], \tag{10.100}$$

若 ϕ 为赝标量,则

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} \propto \phi \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} F_{\mu\nu}(\mathrm{a}) F_{\lambda\delta}(\mathrm{b}) \propto \phi[\boldsymbol{E}(\mathrm{a}) \cdot \boldsymbol{B}(\mathrm{b}) + \boldsymbol{B}(\mathrm{a}) \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{b})], \tag{10.101}$$

式中

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = \begin{cases} +1, \text{当 } \mu\nu\lambda\delta \text{ 为 } 1, 2, 3, 4 \text{ 的偶置换}, \\ -1, \text{当 } \mu\nu\lambda\delta \text{ 为 } 1, 2, 3, 4 \text{ 的奇置换}, \\ \ \ 0, \text{其他情形}. \end{cases} \tag{10.102}$$

显然(10.100)和(10.101)式分别给出(10.90)和(10.91)式.

4. **自旋为 1 的粒子 $\not\to 2\gamma$** 我们尝试来构造一个在质心系中总角动量为 $J = 1$ 的 2γ 态. 这种态在空间转动下的变换必须像矢量一样;如同矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v_i 那样,它必须带有指标 $i = 1, 2, 3$,总的形成 $J = 1$ 的三个态. 因此可写

---

* Chinovsky W, Steinberger J. *Phys Rev*, 1954, **95**: 1561 以及其中所引的文献.

$$|2\gamma\rangle_i = \int d^3 p \chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) a_j^\dagger(\boldsymbol{p}) a_k^\dagger(-\boldsymbol{p}) |0\rangle, \tag{10.103}$$

式中 $\chi_{ijk}(\boldsymbol{p})$在空间转动下是个三阶张量. 由于 χ_{ijk}只依赖于一个矢量 $\boldsymbol{p}$,故其最一般形式为

$$\chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) = A\varepsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + Cp_j\delta_{ik} + Dp_k\delta_{ij} + B'p_i\varepsilon_{jkl}p_l + C'p_j\varepsilon_{kil}p_l + D'p_k\varepsilon_{ijl}p_l + Ep_ip_jp_k, \tag{10.104}$$

其中 A, B, …, D', E 只是$|\boldsymbol{p}|$的函数. 由于 $p_i a_i^\dagger(\boldsymbol{p})=0$,上式中 C, D, C', D'和E 诸项对(10.103)的 2γ 态不作贡献. 故上式可简化为

$$\chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) = A\varepsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + B'p_i\varepsilon_{jkl}p_l. \tag{10.105}$$

它满足

$$\chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) = -\chi_{ikj}(-\boldsymbol{p}). \tag{10.106}$$

另一方面,由于光子遵从玻色统计,故在(10.103)中可将二产生算符对易:

$$|2\gamma\rangle_i = \int d^3 p \chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) a_k^\dagger(-\boldsymbol{p}) a_j^\dagger(\boldsymbol{p}) |0\rangle,$$

将 $\boldsymbol{p}$ 改为$-\boldsymbol{p}$,将 j, k 改为k, j,则变为

$$|2\gamma\rangle_i = \int d^3 p \chi_{ikj}(-\boldsymbol{p}) a_j^\dagger(\boldsymbol{p}) a_k^\dagger(-\boldsymbol{p}) |0\rangle. \tag{10.107}$$

将(10.103)和(10.107)相加,利用(10.106)可得

$$\begin{aligned} |2\gamma\rangle_i &= \int d^3 p \tfrac{1}{2} [\chi_{ijk}(\boldsymbol{p}) + \chi_{ikj}(-\boldsymbol{p})] a_j^\dagger(\boldsymbol{p}) a_k^\dagger(-\boldsymbol{p}) |0\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{10.108}$$

这表示将 2γ 置于总角动量为 $J=1$ 的态是不可能的. 因此,一个自旋为 1 的粒子$\nrightarrow 2\gamma$. 在电子偶素的衰变中,具有 $J=1$ 的态必须遵从选择定则

$${}^{2S+1}L_{J=1} \nrightarrow 2\gamma. \tag{10.109}$$

但这种态可以衰变成 3γ,

$${}^{2S+1}L_{J=1} \rightarrow 3\gamma. \tag{10.110}$$

同样的,从 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 衰变我们知道 π^0 的自旋$\neq 1$. 稍后在第 13 章,我们将

证明 π 介子的自旋的确为零.

10.3 一般讨论

考虑一个普遍的系统,其哈密顿量为

$$H = H_0 + H_{\text{int}}.$$

在幺正变换 $\mathscr{S}$下是不变的;即

$$\mathscr{S}H_0\mathscr{S}^\dagger = H_0, \quad \mathscr{S}H_{\text{int}}\mathscr{S}^\dagger = H_{\text{int}} \tag{10.111}$$

和

$$\mathscr{S}^\dagger\mathscr{S} = 1. \tag{10.112}$$

例如,$\mathscr{S}$可以是 $e^{iL\theta}$,可以是 C 或 P. 从(10.111)—(10.112)可得

$$\mathscr{S}H_0 = H_0\mathscr{S} \quad 和 \quad \mathscr{S}H_{\text{int}} = H_{\text{int}}\mathscr{S}. \tag{10.113}$$

考虑到(5.1)和(5.6),这意味着 $\mathscr{S}$在海森伯或相互作用表象中都是和时间 t 无关的. 此外,(5.20)—(5.21)定义的相互作用表象中的 $U(t, t_0)$矩阵和 $\mathscr{S}$对易,

$$[\mathscr{S}, U(t, t_0)] = 0. \tag{10.114}$$

记自由哈密顿量 H_0 的本征态为 $|n\rangle_{\text{free}}$,

$$H_0 \mid n\rangle_{\text{free}} = E_n \mid n\rangle_{\text{free}}. \tag{10.115}$$

按(6.58)和(6.60),存在相应于总哈密顿量的本征态$|n\rangle_{\text{phys}}$,它和$|n\rangle_{\text{free}}$的联系为

$$\mid n\rangle_{\text{phys}} \equiv U(t, -\infty) \mid n\rangle_{\text{free}}. \tag{10.116}$$

由(10.113),矩阵 H_0 和 $\mathscr{S}$可同时对角化. 故(10.115)中的态$|n\rangle_{\text{free}}$可选为

$$\mathscr{S}\mid n\rangle_{\text{free}} = s \mid n\rangle_{\text{free}},$$

式中 s 是本征值. 由于(10.114)和(10.116),有

$$\mathscr{S} | n\rangle_{\text{phys}} = U(t, -\infty)\mathscr{S} | n\rangle_{\text{free}} = s | n\rangle_{\text{phys}}.$$

故与 H_{int} 的具体形式无关. 不变性假设(10.111)意味着物理态 $|n\rangle_{\text{phys}}$ 的变换性质是完全由相应的自由态 $|n\rangle_{\text{free}}$ 的变换性质决定的,这就大大简化了数学分析.

10.4 重子数和轻子数

对于每一物理的单粒子态,我们给重子数算符 N 赋予以下的本征值:

$$\begin{aligned}&\text{对于单个重子态,例如 p, n, }\Lambda, \cdots, N = 1;\\&\text{对于单个反重子态,例如}\bar{\text{p}}, \bar{\text{n}}, \bar{\Lambda}, \cdots, N = -1;\\&\text{对于所有其他单粒子态,例如 }e^{\pm}, \pi^{\pm}, \gamma, \cdots, N = 0.\end{aligned} \tag{10.117}$$

对于多粒子态,其重子数由相应的代数和 $\sum N_i$ 给定. $N = 0$ 的强子,称为介子,否则称为重子或反重子.

按定义,N 是个厄米算符,因为其本征值都是实数(实际上是整数). 令 θ 是实数,算符

$$U = e^{iN\theta} \tag{10.118}$$

是幺正算符. 总哈密顿量 H 在 U 变换下不变的假设:

$$UHU^{\dagger} = H, \tag{10.119}$$

保证了

$$[N, H] = 0, \tag{10.120}$$

这点只要将(10.119)对 θ 取微分即可得到证实,因此 N 是守恒的. 反过来也成立,即从(10.120)可得(10.119). 从(10.118),有

$$\begin{aligned}U | e\rangle &= | e\rangle, & U | p\rangle &= e^{i\theta} | p\rangle,\\U | n\rangle &= e^{i\theta} | n\rangle, & U | 2p\rangle &= e^{2i\theta} | 2p\rangle, \cdots.\end{aligned}$$

若 N 是守恒量,则由于 p 是 $N = 1$ 的最低质量态,它必须是稳定的;例如

$$p \nrightarrow e^+ + \gamma \quad 和 \quad p \nrightarrow \mu^+ + \gamma.$$

因此,质子的稳定性是受重子数守恒约束的.

同样的,我们可以规定 e 轻子数 L_e, μ 轻子数 L_μ:

	μ^-	μ^+	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	e^-	e^+	ν_e	$\bar{\nu}_e$	其他
L_μ	+1	−1	+1	−1	0	0	0	0	0
L_e	0	0	0	0	+1	−1	+1	−1	0

多粒子态的轻子数仍是其组成部分的轻子数的代数和. 因此,L_μ 和 L_e 的守恒意味着:例如在 π^+ 的衰变中,随着末态中荷电轻子的不同,中微子可以是 ν_μ 或 ν_e:

$$\pi^+ \to \begin{cases} \mu^+ + \nu_\mu. & (10.121) \\ e^+ + \nu_e. & (10.122) \end{cases}$$

同样的,在其反粒子 π^- 的衰变中,我们有

$$\pi^- \to \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}_\mu. & (10.123) \\ e^- + \bar{\nu}_e. & (10.124) \end{cases}$$

如果我们愿意,我们可将(10.121)—(10.124)看成这些中微子和反中微子的定义. 由于强作用能引起虚跃迁 $p \rightleftarrows n + \pi^+$ 和 $n \rightleftarrows p + \pi^-$, 在$\mu^-$俘获和 β 衰变中应该有同一相应类型的中微子和反中微子.

$$\mu^- + p \to n + \nu_\mu \quad 和 \quad n \to p + e^- + \bar{\nu}_e. \qquad (10.125)$$

同样的,在 μ 衰变中有

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad 和 \quad \mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e.$$

由此,L_μ 和 L_e 的守恒导致下面的选择定则:

$$\mu^- \nrightarrow e^- + \gamma, \qquad (10.126)$$

$$\nu_\mu + n \nrightarrow e^- + p, \qquad (10.127)$$

$$Z \nrightarrow (Z+2) + e^- + e^-. \qquad (10.128)$$

式(10.126)和(10.127)只说明轻子数的差 $L_\mu - L_e$ 是守恒的;不存在无中微子的双 β 衰变(10.128)给出 L_e守恒的直接证据. 合在一起,它们提供

了这两种轻子数守恒的实验证明[关于 L_τ 的讨论,见 21.1 节].

两种中微子 $\nu_\mu \neq \nu_e$ 的假设在历史上是引进来"解释" $\mu \to e + \gamma$ 衰变非常小的分支比上限的:

$$\frac{\text{衰变率}(\mu^- \to e^- + \gamma)}{\text{衰变率}(\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e)} < 10^{-8},$$

并且也提出了高能中微子实验的建议*,这一方面也是为了证实这个假设而提出来的. 对(10.127)和容许过程 $\nu_\mu + n \to \mu^- + p$ 的反应率进行比较,莱德曼、施瓦茨、斯泰因贝格尔和他们的同事们**在 1962 年用高能中微子建立起两种中微子假设的正确性;这后来促成做现代高能实验物理的规模巨大的形式.

除重子数 N 和轻子数 L_μ 和 L_e 守恒外,我们还有熟知的电荷 Q 的守恒. 与那些相乘性守恒的宇称 P 和正反粒子共轭 C 不同,N、L_μ、L_e 和 Q 都是相加性守恒的. 电荷的单位是一可测量,一如熟知的精细结构常数 $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ 所表明的. 与这相反,N、L_μ 和 L_e 的单位是可以任意选定的. 这是由于 Q 可产生库仑场,而至今我们知道 N 或 L_μ, L_e 都不是物理场的源. 这种差异可能是个非常深刻的差异***. 这使人已去猜想电荷守恒可能确实是严格的,但 N、L_μ 和 L_e 的守恒只是近似的. 由此,非常慢的像 $p \rightleftharpoons e^+ + \pi^0$, $\nu_\mu \rightleftharpoons \nu_e$ 等的跃迁可能是允许的[现今质子寿命的极限****是 $> 2 \times 10^{30}$ 年].

习题 10.1.　试讨论 N、Q、L_μ 和 L_e 守恒的实验基础.

习题 10.2.　试证在 QED 中,若定义

$$C \equiv \exp[\mathrm{i}\pi \sum (\alpha^\dagger_{p,s}\alpha_{p,s} + a^\dagger_{p,s}a_{p,s})]$$

---

* Lee T D, Yang C N. *Phys Rev Lett*, 1960, **4**:307; Schwartz M. *ibid*, 306.

** Danby G, Gaillard J-M, Goulianos K, Lederman L M, Mistry N, Schwartz M, Steinberger J. *Phys Rev Lett*, 1962, **9**:36.

*** Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1955, **98**:1501.

**** Landé K, et al. to be published in the proceedings of the Neutrino '**80** conference, Erice.

$$\cdot \exp\left[\frac{\pi}{2}\sum(b_{p,s}^{\dagger}a_{p,s}-a_{p,s}^{\dagger}b_{p,s})\right],$$

其中$\alpha_{p,s}$、$a_{p,s}$和$b_{p,s}$分别是动量为$\boldsymbol{p}$,螺旋性为s的γ、e^-和e^+的湮没算符,则C满足

$$C\alpha_{p,s}C^{\dagger}=-\alpha_{p,s},$$

$$Ca_{p,s}C^{\dagger}=b_{p,s},$$

$$Cb_{p,s}C^{\dagger}=a_{p,s},$$

$$C^{\dagger}C=C^2=1,$$

因此C是电荷共轭算符.

提示:定义$M_{\theta}\equiv\exp[\theta\sum(b_{p,s}^{\dagger}a_{p,s}-a_{p,s}^{\dagger}b_{p,s})]$. 通过微分证明

$$M_{\theta}a_{p,s}M_{\theta}^{\dagger}=\cos\theta a_{p,s}+\sin\theta b_{p,s},$$

$$M_{\theta}b_{p,s}M_{\theta}^{\dagger}=-\sin\theta a_{p,s}+\cos\theta b_{p,s}.$$

习题 10.3. 任一三维转动$r_i\rightarrow r'_i=u_{ij}r_j$可用一二维转动$\boldsymbol{\theta}$代表. 这里$\boldsymbol{\theta}$的大小是转动角,方向是指转动轴(约定当$\boldsymbol{\theta}\rightarrow 0$时,$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}$).

(i) 试证对自旋为1/2的场,转动算符$e^{i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta}}$满足

$$\exp(-i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta})\psi(\boldsymbol{r},t)\exp(i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta})=e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(\boldsymbol{r}',t).$$

式中$\boldsymbol{J}$是(3.62)式给出的角动量算符.

(ii) 验证库仑规范中QED的哈密顿量在下面的幺正变换R下是不变的.

$$R\psi(\boldsymbol{r},t)R^{\dagger}=e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(\boldsymbol{r}',t),$$

$$RA_i(\boldsymbol{r},t)R^{\dagger}=u_{ij}A_j(\boldsymbol{r}',t)$$

和

$$R\Pi_i(\boldsymbol{r},t)R^{\dagger}=u_{ij}\Pi_j(\boldsymbol{r}',t).$$

试明显地给出在动量空间中R变换下湮没算符和产生算符的变换性质.

注意,若写$R=e^{-i\boldsymbol{\mathcal{J}}\cdot\boldsymbol{\theta}}$,则$\boldsymbol{\mathcal{J}}$是总角动量算符.

习题 10.4. 考虑在(z,t)平面内的洛伦兹变换$x'_{\mu}=u_{\mu\nu}x_{\nu}$,其中$u_{11}=u_{22}=1$, $u_{33}=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}$等等. 在相互作用表象中,场算符的相应

变换为

$$L\psi(x)L^{-1}=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta\gamma_3\gamma_4\right)\psi(x')$$

和

$$LA_\mu(x)L^{-1}=u_{\mu\nu}A_\nu(x'),$$

其中

$$\cosh\theta=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

试证：

(i) 虽则 4×4 矩阵 $\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta\gamma_3\gamma_4\right)$不是幺正矩阵，但 L 是幺正的.

(ii) 相互作用拉氏密度 $ej_\mu A_\mu$ 具有明显的洛伦兹不变性，其中 $j_\mu=\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi$.

(iii) 算符 $\psi^c(x)$ 在任意洛伦兹变换下和 $\psi(x)$ 一样变，这里

$$\psi^c_\alpha(x)\equiv(\gamma_2)_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\beta(x).$$

说明.　使用相互作用表象只是为了方便，但并非必要.

第 11 章　同位旋和 G 宇称

11.1　同位旋

同位旋的概念是海森伯在 1930 年代初为了描写质子和中子间强相互作用的近似电荷无关性而引进的. 由唯象的观点,我们可采取质子场 ψ_p 和中子场 ψ_n 的习惯做法. 合在一起它们可用一列矩阵代表:

$$\psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

每个场又是一个量子化的狄拉克旋量算符,为简捷起见它的指标没有写出来. 虽然如同我们将要在第 17 章以后所讨论的,质子或中子都不是基本的,但就其对称性质来说用唯象的场算符来代表它们是足够的.

1. U_2 **对称性**　考虑下面的线性变换:

$$\psi \rightarrow \psi' = u\psi, \tag{11.2}$$

式中 u 是个 2×2 矩阵. 为了保持反对易关系

$$\{\psi_i(\boldsymbol{r}, t), \psi_j(\boldsymbol{r}', t)\} = \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

矩阵 u 必须是幺正的. 其中 i 和 j 可取 p 或 n. 由所有这种 u 构成的群是 U_2 群. 我们很快就会看到,在希尔伯特空间中相应于每个 u 存在一个幺正算符 U 使得

$$U\psi(x)U^\dagger = u\psi(x). \tag{11.3}$$

可将 ψ_p 和 ψ_n 用傅里叶展式(3.32)表示

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{k,s}(a_{k,s}(p)u_{k,s}e^{ik\cdot r} + b_{k,s}^\dagger(p)v_{k,s}e^{-ik\cdot r}),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k,s} (a_{k,s}(n) u_{k,s} e^{ik \cdot r} + b_{k,s}^{\dagger}(n) v_{k,s} e^{-ik \cdot r}). \tag{11.4}$$

代入(11.3),得到

$$U \begin{bmatrix} a_{k,s}(p) \\ a_{k,s}(n) \end{bmatrix} U^{\dagger} = u \begin{bmatrix} a_{k,s}(p) \\ a_{k,s}(n) \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

和

$$U \begin{bmatrix} b_{k,s}^{\dagger}(p) \\ b_{k,s}^{\dagger}(n) \end{bmatrix} U^{\dagger} = u \begin{bmatrix} b_{k,s}^{\dagger}(p) \\ b_{k,s}^{\dagger}(n) \end{bmatrix}. \tag{11.6}$$

将 u 明确写成

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

并分别称 $Ua_{k,s}(p)U^{\dagger}$ 和 $Ua_{k,s}(n)U^{\dagger}$ 为 $a'_{k,s}(p)$和 $a'_{k,s}(n)$. 从(11.5)有

$$a'_{k,s}(p) = u_{11} a_{k,s}(p) + u_{12} a_{k,s}(n)$$

和

$$a'_{k,s}(n) = u_{21} a_{k,s}(p) + u_{22} a_{k,s}(n).$$

它们的厄米共轭是

$$\begin{aligned} a'^{\dagger}_{k,s}(p) &= u_{11}^* a_{k,s}^{\dagger}(p) + u_{12}^* a_{k,s}^{\dagger}(n), \\ a'^{\dagger}_{k,s}(n) &= u_{21}^* a_{k,s}^{\dagger}(p) + u_{22}^* a_{k,s}^{\dagger}(n), \end{aligned} \tag{11.8}$$

或简单地写成

$$U \begin{bmatrix} a_{k,s}^{\dagger}(p) \\ a_{k,s}^{\dagger}(n) \end{bmatrix} U^{\dagger} = u^* \begin{bmatrix} a_{k,s}^{\dagger}(p) \\ a_{k,s}^{\dagger}(n) \end{bmatrix}. \tag{11.9}$$

同样地,可称 $Ub_{k,s}^{\dagger}(p)U^{\dagger}$ 和 $Ub_{k,s}^{\dagger}(n)U^{\dagger}$ 为 $b'^{\dagger}_{k,s}(p)$和 $b'^{\dagger}_{k,s}(n)$,则有

$$\begin{aligned} b'^{\dagger}_{k,s}(p) &= u_{11} b_{k,s}^{\dagger}(p) + u_{12} b_{k,s}^{\dagger}(n), \\ b'^{\dagger}_{k,s}(n) &= u_{21} b_{k,s}^{\dagger}(p) + u_{22} b_{k,s}^{\dagger}(n). \end{aligned} \tag{11.10}$$

现在我们来证明,对每个 u,在希尔伯特空间中确实存在一个满足

(11.3)式的幺正算符 U. 让我们选定希尔伯特空间中的基矢为

$$|0\rangle,\ a^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle,\ b^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle,\ a^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle,\ b^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle,\ \cdots$$

$$|N_p,N_{\bar p},N_n,N_{\bar n}\rangle=\prod_{i=1}^{N_p}\prod_{j=1}^{N_{\bar p}}\prod_{l=1}^{N_n}\prod_{m=1}^{N_{\bar n}}$$

$$\cdot\, a^\dagger_{k_i,s_i}(p)b^\dagger_{k_j,s_j}(p)a^\dagger_{k_l,s_l}(n)b^\dagger_{k_m,s_m}(n)\,|0\rangle, \tag{11.11}$$

其中 $|0\rangle$ 满足

$$a_{k,s}(p)\,|0\rangle=a_{k,s}(n)\,|0\rangle=b_{k,s}(p)\,|0\rangle=b_{k,s}(n)\,|0\rangle=0. \tag{11.12}$$

由

$$|0\rangle\to|0\rangle,\ a^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle\to a'^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle,$$

$$b^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle\to b'^\dagger_{k,s}(p)\,|0\rangle,\ a^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle\to a'^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle,$$

$$b^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle\to b'^\dagger_{k,s}(n)\,|0\rangle,\ \cdots,$$

$$|N_p,N_{\bar p},N_n,N_{\bar n}\rangle\to\prod_{i=1}^{N_p}\prod_{j=1}^{N_{\bar p}}\prod_{l=1}^{N_n}\prod_{m=1}^{N_{\bar n}}$$

$$\cdot\, a'^\dagger_{k_i,s_i}(p)b'^\dagger_{k_j,s_j}(p)a'^\dagger_{k_l,s_l}(n)b'^\dagger_{k_m,s_m}(n)\,|0\rangle \tag{11.13}$$

等的映射显然使这些矢量之间保持着正交关系,从而这是个幺正变换. 另外这个幺正变换矩阵满足(11.6)和(11.9),因此也满足(11.3). 这就确立了 U 的存在和它的幺正性. 再考虑到(11.13)中的第一式,有

$$U\,|0\rangle=|0\rangle. \tag{11.14}$$

2. **同位旋变换** 让我们把和重子数守恒相联系的相因子(10.118)从 U 中分离出来. 写下

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\theta}S, \tag{11.15}$$

相应的 u 为

$$u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}s;$$

因此(11.3)可转换成

$$S\psi(x)S^{\dagger} = s\psi(x), \tag{11.16}$$

这里选取 θ 使

$$\det|s| = 1. \tag{11.17}$$

由这种行列式为 1 的 2×2 矩阵所构成的群 $\{s\}$ 是同位旋 SU_2 群. 由于(11.16)式,群 $\{S\}$ 也是同位旋 SU_2 群. $\{s\}$ 的性质和普通的三维转动群(与旋量相联系)的性质(除了同位旋空间代替了普通空间外)完全相同.

在这种 SU_2 变换下,假设强相互作用哈密顿量 H_{st}是不变的:

$$SH_{st}S^{\dagger} = H_{st}, \tag{11.18}$$

这将称为同位旋变换. 因为 p 和 n 具有不同的电磁相互作用,显然是电磁相互作用破坏了同位旋不变性. 我们可将 H_{st}分解为

$$H_{st} = H_{free} + H_{int}. \tag{11.19}$$

H_{free}和 H_{int}两者都是同位旋对称的,并以(11.11)为 H_{free}的本征态. 在电磁作用和弱作用被略去的近似下,物理真空态$|\mathrm{vac}\rangle$和物理的核子或反核子态都是 H_{st}的本征矢量. 考虑到(6.58)和(6.60),这些态为

$$\begin{aligned}
|\mathrm{vac}\rangle &= U(0,-\infty)|0\rangle,\\
|p\rangle &\equiv U(0,-\infty)a_{k,s}^{\dagger}(p)|0\rangle,\\
|n\rangle &\equiv U(0,-\infty)a_{k,s}^{\dagger}(n)|0\rangle,\\
|\bar{p}\rangle &\equiv U(0,-\infty)b_{k,s}^{\dagger}(p)|0\rangle,\\
|\bar{n}\rangle &\equiv U(0,-\infty)b_{k,s}^{\dagger}(n)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{11.20}$$

方程(11.14)和(11.15)意味着

$$S|0\rangle = |0\rangle. \tag{11.21}$$

由于(11.18),S 与 $U(0,-\infty)$对易. 因此

$$S|\mathrm{vac}\rangle = U(0,-\infty)S|0\rangle = |\mathrm{vac}\rangle. \tag{11.22}$$

同样的,从(11.6), (11.9), (11.15)和(11.16),我们有

$$S\begin{pmatrix}a^{\dagger}_{k,s}(p)\\a^{\dagger}_{k,s}(n)\end{pmatrix}S^{\dagger}=s^{*}\begin{pmatrix}a^{\dagger}_{k,s}(p)\\a^{\dagger}_{k,s}(n)\end{pmatrix},$$

$$S\begin{pmatrix}b^{\dagger}_{k,s}(p)\\b^{\dagger}_{k,s}(n)\end{pmatrix}S^{\dagger}=s\begin{pmatrix}b^{\dagger}_{k,s}(p)\\b^{\dagger}_{k,s}(n)\end{pmatrix}. \tag{11.23}$$

这和(11.20)一起给出

$$S\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}=s^{*}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\quad 和\quad S\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}, \tag{11.24}$$

其中

$$\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}|\,p\rangle\\|\,n\rangle\end{pmatrix}\quad 和\quad \begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}|\,\bar{p}\rangle\\|\,\bar{n}\rangle\end{pmatrix}. \tag{11.25}$$

考虑无穷小的同位旋变换,即

$$s=1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{11.26}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 的分量是(3.1)的泡利矩阵,而 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是个无穷小矢量. 相应的希耳伯特空间中的变换 S 也必须是无穷小的、接近于单位矩阵;故可写成

$$S=1-\mathrm{i}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{11.27}$$

此式也可看成是 $\boldsymbol{I}$ 的定义,并称 $\boldsymbol{I}$ 为同位旋算符. 由于 s 是幺正的,因此泡利矩阵都是厄米的

$$ss^{\dagger}=1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{*})+O(\varepsilon^{2})=1,$$

故

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{*}. \tag{11.28}$$

由此,S 的幺正性即可得到

$$S^{\dagger}S=1+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{I}^{\dagger}-\boldsymbol{I})+O(\varepsilon^{2})=1, \tag{11.29}$$

这导致同位旋算符的厄米性

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^{\dagger}. \tag{11.30}$$

将(11.27)代入(11.18),得

$$SH_{st}S^{\dagger} = H_{st} - \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{I}H_{st} - H_{st}\boldsymbol{I}) + O(\varepsilon^2) = H_{st},$$

这给出

$$[\boldsymbol{I},\ H_{st}] = 0. \tag{11.31}$$

类似的,将(11.27)代入(11.16)结果为

$$S\psi S^{\dagger} = \psi - \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{I}\psi - \psi\boldsymbol{I}) + O(\varepsilon^2) = \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right)\psi,$$

因此

$$[\psi(x),\ \boldsymbol{I}] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi(x). \tag{11.32}$$

现在我们来证明,对于有限的同位旋变换

$$s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \tag{11.33}$$

相应的希耳伯特空间中的变换矩阵为

$$S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\theta}}. \tag{11.34}$$

证明.　令

$$\theta \equiv |\boldsymbol{\theta}|,\ \hat{\theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta},\ I_0 \equiv \boldsymbol{I} \cdot \hat{\theta},\ \tau_0 \equiv \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\theta}$$

和

$$\psi_\theta(x) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}I_0\theta}\psi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}I_0\theta}. \tag{11.35}$$

考虑到(11.32)和(11.35), $\psi_\theta(x)$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\psi_\theta(x) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}I_0\theta}[I_0,\ \psi(x)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}I_0\theta} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\tau_0\psi_\theta(x),$$

积分之,得 $\psi_\theta(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(x)$; 因此

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(x), \tag{11.36}$$

证毕.

如果系统由核子和反核子组成,则利用(3.24)和(11.32)很容易验

证:同位旋算符 $\boldsymbol{I}$ 由

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{N}}=\frac{1}{2}\int\psi^{\dagger}(x)\boldsymbol{\tau}\psi(x)\mathrm{d}^3 r \tag{11.37}$$

给出.和以前一样,$x_\mu=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$.由于(11.31),$\boldsymbol{I}$ 是和时间无关的,因此在(11.37)的积分中 t 的选择是任意的.若系统还包含有别的粒子,如介子,…则 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{I}_{介子}+\cdots$. 这里 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{N}}$ 由(11.37)给出,而 $\boldsymbol{I}_{介子}+\cdots$与核子场 $\psi(x)$对易.

说明. 由于 H_{st}在同位旋变换下是不变的,所以它与 $\boldsymbol{I}^2$ 和 I_3 可同时对角化.令 $I(I+1)$是算符 $\boldsymbol{I}^2$ 的本征值,则每一个强子就具有量子数 I 和 I_3.对于给定的 I, I_3 可从 $-I$ 变到 I,构成总共 $2I+1$ 个态.在同位旋转动下,量子数 I 是保持不变的,但这些具有不同 I_3 的 $2I+1$ 个态彼此相互变换着,因此它们对强作用是简并的.强子的这种质量简并性为电磁作用和弱作用所解除;这两种作用都破坏了同位旋对称性.

练习. 证明 $[I_i,\ I_j]=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}I_k$, 这里 ϵ_{ijk} 由(3.4)给出.

11.2 *G* 宇称

1. *核子-反核子系统* 质子 p 和中子 n 形成同位旋二重态.例如我们可将 p 看成↑,n 看成↓,分别相应于 $I_3=\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$. 因此,如不管相因子,$\bar{p}$ 的行为应像↓,而$\bar{n}$像↑.我们将证明,精确的关系是,对任一核子态的变换(11.24):

$$S\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}=s^*\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}, \tag{11.38}$$

还有一个对反核子态的等同的变换:

$$S\begin{pmatrix}\bar{n}\\ -\bar{p}\end{pmatrix}=s^*\begin{pmatrix}\bar{n}\\ -\bar{p}\end{pmatrix}. \tag{11.39}$$

证明. 对于任一同位旋变换,根据(11.33)可写

$$s = e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(i\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^n. \tag{11.40}$$

由于对任一整数 n,有

$$(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta})^{2n} = \theta^{2n} \quad 和 \quad (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta})^{2n+1} = \theta^{2n}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta},$$

式中 $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$, 则(11.40)变为

$$s = \cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{11.41}$$

这里 $\hat{\theta} = \boldsymbol{\theta}/\theta$. 从(3.1)式,可见

$$\tau_2\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}^*\tau_2,$$

因此

$$\tau_2 s = s^*\tau_2. \tag{11.42}$$

将 τ_2 左乘到(11.24)中的第二式,有

$$\tau_2 S\begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{n}\end{pmatrix} = \tau_2 s\begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{n}\end{pmatrix},$$

这和(11.42)一起,给出

$$S\tau_2\begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{n}\end{pmatrix} = s^*\tau_2\begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{n}\end{pmatrix},$$

这就建立了(11.39)式.

同样的结果也可以用场算符表示出来. 从(11.16),有

$$S\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}S^\dagger = s\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}, \tag{11.43}$$

这导致

$$S\begin{pmatrix}\psi_p^\dagger\\ \psi_n^\dagger\end{pmatrix}S^\dagger = s^*\begin{pmatrix}\psi_p^\dagger\\ \psi_n^\dagger\end{pmatrix}.$$

用 τ_2 左乘此式并用(11.42),可得

$$S\begin{pmatrix}\psi_n^c\\-\psi_p^c\end{pmatrix}S^\dagger = s\begin{pmatrix}\psi_n^c\\-\psi_p^c\end{pmatrix}, \tag{11.44}$$

式中

$$(\psi_p^c)_\alpha = (\gamma_2)_{\alpha\beta}(\psi_p^\dagger)_\beta \quad 和 \quad (\psi_n^c)_\alpha = (\gamma_2)_{\alpha\beta}(\psi_n^\dagger)_\beta.$$

说明. 若采用记号 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 表示同位旋二重态的 $I_3=\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 态，则从(11.38)—(11.39)核子的二重态可写成

$$p=\uparrow,\ n=\downarrow, \tag{11.45}$$

而反核子二重态为

$$\bar{n}=\uparrow \ 和 -\bar{p}=\downarrow. \tag{11.46}$$

2. **量子数 G** 对于同一系统当有几个守恒定律起作用时，常有可能得到新的量子数和新的选择定则. 这一点我们将用强作用的同位旋对称性和 C 不变性之间的相互影响来说明. 在正反粒子共轭 C 变换下，有

$$\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}.$$

在同位旋空间中垂直于第三轴任取一轴线，绕此轴转动 180°，若不管重要的相因子的话则将变换成

$$\uparrow\ \to\ \downarrow \ 和\ \downarrow\ \to\ \uparrow$$

和前面一样，$\uparrow$ 可以是 p 或 $\bar{n}$，$\downarrow$ 可以是 n 或 $\bar{p}$. 现在若取“正确的”轴线，并能够完全调节相因子使上面的变换精确地变为

$$\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar{n}\\-\bar{p}\end{pmatrix},$$

则由于(11.38)—(11.39)，C 和这一合适的 180°同位旋转动应使这些态的同位旋性质不变. 下面将证明，这会导致一个新的量子数.

很清楚，对于相因子我们必须非常小心. 我们取如下的约定：在 C 变换下，核子场 ψ_p 和 ψ_n 以相同的方式变换，即

$$C\psi_{\mathrm{p}}C^{\dagger} = \psi_{\mathrm{p}}^{c} \text{ 和 } C\psi_{\mathrm{n}}C^{\dagger} = \psi_{\mathrm{n}}^{c}. \tag{11.47}$$

或用态矢来表示

$$C \mid p\rangle = \mid \bar{p}\rangle \text{ 和 } C \mid n\rangle = \mid \bar{n}\rangle.$$

定义 G 宇称算符为

$$G = C \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi I_2}, \tag{11.48}$$

由于(11.36),

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi I_2}\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi I_2} = s\psi, \tag{11.49}$$

以及

$$s = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\pi\tau_2} = -\mathrm{i}\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = s^*. \tag{11.50}$$

从(11.38)—(11.39),还有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi I_2}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ p \end{pmatrix}$$

和

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi I_2}\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}. \tag{11.51}$$

定理.

$$[G, \boldsymbol{I}] = 0. \tag{11.52}$$

证明. 首先考虑单核子态或单反核子态. 将 C 左乘到(11.51)和(11.52)上,得

$$\begin{aligned} G\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}, \\ G\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.53}$$

因此对任一同位旋变换 S,可联合(11.38)—(11.39)和(11.53),推得

$$\begin{aligned} SG\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= -s^*\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} = GS\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \\ SG\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} &= s^*\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = GS\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.54}$$

同样的考虑也可应用于场算符. 从(11.43)—(11.44)和(11.48)—(11.50)可见,(11.53)的等价形式为

$$G\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}G^\dagger = -\begin{pmatrix}\psi_n^c\\ -\psi_p^c\end{pmatrix},$$

$$G\begin{pmatrix}\psi_n^c\\ -\psi_p^c\end{pmatrix}G^\dagger = \begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}; \tag{11.55}$$

而(11.54)的等价形式为

$$SG\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}G^\dagger S^\dagger = GS\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}S^\dagger G^\dagger,$$

$$SG\begin{pmatrix}\psi_n^c\\ -\psi_p^c\end{pmatrix}G^\dagger S^\dagger = GS\begin{pmatrix}\psi_n^c\\ -\psi_p^c\end{pmatrix}S^\dagger G^\dagger. \tag{11.56}$$

其次,考虑(11.11)中的任意多核子-反核子态 $|\rangle = |N_p, N_{\bar{p}}, N_n, N_{\bar{n}}\rangle$, 从(11.56)可见

$$SG|\rangle = GS|\rangle.$$

因此,若系统只是由核子和反核子组成,则

$$[S, G] = 0. \tag{11.57}$$

将系统推广到包括核子与反核子以外的强子中去,我们看到从只由核子、反核子组成的初态(像任何一个实际的高能实验那样)出发,通过强作用得到所有已知的强子都是可能的. 由于假设强作用是同位旋和 C 不变的,(11.57)式对初态成立的话,就意味着它对末态也必须成立. 由于(11.57)对任何 $S = e^{iI\cdot\theta}$ 都成立,故定理成立.

从(11.53)或(11.55),我们见到

$$G^2\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix},\ G^2\begin{pmatrix}\bar{n}\\ -\bar{p}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\bar{n}\\ -\bar{p}\end{pmatrix}$$

及其推广:

$$G^2|\rangle = \begin{cases} -|\rangle, 若态的\ I = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots \\ |\rangle, 若态的\ I = 0,\ 1,\ \cdots, \end{cases}$$

因此可写

$$G^2 = (-1)^{2I}. \tag{11.58}$$

说明. 在 C 变换下,同位旋的第三分量变号,例如 p 的 $I_3 = \frac{1}{2}$,而 $\bar{p}$ 的 $I_3 = -\frac{1}{2}$. 因此 C 与 $\boldsymbol{I}$ 不可对易. 从 C 和 $e^{i\pi I_2}$ 我们导出 G. G 的重要性在于它和 $\boldsymbol{I}$ 可对易. 由于 H_{st} 对同位旋和对 C 都具有不变性,因此对 G 也具有不变性. 这可使我们考虑 H_{st}、I、I_3 和 G 的本征态,由此可得到一些很有用的选择定则,这在下节中讨论.

11.3 对介子和重子的应用

本节中我们仍只考虑强相互作用,而忽略电磁作用和弱作用的同位旋破坏效应. 我们的讨论将主要是关于如何确定各种强子的量子数. 为方便起见,有时我们将同位旋的三个分量 I_1、I_2 和 I_3 分别也称为 I_x、I_y 和 I_z.

1. π 介子 由于通过强相互作用可出现虚跃迁

$$\pi \rightleftharpoons N\bar{N}, \tag{11.59}$$

其中 $N = p$ 或 n,因此 π 介子的同位旋 I_π 必须和 $N\bar{N}$ 的同位旋相同,亦即 0 或 1. $\pi^\pm$ 和 π^0 质量近似相等,造成总数为 $2I+1=3$ 度简并,这就是说

$$I_\pi = 1. \tag{11.60}$$

因此跃迁(11.59)导致 $\pi^+ \rightleftharpoons p\bar{n}$ 具有 $I_z = 1$; 同样地,π^0 具有 $I_z = 0$ 以及 π^- 具有 $I_z = -1$. 在同位旋转动下,介子的三个态一如 $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$ 在同位旋空间中的变换:

$$|\pi^\pm\rangle \sim \mp 2^{-\frac{1}{2}}(x \pm iy) \quad 和 \quad |\pi^0\rangle \sim z, \tag{11.61}$$

其中的符号是根据(1.40)中的球谐函数 $Y_{1,\pm1}$ 和 $Y_{1,0}$ 进行规定的. 在同位旋空间中绕 y 轴转动 180°使 z 变至 $-z$,因此

$$e^{i\pi I_y}\mid\pi^0\rangle=-\mid\pi^0\rangle. \tag{11.62}$$

从(10.76),即 $\pi^0\to2\gamma$,我们知道

$$C\mid\pi^0\rangle=\mid\pi^0\rangle. \tag{11.63}$$

因此在 $G=Ce^{i\pi I_y}$ 变换下,$|\pi^0\rangle$ 必须变号,即

$$G\mid\pi^0\rangle=-\mid\pi^0\rangle. \tag{11.64}$$

因为通过同位旋转动 $|\pi^0\rangle$ 可以变换到荷电 π 介子的任意的相干混合态,所以对易关系 $[G,\boldsymbol{I}]=0$ 意味着 $\pi^\pm$ 的 G 量子数必须和 π^0 的相同. 从(11.64)得

$$G\mid\pi\rangle=-\mid\pi\rangle, \tag{11.65}$$

式中的 π 可为 $\pi^\pm$ 或 π^0,由此我们导得在强相互作用中选择定则

$$\text{偶数个}\ \pi\ \text{介子}\ \not\rightleftharpoons\ \text{奇数个}\ \pi\ \text{介子} \tag{11.66}$$

这一选择定则对任何电荷的 π 介子都成立.

(11.63)式的建立是依赖于 π^0 的 2γ 衰变,是否有可能依据电磁相互作用来定 π^0 的 C 宇称. 回答是肯定的,我们在下面的练习中来证明.

练习. 假定 π 介子是赝标粒子,强作用跃迁 $\pi\rightleftharpoons N\bar{N}$ 可用唯象的拉氏密度

$$\mathscr{L}_{\text{int}}=ig_{\pi N}\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\cdot\boldsymbol{\phi} \tag{11.67}$$

来描写. 其中 $g_{\pi N}$ 是 π-核子耦合常数,ψ 是(11.1)中给出的核子场,而 $\boldsymbol{\phi}$ 是 π 介子同位旋矢量场.

(i) 试证由于(11.47)为使 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 具有 C 不变性,代表 π^0 的 $\boldsymbol{\phi}$ 的 z 分量必须满足

$$\phi_z=C\phi_zC^\dagger.$$

因此 π^0 的 $C=+1$,这一结论现在是单独从强作用来确定的.

(ii) 分别作出在 C, $e^{i\pi I_y}$ 和 G 变换下 $\boldsymbol{\phi}$ 的变换.

2. **矢量介子** 考虑 e^+e^- 对撞束的实验

$$e^+ + e^- \to 虚\ \gamma \to \begin{cases} \rho^0 & (770) \\ \omega^0 & (780) \\ \phi^0 & (1020) \\ J/\psi & (3100) \\ \psi' & (3700) \\ \Upsilon & (9500) \end{cases}, \tag{11.68}$$

式中的数字表示矢量介子的质量,以 MeV 为单位.

由于 $\rho^\pm$ 和 ρ^0 近似地有相同的质量,ρ 介子形成一同位旋三重态,因此 ρ 的同位旋为

$$I_\rho = 1.$$

所有(11.68)式中末态中的其他介子,如 ω^0, ϕ^0, J/ψ, …没有质量相近的荷电状态,因此它们都是同位旋单态:$I_\omega = I_\phi = \cdots = 0$.

其次,我们要证明(11.68)中所有末态的介子,它的

$$C = -1,\ P = -1 \quad 和 \quad 自旋 = 1. \tag{11.69}$$

证明. 反应(11.68)通过一个虚 γ 的中间态,其变换性质和光子场 A_μ 的性质相同. 由于 $CA_\mu C^\dagger = -A_\mu$, 虚 γ 必须有 $C = -1$, 因此终态介子也一样有 $C = -1$. 但由于 A_μ 的空间分量是个矢量而时间分量是个标量,因此虚光子的自旋宇称可为 1^- 或 0^+. [例如,众所周知,原子物理和核物理中的库仑激发都是通过 A_μ 的类时分量激发的]. 由此我们得到结论:末态介子只能是 1^- 或 0^+. 其次我们将证明 0^+ 是不可能的.

从图 11.1 的费恩曼图,我们看到(11.68)的振幅是和强子电磁流算符 $J_\mu(x)$ 的矩阵元

$$\langle 介子 \mid J_\mu(x) \mid 真空 \rangle \tag{11.70}$$

成正比的,式中的 $J_\mu(x)$ 满足流守恒定律:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{11.71}$$

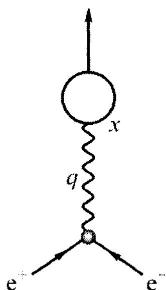


图 11.1 $e^+ + e^- \to$ 虚 $\gamma(q) \to$ 介子的费恩曼图

令 q_μ 是末态介子的 4 动量，P_μ 是系统的 4 动量算符，$P_4 = \mathrm{i}H$，H 是哈密顿量算符. 海森伯方程(1.9)式的相对论推广为，对任一定域算符 $O(x)$，

$$[P_\mu, O(x)] = \mathrm{i}\frac{\partial O}{\partial x_\mu}. \tag{11.72}$$

取(11.72)式在|真空⟩与⟨介子|之间的矩阵元，得

$$\langle 介子 \mid P_\mu O(x) - O(x) P_\mu \mid 真空\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 介子 \mid O(x) \mid 真空\rangle. \tag{11.73}$$

由于

$$P_\mu \mid 真空\rangle = 0 \quad 和 \quad P_\mu \mid 介子\rangle = q_\mu \mid 介子\rangle,$$

(11.73)变为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 介子 \mid O(x) \mid 真空\rangle = -\mathrm{i}q_\mu\langle 介子 \mid O(x) \mid 真空\rangle,$$

它将 $O(x)$的矩阵元和它在 $x=0$ 的值联系起来：

$$\langle 介子 \mid O(x) \mid 真空\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\mu x_\mu}\langle 介子 \mid O(0) \mid 真空\rangle. \tag{11.74}$$

现在如末态的介子的自旋为零，则由于矩阵元⟨介子|$J_\mu(0)$|真空⟩依赖于单一 4 矢量 q_μ，又由于矩阵元本身是个 4 矢量，因此可写成

$$\langle 介子 \mid J_\mu(0) \mid 真空\rangle = cq_\mu,$$

式中 c 为常数. 利用(11.74)，得

$$\langle 介子 \mid J_\mu(x) \mid 真空\rangle = cq_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\mu x_\mu},$$

它和(11.71)一起给出

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 介子 \mid J_\mu(x) \mid 真空\rangle = -\mathrm{i}cq_\mu^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\mu x_\mu}.$$

因为 $-q_\mu^2 = (质心系能量)^2 \neq 0$，故得 $c = 0$，即：

$$若自旋 = 0, 有\langle 介子 \mid J_\mu(x) \mid 真空\rangle = 0. \tag{11.75}$$

因此末态介子的自旋不能为 0,从而(11.69)成立.从 C 守恒,我们得出如下的结论,即所有这种介子遵守选择定则:

$$C=-1 \text{ 的介子} \nrightarrow \text{任何数目的 } \pi^0. \tag{11.76}$$

由于 π^0 是玻色子,我们有

$$1^- \text{ 介子} \nrightarrow 2\pi^0. \tag{11.77}$$

由于 ρ^0 介子的 $I=1$, $I_z=0$ 以及 $C=-1$, 故 ρ^0 的 G 为+1.对易关系(11.52)说明 $\rho^\pm$ 的 G 也 $=+1$,因此不论什么电荷,G 守恒要求:

$$\rho \nrightarrow \text{奇数个 } \pi \text{ 介子}. \tag{11.78}$$

同样的,由于 ω, ϕ, J/ψ, …都有 $I=0$,故 $G=-1$, 它们遵守选择定则:

$$\omega,\ \phi,\ J/\psi,\ \cdots \nrightarrow \text{偶数个 } \pi \text{ 介子}. \tag{11.79}$$

前面说过,电磁相互作用破坏同位旋对称性和 G 对称性,弱作用破坏 C 对称性.由此,选择定则(11.78)—(11.79)的破坏振幅为精细结构常数的量级;而(11.76)的破坏的振幅,因为是由弱作用引起的,因此要小许多.迄今我们所知道的,选择定则(11.77)是严格的.

练习. 若$|A\rangle$和$|B\rangle$是 4 动量算符 P_μ 的本征值为 a_μ 和 b_μ 的本征矢,试证对任一定域算符 $O(x)$,矩阵元$\langle B|O(x)|A\rangle$的 x 依赖关系是完全确定的:

$$\langle B \mid O(x) \mid A\rangle = \langle B \mid O(0) \mid A\rangle e^{i(a_\mu - b_\mu)x_\mu}. \tag{11.80}$$

3. Λ 和 K 介子　和 Λ^0 简并的只有一个粒子,即其反粒子 $\bar{\Lambda}^0$.因此同位旋简并度 $2I_\Lambda+1$ 必须$\leqslant 2$,这意味着 $I_\Lambda=0$ 或 1/2.

考虑强相互作用

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0. \tag{11.81}$$

若 I_Λ 为 1/2,则在同位旋转动下,如 $\exp(i\pi I_y)$, Λ^0 将变换为 $\bar{\Lambda}^0$.由于 Λ^0 的衰变

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi + N, \tag{11.82}$$

因此 Λ^0 具有重子数 $=+1$;同样的,由于有

$$\bar{\Lambda}^0 \to \pi + \bar{\mathrm{N}},$$

故反粒子 $\bar{\Lambda}^0$ 具有重子数$=-1$. 将同位旋转动 $\exp(i\pi I_y)$作用于(11.81)时,我们发现左端仍是 π 与核子的混合;但若 $I_\Lambda = \frac{1}{2}$, 则右端将是 $\bar{\Lambda}^0$ 和 K 介子的混合,这要破坏重子数守恒. 因此得到结论是

$$I_\Lambda = 0. \tag{11.83}$$

由于 π 的同位旋是 1,核子的是 1/2, (11.81)的总同位旋或为 1/2 或为 3/2. 它和(11.83)一起给出 K 介子的同位旋为 $I_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}$ 或 3/2. 令 Q_{K}, Q_π, Q_Λ 和 Q_{N} 是 K, π, Λ 和 N 的电荷,π、N 的电荷和它们的 I_z 的联系是

$$Q_\pi = I_z \quad 和 \quad Q_{\mathrm{N}} = I_z + \frac{1}{2}.$$

由于 $Q_\Lambda = I_\Lambda = 0$, 反应(11.81)意味着

$$Q_{\mathrm{K}} = Q_{\pi+\mathrm{N}} = I_z + \frac{1}{2},$$

这里 I_z 指的是 K 的 I_z. 因此,若 $I_{\mathrm{K}} = \frac{3}{2}$, 则具有 $I_z = \frac{3}{2}$ 的 K 介子态其电荷必须是 $3/2 + 1/2 = 2$. 由于并不存在双电荷的 K 介子,故 I_{K} 不能是 3/2. 因此,虽然 K 介子有四种简并态:K^+、K^-、K^0 和 $\bar{\mathrm{K}}^0$,但我们的结论是

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}. \tag{11.84}$$

这四种 K 介子形成两个同位旋二重态:

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}, \tag{11.85}$$

它们在同位旋转动下,分别如

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}$$

一样变换.

4. **介子和重子八重态**　和确定 Λ 的同位旋(11.83)的推理一样，可以断定没有一个重子能和它的反粒子属于同一个同位旋多重态的. 从 $\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+$ 可以断言，Σ 的重子数为 $+1$，并且从已知的三重态简并性 Σ^+、Σ^0 和 Σ^- 可断定

$$I_\Sigma = 1. \tag{11.86}$$

同样的，容许的反应 $K^- + p \to \Xi^- + K^+$ 说明 Ξ 的重子数为 1，从二重态简并性 Ξ^0 和 Ξ^- 可断定

$$I_\Xi = \frac{1}{2}. \tag{11.87}$$

类似的，从 $K^- + p \to \Lambda^0 + \eta^0$ 可得 η^0 的重子数为 0. 由于 η^0 无简并，可断定

$$I_\eta = 0. \tag{11.88}$$

定义超荷 Y 和奇异性* S：

$$Y \equiv 2(Q - I_z),$$
$$S \equiv Y - N, \tag{11.89}$$

式中 Q 是电荷，N 是重子数. 任何对 Q、I_z 和 N 是守恒的相互作用，对 Y 和 S 也是守恒的. 表 11.1 中我们列出基态重子和介子的八重态的 I、I_z、Y 和 S(八重态一词指的是 SU_3 表示，将在下一章讨论). 这些重子的自旋都是 1/2，具有正的相对宇称，而这些介子都是赝标介子. 注意到 p、n 和 π 介子的 S 都等于 0，所以都是非奇异粒子；而 Σ、Λ 和 K 介子具有 $S = \pm 1$，所以称为奇异粒子.

从表 11.1 可以看出，正如所希望的那样，同一同位旋多重态的不同 I_z 的粒子具有相同的 Y、S 和 N，因此，这些量子数和 $\boldsymbol{I}$ 对易，即

$$[Y, \boldsymbol{I}] = [S, \boldsymbol{I}] = [N, \boldsymbol{I}] = 0. \tag{11.90}$$

---

* Gell-Mann M. *Phys Rev*, 1953, **93**: 933; Nakano T, Nishijima K. *Progr Theoret Phys*, 1953, **10**: 581.

表 11.1 赝标介子和 1/2 自旋重子八重态的量子数

I_z	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	I	Y	S
		p^+		n^0		$\frac{1}{2}$	1	0
	Σ^+		Σ^0		Σ^-	1	0	-1
			Λ^0			0	0	-1
		Ξ^0		Ξ^-		$\frac{1}{2}$	-1	-2
		K^+		K^0		$\frac{1}{2}$	1	1
	π^+		π^0		π^-	1	0	0
			η^0			0	0	0
		K^0		K^-		$\frac{1}{2}$	-1	-1

另一方面,由于 $Q = I_z + \dfrac{Y}{2}$,我们有对易关系:

$$[Q,\ I_x] = [I_z,\ I_x] = \mathrm{i}I_y,$$

$$[Q,\ I_y] = [I_z,\ I_y] = -\mathrm{i}I_x \tag{11.91}$$

和

$$[Q,\ I_z] = 0.$$

强相互作用下 S 是守恒的,我们将论述在电磁相互作用下也这样,但弱作用则不然.因此奇异粒子衰变成非奇异粒子只能通过弱作用,这使得它的寿命很长.然而在非奇异粒子,如核子和 π 介子的碰撞中,奇异粒子可通过强作用大量地产生,但只能成对地产生*.历史上,这样解释了奇异粒子产生截面大而寿命长这一明显的佯谬.

11.4 同位旋破坏

1. **电磁相互作用** 以前说过,由于 p 和 n 具有不同的电荷和 I_z 但

---

* Pais A. *Phys Rev*, 1952, **86**:663; Nambu Y, Nishijima K, Yamaguchi Y. *Progr Theoret Phys*, 1951, **6**:615, 619.

属于同一同位旋多重态，这意味着在任何使 I_z 改变的同位旋转动下，电磁相互作用 H_γ 不可能不变；即

$$[H_\gamma,\ I_x] \neq 0 \quad 和 \quad [H_\gamma,\ I_y] \neq 0. \tag{11.92}$$

在

$$\mathrm{p} \rightleftharpoons \mathrm{p} + \gamma \quad 和 \quad \mathrm{n} \rightleftharpoons \mathrm{n} + \gamma$$

的跃迁中，核子的 I_z 是不变的. 换言之，这些反应中 I_z 是守恒的. 现在我们假设在所有的电磁过程中，I_z 是守恒的，即

$$[H_\gamma,\ I_z] = 0. \tag{11.93}$$

一电荷为 e 的粒子的电磁相互作用最简单地可以在自由拉氏量中作

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_\mu \tag{11.94}$$

的替换得到. 用这种方式得到的相互作用自动地满足规范不变性，这称之为“最小电磁相互作用”；相应的电磁流称为最小电磁流. 在同位旋转动下，由(11.94)生成的最小流以和电荷算符 $Q = -\mathrm{i}\int J_4 \mathrm{d}^3 r$ 同样的方式变换. 由于 $Q = I_z + \frac{Y}{2}$，其中包含一个同位旋矢量部分 I_z，一个同位旋标量部分$\frac{Y}{2}$；J_μ 也是如此. 因此，我们可以把最小电磁流分解成两项：

$$J_\mu = (J_\mu)_0 + (J_\mu)_1, \tag{11.95}$$

式中下标 0 或 1 表示该项的 $I=0$ 或 1；两者的 I_z 都等于 0.

在任一

$$\mathrm{a} \to \mathrm{b} + \gamma$$

的跃迁中，其中 a 和 b 是强子态，可以定义同位旋矢量的改变

$$\Delta \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_\mathrm{a} - \boldsymbol{I}_\mathrm{b}. \tag{11.96}$$

所以在最小电磁相互作用的假设下，考虑到(11.95)，我们有如下的选择定则：

$$\Delta I_z = \Delta Y = \Delta S = 0, \tag{11.97}$$

和

$$|\Delta \boldsymbol{I}| = 0 \text{ 或 } 1, \tag{11.98}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{I} = 0$ 的跃迁是由同位旋标量流$(J_\mu)_0$ 引起的;而 $|\Delta \boldsymbol{I}| = 1$ 的跃迁是由同位旋矢量流$(J_\mu)_1$ 引起的.

的确,单独的规范不变性推不出最小相互作用,但我们总可以在相互作用拉氏量中加上一些和

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

有关的非最小项

$$\mathrm{i}\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_\nu \psi' F_{\mu\nu}. \tag{11.99}$$

这种项总是规范不变的;它可以是,也可以不是 I_z 守恒的. 若 $\psi = \psi_{\mathrm{n}}$, $\psi' = \psi_\Lambda$, 则可有

$$\Lambda \rightleftharpoons \mathrm{n} + \gamma, \tag{11.100}$$

这是 I_z 不守恒的. 我们的假设是,这些非最小项并不存在. 实验上从来没有观测到反应(11.100),这支持了最小电磁相互作用假设. 另一方面,给这个选则定则以支持的是过程

$$\Sigma^0 \rightleftharpoons \Lambda + \gamma \tag{11.101}$$

的确存在,并且这是 Σ^0 的主要衰变方式. 和(11.100)不同,由于它满足 $|\Delta \boldsymbol{I}| = 1$ 和 $\Delta I_z = 0$, 因此这种衰变是允许的.

说明. 我们看到,由于(11.91),总电荷算符 $Q = -\mathrm{i}\int J_4 \mathrm{d}^3 r$ 与 $\boldsymbol{I}^2$ 对易

$$[Q, \boldsymbol{I}^2] = 0.$$

因此如果矩阵元

$$\langle b | Q | a \rangle \neq 0,$$

则除了选择定则(11.96)和(11.97)以外,必定有

$$I_{\mathrm{a}} = I_{\mathrm{b}},$$

这里 I_{a}、I_{b} 分别表示强子态 a、b 的总同位旋的大小. 然而,电磁流算符

$J_\mu(x)$与 $\boldsymbol{I}^2$ 并不对易. 这就说明为什么 $\Sigma^0 \rightleftharpoons \Lambda+\gamma$ 是允许跃迁,其中 $I_\Sigma=1$ 但 $I_\Lambda=0$.

2. *弱相互作用*　在非轻子弱作用过程,如

$$\Lambda^0 \to \mathrm{p}+\pi^-, \ \mathrm{K}^\pm \to \pi^\pm+\pi^0 \tag{11.102}$$

和半轻子弱作用过程,如

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_e, \ \mathrm{K}^\pm \to \pi^0+\mathrm{e}^\pm+\nu_e(\text{或 } \bar{\nu}_e) \tag{11.103}$$

中同位旋都不守恒. 对前者,

$$|\Delta I_z| = \frac{1}{2}; \tag{11.104}$$

对后者,

$$|\Delta I_z| = 1 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}, \tag{11.105}$$

这里的改变量只是指强子的 ΔI_z. 现在我们来作最小破坏假设:在所有弱过程中,强子的 $\boldsymbol{I}$ 的改变满足

$$|\Delta \boldsymbol{I}| \leqslant 1. \tag{11.106}$$

我们来看这一定则怎样用法,并且说明为什么叫做"最小破坏".

(i) Λ 衰变

在

$$\Lambda^0 \to \begin{cases} \mathrm{p}+\pi^- \\ \mathrm{n}+\pi^0 \end{cases}$$

衰变中,初态有 $I_\Lambda=0$, 末态的同位旋 $I_{N\pi}$原则上可以是 1/2 或 3/2. 选择定则(11.106)说明 $I_{N\pi}$必须假定是最小值:1/2,即

$$|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}. \tag{11.107}$$

下面的练习中我们将会看到,这样的终态$|1/2\rangle$可写成

$$\left|\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\mathrm{n}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\mathrm{p}\pi^-\rangle. \tag{11.108}$$

如不管电磁修正，则(11.106)可导致相对衰变率：

$$\frac{衰变率(\Lambda^0 \to p + \pi^-)}{衰变率(\Lambda^0 \to n + \pi^0)} \cong 2. \tag{11.109}$$

这和观测得的 $\Lambda^0 \to p+\pi^-$ 和 $\Lambda^0 \to n+\pi^0$ 的分支比分别为(64.2±0.5)%和(35.8±0.5)%是相一致的.

练习. 在同位旋空间中，可将 p、n 和 π 态表示成

$$|\,p\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ |\,n\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$|\,\pi^{\pm}\rangle = Y_{1,\pm 1} \quad 和 \quad |\,\pi^0\rangle = Y_{1,0}, \tag{11.110}$$

式中 $Y_{l,m}$是由(1.40)给出的球谐函数. 态(11.108)是

$$I = \frac{1}{2},\ I_z = -\frac{1}{2}$$

的态. 试证在(11.110)的表示下，它可写成

$$-\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{11.111}$$

式中 $\hat{r} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$是同位旋空间的矢量. 利用上面的表式，验证(11.108)中的克莱布什-戈丹系数$\sqrt{\frac{2}{3}}$和$\sqrt{\frac{1}{3}}$.

(ii) $K_{\pi 2}$衰变

在 $K^{\pm} \to \pi^{\pm} + \pi^0$，$K^0$(或 $\overline{K}^0$)$\to \pi^+ + \pi^-$ 或 $2\pi^0$ 的衰变中，由于 K 的自旋为 0，末态的两个 π 介子必须处 s 态. 故玻色统计要求 2π 的同位旋 $I_{2\pi} \neq 1$. 由此 $I_{2\pi}$可为 0 或 2. 选择定则(11.106)说明 $I_{2\pi}$必须取小的那个值：

$$I_{2\pi} = 0.$$

由于 $I_K = \frac{1}{2}$，我们又得

$$|\,\Delta \boldsymbol{I}\,| = \frac{1}{2}. \tag{11.112}$$

和上面的练习中那样，可将末态两个 π 介子用同位旋空间单位矢量

$\hat{r}_a$ 和 $\hat{r}_b$代表,不同的下标可指,比如说不同的动量. 因此 $I_{2\pi}=0$ 的态可写成正比于标积 $\hat{r}_a\cdot\hat{r}_b$的态,即

$$|\pi_a^+\pi_b^-\rangle+|\pi_a^-\pi_b^+\rangle+|\pi_a^0\pi_b^0\rangle.$$

若不管电磁修正,则得

$$\frac{衰变率(\mathrm{K}^0\rightarrow\pi^++\pi^-)}{衰变率(\mathrm{K}^0\rightarrow 2\pi^0)}\cong 2. \tag{11.113}$$

若 K^0 用 $\overline{\mathrm{K}}^0$ 代替,可得相同的比值. 由于 $\pi^\pm\pi^0$ 具有 $I_z=\pm1$, 它不可能处于 $I_{2\pi}=0$ 态,由选择定则(11.106)推断得

$$\mathrm{K}^\pm\not\rightarrow\pi^\pm+\pi^0. \tag{11.114}$$

实验结果为

$$分支比(\mathrm{K}_s^0\rightarrow\pi^++\pi^-)=68.61\pm0.24\%,$$

$$分支比(\mathrm{K}_s^0\rightarrow 2\pi^0)=31.39\pm0.24\%$$

和

$$\frac{衰变率(\mathrm{K}^\pm\rightarrow\pi^\pm+\pi^0)}{衰变率(\mathrm{K}_s^0\rightarrow 2\pi)}=(1.53\pm0.07)\times10^{-3},$$

这与(11.113)和(11.114)相一致. [K^0、$\overline{\mathrm{K}}^0$ 和 $\mathrm{K}_s^0\simeq(\mathrm{K}^0+\overline{\mathrm{K}}^0)/\sqrt{2}$ 的关系将在第 15 章中讨论.]

(iii) K_{l3}衰变

在

$$\mathrm{K}^\pm\rightarrow\pi^0+\mathrm{l}^\pm+\nu_l(或\ \bar{\nu}_l)$$

和

$$\mathrm{K}^0(或\ \overline{\mathrm{K}}^0)\rightarrow\pi^\mp+\mathrm{l}^\pm+\nu_l(或\ \bar{\nu}_l)$$

衰变中,其中 $l=\mathrm{e}$ 或 μ,初态的同位旋是 $I_\mathrm{K}=|\boldsymbol{I}_\mathrm{K}|=\frac{1}{2}$, 而末态是 $I_\pi=|\boldsymbol{I}_\pi|=1$. 利用(11.96)的记号,根据通常角动量的矢量加法,有

$$|\Delta\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{I}_\pi-\boldsymbol{I}_\mathrm{K}|=\frac{1}{2}\ 或\ \frac{3}{2}. \tag{11.115}$$

$\left[注意\ |\Delta \boldsymbol{I}| \neq \Delta |\boldsymbol{I}|,由于\ \Delta|\boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{I}_\pi| - |\boldsymbol{I}_K| = 1 - \frac{1}{2}\ 永远 = \frac{1}{2}.\right]$

选择定则(11.106)说明在(11.115)的两个可能值之间像在(11.107)和(11.112)中那样,必须有

$$|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}. \tag{11.116}$$

由于 K^0 的和 π^+ 的 I_z 分别为$-1/2$ 和$+1$,上述选择定则说明

$$K^0 \nrightarrow \pi^+ + l^- + \bar{\nu}_l. \tag{11.117}$$

同样有

$$\bar{K}^0 \nrightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l. \tag{11.118}$$

利用(11.116)并按照练习中从(11.110)—(11.111)推至(11.108)的论证,可得

$$\frac{衰变率(K^0 \to \pi^- + l^+ + \nu_l)}{衰变率(K^+ \to \pi^0 + l^+ + \nu_l)} \cong 2$$

和 (11.119)

$$\frac{衰变率(\bar{K}^0 \to \pi^+ + l^- + \bar{\nu}_l)}{衰变率(K^- \to \pi^0 + l^- + \bar{\nu}_l)} \cong 2.$$

用第 15 章将讨论的 $K_L^0 \cong (K^0 - \bar{K}^0)/\sqrt{2}$ 来表达,上述结果变为

$$\frac{\sum 衰变率(K_L^0 \to \pi^\pm + l^\mp + \nu_l(或\ \bar{\nu}_l))}{衰变率(K^\pm \to \pi^0 + l^\pm + \nu_l(或\ \bar{\nu}_l))} \cong 2, \tag{11.120}$$

式中 $\sum$ 表示遍及+和−求和.实验值为

$$\sum 衰变率(K_L^0 \to \pi^\pm + l^\mp + \nu_l(或\ \bar{\nu}_l)) = \begin{cases} 5.21 \pm 0.10 \times 10^6/\mathrm{sec} \\ \qquad 对\ l = \mu, \\ 7.49 \pm 0.11 \times 10^6/\mathrm{sec} \\ \qquad 对\ l = e, \end{cases} \tag{11.121}$$

和

$$(K^{\pm} \to \pi^0 + l^{\pm} + \nu_l(\text{或 } \bar{\nu}_l)) = \begin{cases} 2.58 \pm 0.07 \times 10^6/\text{sec} \\ \quad \text{对 } l = \mu, \\ 3.90 \pm 0.04 \times 10^6/\text{sec} \\ \quad \text{对 } l = e, \end{cases} \tag{11.122}$$

这和(11.120)很好地相符合.我们看到,在奇异粒子的衰变中,选择定则(11.106)总归结为$|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}$.

习题 11.1.　π 介子-核子的散射在实验室中 π 介子能量～300 MeV 时以 Δ(1232)共振为主,Δ 的同位旋为 3/2:

$$\pi + N \to \Delta(1232) \to \pi + N.$$

试证 $\pi^+ + p \to \pi^+ + p$, $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ 和 $\pi^- + p \to \pi^- + p$ 的微分截面比为 9 : 2 : 1.

表 11.2　对 $p + \bar{n} \to m\pi$ 的选择定则

状　态	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1P_1$	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$
自 旋 宇 称	0−	1−	1+	0−	1+	2+
G	−	+	+	−	−	−
$\pi^- + \pi^0$	×		×	×	×	×
$2\pi^- + \pi^+$		×	×	×		
$\pi^- + 2\pi^0$		×	×	×		
$2\pi^- + \pi^+ + \pi^0$	×			×	×	×
$\pi^- + 3\pi^0$	×			×	×	×
$3\pi^- + 2\pi^+$		×	×			
$2\pi^- + \pi^+ + 2\pi^0$		×	×			
$\pi^- + 4\pi^0$		×	×			

(×表示为 $\boldsymbol{I}$ 或 C,或其他选择定则所禁戒)

习题 11.2.　证明在表 11.2 和表 11.3 中列出的选择定则.试讨论这些定则的性质,它们每一条在何种程度上是正确的?

表 11.3 对 $\bar{\mathrm{p}}+\mathrm{p}\to m\pi$ 或 $\bar{\mathrm{n}}+\mathrm{n}\to m\pi$ 的选择定则

状态	$^1S_0$		$^3S_1$		$^1P_1$		$^3P_0$		$^3P_1$		$^3P_2$	
自旋宇称	0−		1−		1+		0+		1+		2+	
C	+		−		−		+		+		+	
I	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
G	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−
$2\pi^0$	×	×	×	×	×	×		×	×	×		×
$\pi^+ + \pi^-$	×	×	×		×	×		×	×	×		×
$3\pi^0$	×		×	×	×	×	×	×	×		×	
$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$	×			×		×	×	×	×		×	
$4\pi^0$		×	×	×	×	×		×		×		×
$\pi^+ + \pi^- + 2\pi^0$		×	×		×			×		×		×
$2\pi^+ + 2\pi^-$		×	×		×			×		×		×
$5\pi^0$	×		×	×	×	×	×		×		×	
$\pi^+ + \pi^- + 3\pi^0$	×			×		×	×		×		×	
$2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0$	×			×		×	×		×		×	

(×表示为 $\boldsymbol{I}$ 或 C 或其他选择定则所禁戒)

这两张表取自 Lee T D, Yang C N. *Nuovo Cimento*, 1956, **3**:749. G 宇称是在这篇文章中引进的.

参 考 文 献

对早期的和有关工作,见

Nishijima K. *Progr Theoret Phys*, 1951, **6**:614, 1027.

Pais A, Jost R. *Phys Rev*, 1952, **87**:871.

Michel L. *Nuovo Cimento*, 1953, **10**:319.

Amati D, Vitale B. *Nuovo Cimento*, 1955, **2**:719.

第12章　SU_3 对称性

坂田首次考虑了强作用可能具有比 U_2 群更广的内部对称性*，他提出了由 p, n, Λ 间的幺正变换所产生的 SU_3 对称的可能性. 但是坂田的做法遇到了严重的困难，因为 Λ-核子间的力表现出与核子-核子间的力有很大的差别. 1960 年 Ohnuki** 在这方面取得很大进展，他避开了坂田模型中的动力学困难而着眼于 SU_3 的运动学. Ohnuki 注意到强子可看成称为 X_1、X_2 和 X_3 的"重子"场三重态的复合态. 这些场和 p、n 和 Λ 有相同的量子数，但由于还不清楚的束缚态动力学机制，它们的量子和物理重子是不同的. 考察 SU_3 群的各种不同表示，Ohnuki 将物理的 π 介子和 K 介子确认为 SU_3 八重态成员，从而预言了一个新的赝标介子，这是后来发现的、现在称为 η^0 的粒子.

不久，盖尔曼和赖曼*** 采取了决定性的步骤把物理重子 p, n, Λ, Σ 和 Ξ 也看成是一个 SU_3 的八重态的成员. 在那时，基础三重态更多地是被看作构造八维(称之为八重法)和十维表示的一种数学工具. 这样一来，这些表示就可以直接应用于观测到的强子. SU_3 对称性的应用在把复杂的强子谱学、动力学和衰变率带来规律性这方面取得了巨大的成就.

现在我们知道，所有的强子可以看成是夸克**** 的复合体. 在本章中我们只考虑三个基态夸克场：上、下和奇异夸克场，有时把这三种夸克看成是不同"味"的夸克. 每一个场用一列矩阵

---

* Sakata S. *Progr Theoret Phys*, 1956, **16**:686.

** Ohnuki Y. Proceedings of the International High-energy Conference, CERN, 1960, 843.

*** Gell-Mann M. *Phys Rev*, 1962, **125**:1067; Caltech Report CTSL-20 (1961); Ne'eman Y. *Nucl Phys*, 1961, **26**:222.

**** Zweig G. CERN report (unpublished); Gell-Mann M. *Phys Lett*, 1964, **8**:214.

$$q=\begin{pmatrix}q^1\\q^2\\q^3\end{pmatrix}\tag{12.1}$$

的元素来表示. 假设在

$$q\rightarrow vq\tag{12.2}$$

变换下,强相互作用是近似不变的,式中 v 是幺正的. 强相互作用的具体形式将在后面第 18 章中讨论量子色动力学时考虑. 这里我们仅仅来检验一下这种对称性假设有怎样的结果.

12.1 数学准备

如同在(11.17)式中那样,可以把 v 的总相因子分离出来,并考虑由所有 3×3 的行列式为 1 的幺正矩阵所张成的 SU_3 群 $\{v\}$,即

$$vv^\dagger=1\quad 和\quad \det v=1.\tag{12.3}$$

为方便起见,矩阵 v 可看成

$$v=(v^a_b)=\begin{pmatrix}v^1_1 & v^1_2 & v^1_3\\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3\\ v^3_1 & v^3_2 & v^3_3\end{pmatrix};\tag{12.4}$$

其厄米共轭 $v^\dagger$ 的矩阵元由

$$v^{\dagger b}_a=(v^a_b)^*\tag{12.5}$$

给出. 因此变换(12.2)可写成

$$q^a\rightarrow v^a_bq^b.\tag{12.6}$$

1. **张量** 定义: $T^{i_1\cdots i_n}_{a_1\cdots a_m}$ 是 $(n,\ m)$ 阶张量的一个分量,若其变换规律为

$$T^{i_1\cdots i_n}_{a_1\cdots a_m}\rightarrow v^{i_1}_{j_1}\cdots v^{i_n}_{j_n}v^{\dagger b_1}_{a_1}\cdots v^{\dagger b_m}_{a_m}T^{j_1\cdots j_n}_{b_1\cdots b_m}.\tag{12.7}$$

除非另有声明,本节中所有的指标都自 1 变到 3. 因此上述张量有 3^{n+m} 个分量.

从上面的定义出发,两个同阶的张量相应分量之和或差构成一个新的张量,它的阶也相同. 将阶为(n, m)的张量 A 的分量和阶为(q, p)的张量 B 的分量相乘可以构造出一个新的阶为$(n+q, m+p)$的张量,它的分量为

$$A^{i_1\cdots i_n}_{a_1\cdots a_m} B^{j_i\cdots j_q}_{b_1\cdots b_p}. \tag{12.8}$$

迷向张量*:

(i)
$$\delta^i_a = \begin{cases} 1, & 若\ i = a, \\ 0, & 其他情形, \end{cases} \tag{12.9}$$

是(1, 1)阶张量的分量.

证明. 由于 $vv^\dagger = 1$, 在变换下

$$\delta^i_a \to v^i_j v^{\dagger b}_a \delta^j_b = \delta^j_a.$$

(ii)
$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, 若\ i,\ j,\ k\ 是\ 1,\ 2,\ 3\ 的偶置换, \\ -1, 若\ i,\ j,\ k\ 是\ 1,\ 2,\ 3\ 的奇置换, \\ 0, 其他情形 \end{cases} \tag{12.10}$$

是(3, 0)阶张量的分量.

证明. 由于 $\det v = 1$, 在变换下,

$$\varepsilon^{ijk} \to v^i_a v^j_b v^k_c \varepsilon^{abc} = \varepsilon^{ijk}.$$

(iii) 同样地,由于 $\det v^\dagger = 1$; (3.4)式给出的 ε_{ijk} 是(0, 3)阶张量的分量.

缩并:从一个(n, m)阶张量 T 出发,通过构造出下面的乘积:

$$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \delta^{j_b}_{i_a}, \tag{12.11}$$

$$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \varepsilon_{j_{m+1} i_a i_{a'}}, \tag{12.12}$$

$$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \varepsilon^{i_{n+1} j_b j_{b'}}, \tag{12.13}$$

---

* 一个张量,其分量在上述变换下不改变时,称为迷向张量.

并对重复指标求和,则可构成新的阶为$(n-1,\ m-1)$, $(n-2,\ m+1)$和$(n+1,\ m-2)$的张量.式中a, a'是两个在1和n之间的不同的整数;同样,b, b'是两个在1和m之间的不同整数.假设n和m在(12.11)中都$\geqslant 1$,在(12.12)中$n\geqslant 2$, 在(12.13)中$m\geqslant 2$.

定义:一个阶为$(n,\ m)$的张量T称为可约的,如果通过缩并可构成一个新的非零的、阶为$(n',\ m')$的张量T',且

$$n'+m'<n+m;$$

否则,称T是不可约的.

由于(12.12)—(12.13)式,一个不可约张量$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}$对于任一对指标$(i_a,\ i_{a'})$或$(j_b,\ j_{b'})$必须是对称的.此外,鉴于(12.11)式,$T$必须满足迹的条件

$$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}\delta^{j_1}_{i_1}=0. \tag{12.14}$$

由于对称和迹的条件,不可约张量的分量可以并不完全独立.

2. *表示* 考虑一个阶为$(n,\ m)$的张量.令它的线性无关的分量数为d,称为维数.从这个张量的分量中可选d个线性无关的分量ϕ_1, ϕ_2, …, ϕ_d,并记

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_d\end{pmatrix}.$$

在(12.2)$q\to vq$的变换下,变换(12.7)可用ϕ写成

$$\phi\to V\phi, \tag{12.15}$$

式中V是$d\times d$矩阵.很清楚,由于V满足与v所满足的同一代数,因此可将$\{V\}$看作SU_3群$\{v\}$的一个表示,记为ⓓ.此外,如张量是不可约的,则称表示是**不可约的**;否则称为**可约的**.

表12.1是一个低阶不可约张量的表.表中最后一列表出的数字标志着表示的维数.我们见到T^i和T_a两种张量都是三维的.但由于它们的变换性质不同,它们构成两个不同的表示,称为③和$\bar{③}$.[进一步的分析见

267—628 页上的讨论.]由于对称条件，$T^{ij}=T^{ji}$ 和 $T_{ab}=T_{ba}$，两个表示都是六维的，但彼此不同，因此标记为⑥和$\overline{⑥}$. 由于约束 $T^i_i=0$，故不可约表示 T^i_a 是 $3^2-1=8$ 维的. 对于一个对称张量 T^{ijk}，有三个如 T^{111} 类型，六个 T^{112} 类型和一个 T^{123} 类型的独立分量，使总数为十，并构成表示⑩. 类似的，不可约表示 T_{abc} 也是十维的，但由于它构成与 T^{ijk} 所给出的不同的表示，因此标记为$\overline{⑩}$. 以类似的方式，很容易发现不可约张量 T^{ij}_{ab} 是二十七维的.

表 12.1

不可约张量	阶	表示
1	(0, 0)	①
T^i	(1, 0)	③
T_a	(0, 1)	$\overline{③}$
T^i_j	(1, 1)	⑧
T^{ij}	(2, 0)	⑥
T_{ab}	(0, 2)	$\overline{⑥}$
T^{ijk}	(3, 0)	⑩
T_{abc}	(0, 3)	$\overline{⑩}$
T^{ij}_{ab}	(2, 2)	㉗

3. **⑧×⑧的分解** 设 A^i_j 和 B^i_j 都是⑧表示. 故

$$A^i_i=B^i_i=0. \tag{12.16}$$

考虑乘积⑧×⑧:

$$A^i_a B^j_b, \tag{12.17}$$

这是一个阶为(2, 2)的可约张量. 我们的目的是作一个该张量的 $8^2=64$ 个分量的线性函数使它们变成不可约的.

(i) 很清楚，和

$$S=A^i_a B^a_i \tag{12.18}$$

是个阶为(0, 0)的不可约张量.

(ii) 张量

$$F^i_a = A^i_j B^j_a - B^i_j A^j_a \tag{12.19}$$

是无迹的，所以构成一个八维不可约表示. 同样的，

$$D^i_a = A^i_j B^j_a + B^i_j A^j_a - \frac{2}{3}\delta^i_j S \tag{12.20}$$

构成另一个八维不可约表示. 由于 F^i_a 对 A，B 来说是反对称的，而 D^i_a 则是对称的，因此这些函数虽都是⑧，但是是不相同的.

(iii) 对称张量

$$T^{ijk} = A^i_a B^j_b \varepsilon^{abk} + ijk\ \text{置换形成的所有项}$$

给出一个不可约表示⑩. 相似的，通过交换上指标和下指标，可用对称张量

$$\overline{T}_{abc} = A^i_a B^j_b \varepsilon_{ijc} + abc\ \text{置换形成的所有项}$$

来构成表示$\overline{⑩}$.

(iv) 将(12.17)式对(i, j)和(a, b)对称化，首先可构成

$$R^{ij}_{ab} = A^i_a B^j_b + A^j_a B^i_b + A^i_b B^j_a + A^j_b B^i_a,$$

考虑到(12.18)和(12.20)，它满足

$$\mathrm{R}^{ib}_{ab} = \mathrm{D}^i_a + \frac{2}{3}\delta^i_a \mathrm{S}.$$

由此可构造不可约表示

$$I^{ij}_{ab} = R^{ij}_{ab} - \frac{1}{5}(\delta^i_a D^j_b + \delta^j_a D^i_b + \delta^i_b D^j_a + \delta^j_b D^i_a) - \frac{1}{6}(\delta^i_a \delta^j_b + \delta^j_a \delta^i_b) S,$$

这构成不可约表示㉗.

将(i)—(iv)合在一起，可写

$$⑧ \times ⑧ = ① + ⑧ + ⑧ + ⑩ + \overline{⑩} + ㉗.$$

不难将上述考虑推广到更高维数的表示中去.

4. 进一步的一些性质 考虑一个无穷小 SU_3 变换，由于 $\det v=1$，它包含 $3^2-1=8$ 个独立的实无穷小量 ε_1，ε_2，…，ε_8：

$$\nu = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_l\lambda_l, \tag{12.21}$$

式中 λ_l 等是八个 3×3 矩阵，而 1 表示单位矩阵. 由于

$$vv^{\dagger} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_l(\lambda_l - \lambda_l^{\dagger}) + O(\varepsilon^2) = 1,$$

我们有

$$\lambda_l = \lambda_l^{\dagger}.$$

这八个厄米矩阵 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_8$ 称为 SU_3 群的生成元，它们起着和 SU_2 群的三个泡利矩阵同样的作用. 通常写为

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{12.22}$$

两个 λ 矩阵的迹、对易子和反对易子分别为

$$\mathrm{tr}(\lambda_l\lambda_m) = 2\delta_{lm},$$

$$[\lambda_l, \lambda_m] = 2\mathrm{i}f_{lmn}\lambda_n$$

和

$$\{\lambda_l, \lambda_m\} = \frac{4}{3}\delta_{lm} + 2d_{lmn}\lambda_n. \tag{12.23}$$

式中 f_{lmn} 的指标是全反对称的，而 d_{lmn} 则为全对称的. f_{lmn} 和 d_{lmn} 的非零元为

lmn	f_{lmn}	lmn	d_{lmn}
123	1	118	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
147	$\frac{1}{2}$	146	$\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	157	$\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$	228	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
257	$\frac{1}{2}$	247	$-\frac{1}{2}$
345	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$	338	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
458	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	344	$\frac{1}{2}$
678	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	355	$\frac{1}{2}$
		366	$-\frac{1}{2}$
		377	$-\frac{1}{2}$
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$
		668	$-1/(2\sqrt{3})$
		778	$-1/(2\sqrt{3})$
		888	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

(12.24)

设$\{v\}$和$\{\bar{v}\}$是 SU_3 群的两个 3×3 的不可约表示. 若对每一个 $\bar{v}$ 存在一个 v,使得

$$\bar{v} = v_0 v v_0^{\dagger}, \tag{12.25}$$

式中 v_0 是$\{v\}$的固定元,则所有的 $\bar{v}$ 也属于$\{v\}$;因此这两个表示可看成**是相同的**,否则则**不同**. 在表 12.1 中,与不可约张量 T^i 相联系的表示是

$\{v\}$,而与 T_a 相联系的则是$\{v^*\}$. 我们将这两个表示记成③和③,我们即将证明它们是不同的.

证明. 若假设它们是相同的,则(12.25)变成

$$v^* = v_0 v v_0^\dagger. \tag{12.26}$$

现在考虑一个(12.21)形式的无穷小 v,其复共轭为

$$v^* = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_l^* \varepsilon_l.$$

将此式和(12.21)式一起代入(12.26),可得

$$\lambda_l^* = - v_0 \lambda_l v_0^\dagger. \tag{12.27}$$

从(12.22)可见

$$\lambda_l^* = \pm \lambda_l, \tag{12.28}$$

式中正负号$\equiv \eta_l$ 由下式给定

$$\eta_l = \begin{cases} + & 对\ l = 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8, \\ - & 对\ l = 2,\ 5,\ 7, \end{cases} \tag{12.29}$$

故(12.27)变为

$$- \eta_l \lambda_l = v_0 \lambda_l v_0^\dagger, \tag{12.30}$$

式中对重复指标不求和,但可取 1 或 2, …,或 8. 将(12.23)中最后一个方程左乘以 v_0,右乘以 $v_0^\dagger$,可见在 $\lambda_l \to v_0 \lambda_l v_0^\dagger$ 的改变下它是不变的;考虑到(12.30)式,可推得

$$- \eta_l \eta_m \eta_n d_{lmn} = d_{lmn}. \tag{12.31}$$

这里像(12.30)中一样,重复指标表示固定的数,并不求和. 利用(12.24)和(12.29)我们发现,对于每个非零 d_{lmn},这是错误的. 因此表示$\{v\}$和$\{v^*\}$是不同的.

练习. 先证明雅可比恒等式

$$[\lambda_l,\ [\lambda_m,\ \lambda_n]] + [\lambda_m,\ [\lambda_n,\ \lambda_l]] + [\lambda_n,\ [\lambda_l,\ \lambda_m]] = 0,$$

然后推导

$$f_{ll'k}f_{mnl'}+f_{ml'k}f_{nll'}+f_{nl'k}f_{lml'}=0.$$

5. **其他群一览**

(i) SU_2 群

在 SU_2 群$\{s\}$的情形中，考虑到(11.42)，对每一 s 我们有

$$s^*=s_0 s s_0^\dagger \tag{12.32}$$

式中 s_0 为固定元：

$$s_0=e^{i\frac{1}{2}\pi\tau_2}=i\tau_2.$$

因而表示$\{s\}$和$\{s^*\}$是相同的（有时称为等价的）；故 SU_2 群只存在一个二维表示.

张量和表示的概念可以很好地应用于 SU_2 群. 我们称 $T_{a_1\cdots a_n}$ 为 n 阶张量的分量，如果它的变换规律为

$$T_{a_1a_2\cdots a_n}\rightarrow s_{a_1b_1}s_{a_2b_2}\cdots s_{a_nb_n}T_{b_1b_2\cdots b_n}. \tag{12.33}$$

其中 a_i 和 b_j 可为 1 或 2. 由于(12.32)式，这里的阶只由一个数表标记. 由于 $\det s=1$，可见

$$\varepsilon_{ab}=\begin{cases}1, 对\ a=1,\ b=2,\\ -1, 对\ a=2,\ b=1,\\ 0, 其他情形\end{cases} \tag{12.34}$$

是一个二阶迷向张量.

类似于(12.12)—(12.13)，如果一个张量 T 的指标并非完全对称，比如 $T_{a_1a_2a_3\cdots a_n}\neq T_{a_2a_1a_3\cdots a_n}$，则作

$$\varepsilon_{a_1a_2}T_{a_1a_2\cdots a_n}$$

可形成一个低阶的 $n-2$ 阶非零张量. 这样的张量 T 称作是可约的，否则是不可约的. 同样，每个张量给出 SU_2 群的一个表示，并且如果张量是不可约的则表示也是不可约的. n 阶张量具有 2^n 个分量，这些分量可能并不完全独立. 它的线性独立的分量个数定义为张量的维数 d.

练习. 证明下面所列 SU_2 群的不可约张量与表示：

不可约张量	阶	表示的维数
1	0	1
T_a	1	2
对称 T_{ab}	2	3
全对称 T_{abc}	3	4
	…………	
全对称 $T_{a_1a_2\cdots a_n}$	n	$n+1$

不可约表示的这种分类法是和通常用角动量状态的分类法是等同的，只要令 $n=2j$，这里 j 是总角动量量子数.

(ii) SO_3 群

如果我们仅限于角动量 $j=$ 整数的状态，则相应的群变成 SO_3 群，它由所有的实数的 3×3 正交矩阵 u 组成，亦即

$$u=u^*,\ u\widetilde{u}=1 \quad 和 \quad \det u=1. \tag{12.35}$$

每个 u 可看成正的矢量 $\boldsymbol{r}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 的一个三维转动：

$$x_i \to u_{ij}x_j,$$

式中下标 i 和 j 可从 1 变至 3. n 阶张量 T 的分量则按

$$T_{i_1i_2\cdots i_n} \to u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_nj_n}T_{j_1j_2\cdots j_n}$$

变换. 由于 $u\widetilde{u}=1$ 和 $\det u=1$，可见 δ_{ij} 和 ϵ_{ijk} 分别形成 2 阶和 3 阶的张量. 这里 δ_{ij} 是克罗内克符号，而 ϵ_{ijk} 由(3.4)定义. 一个张量如果它的指标或者非全对称，如 $T_{i_1i_2i_3\cdots i_n}\neq T_{i_2i_1i_3\cdots i_n}$，或者其迹不为零，则张量称作是可约的. 由前者我们可作

$$T_{i_1i_2i_3\cdots i_n}\epsilon_{i_1i_2j}$$

来形成一个 $n-1$ 阶非零张量，而后者可通过缩并

$$T_{i_1i_2\cdots i_n}\delta_{i_ai_b}$$

以形成一个 $n-2$ 阶张量. 式中 a 和 b 可以是 1 与 n 之间的任意两个不同整数. 以前讨论过的关于表示的维数和它的可约性的概念可直接应用到现在这一情形中来.

练习. 证明下面所列的 SO_3 群的不可约张量和表示：

不可约张量	阶	表示的维数
1	0	1
T_i	1	3
T_{ij}	2	5
T_{ijk}	3	7
	…………	
$T_{i_1\cdots i_l}$	l	$2l+1$

并证明这些不可约表示可明确地选为在(1.38)—(1.40)中讨论过的球谐函数 Y_{lm}.

12.2　强子态及其味和色的对称性

把(12.1)中的 q^i 记成具体的上、下和奇异夸克，并分别写成

$$q^1 = u,\ q^2 = d \quad 和 \quad q^3 = s, \tag{12.36}$$

这是十分方便的. 在(12.2)式 $q \to vq$ 变换下的近似不变性将称作味的 SU_3 对称性. 这些夸克的动力学性质将在以后来检验. 这里我们只是应用这些变换的性质，q^i 等形成不可约表示③；它们的反粒子 $q_1 = \bar{u},\ q_2 = \bar{d}$ 和 $q_3 = \bar{s}$ 形成表示$\bar{③}$. 同位旋 SU_2 群是 SU_3 的一个子群，$u = \uparrow$ 和 $d = \downarrow$ 形成一同位旋二重态，而 s 是同位旋单态. 在 3×3 的矩阵形式中，每个 2×2 同位旋变换矩阵 s 对应于

$$v = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12.37}$$

式中 0 表示或者是 2×1 或者是 1×2 的零矩阵.

1. **赝标八重态**　在 11.3 节末的表 11.1 中所列的八个赝标介子可看作构成一个 SU_3 的八重态 M^i_j，

$$M^i_i = 0, \tag{12.38}$$

这个八重态和夸克-反夸克系统具有相同的变换性质：

$$M^i_j \sim q^i q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j q^k q_k. \tag{12.39}$$

将赝标介子的同位旋性质和夸克的进行比较，可见

$$\begin{aligned}
&\pi^+ \sim u\bar{d},\ \pi^- \sim d\bar{u},\\
&\pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}),\\
&K^+ \sim u\bar{s},\ K^- \sim s\bar{u},\\
&K^0 \sim d\bar{s},\ \bar{K}^0 \sim s\bar{d},\\
&\eta^0 \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d}).
\end{aligned} \tag{12.40}$$

这里记号～表示：这记号两边具有相同的变换性质．正如在(11.45)—(11.46)中那样，如果对于夸克二重态记为

$$u = \uparrow,\ d = \downarrow, \tag{12.41}$$

对反夸克态记为

$$\bar{d} = \uparrow \quad 和 \quad -\bar{u} = \downarrow, \tag{12.42}$$

则可清楚地表达同位旋的变换性质．由此，(12.40)中的第一式给出

$$\pi^+ \sim \uparrow\uparrow$$

其中第一个 $\uparrow$ 是指夸克的，第二个 $\uparrow$ 是指反夸克的．同样，$\pi^- \sim -\downarrow\downarrow$ 和 $\pi^0 \sim -\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$，这是熟知的同位旋三重态的 $I_z = -1$ 和 0 态．注意到 π^0 中 $\uparrow\downarrow$ 与 $\downarrow\uparrow$ 之间的相对符号是＋的，而按(12.40)，π^0 的 $u\bar{u}$和 $d\bar{d}$ 之间的符号是－的，考虑到(12.39)，则有

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(M^1_1 - M^2_2). \tag{12.43}$$

由于无迹条件(12.38)，三个对角矩阵元 M^1_1、M^2_2 和 M^3_3 只有两个是线性无关的，一个是 π^0，另一个是 η^0．如果不管任意的总的相因子的话，则利用(12.39)可见，η^0 的表示是由它与 π^0 的正交关系和它的归一化条件所

唯一确定的.结果表示由(12.40)中的最后一式给出,此式也可写成

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-M_1^1 - M_2^2 + 2M_3^3). \tag{12.44}$$

为了将 M_1^1、M_2^2 和 M_3^3 用 π^0、η^0 表示,我们暂时不用(12.38)式,而在形式上将它看成是一整体的量:

$$M_i^i = M_1^1 + M_2^2 + M_3^3. \tag{12.45}$$

对于 M_1^1 解(12.43)—(12.45),可得

$$M_1^1 = \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}M_i^i.$$

考虑到(12.38),这给出

$$M_1^1 = \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}}. \tag{12.46}$$

同样地,可解出 M_2^2 和 M_3^3.因此从(12.40)得到赝标八重态矩阵为

$$M = (M_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & \mathrm{K}^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \mathrm{K}^0 \\ \mathrm{K}^- & \overline{\mathrm{K}}^0 & \frac{2\eta^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{12.47}$$

2. $\frac{1}{2}$自旋重子八重态和$\frac{3}{2}$自旋重子十重态　也可将表 11.1 中所列的八个 1/2 自旋的重子看作形成一个 SU_3 八重态 B_j^i.利用 I、I_z 和 Y 的比配,作替换 $\pi\to\Sigma$, $\eta^0\to\Lambda^0$, $\mathrm{K}^+\to\mathrm{p}$, $\mathrm{K}^0\to\mathrm{n}$, $\mathrm{K}^-\to\Xi^-$ 和 $\overline{\mathrm{K}}^0\to\Xi^0$,则介子八重态就变成重子八重态,并且(12.47)变成

$$B = (B_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & \mathrm{p} \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \mathrm{n} \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{12.48}$$

在粒子性质表中,低能级的 3/2 自旋的重子共振态是 $\Delta(1232)$, $\Sigma^*(1385)$, $\Xi^*(1530)$和 $\Omega^-(1672)$,我们将验证这些共振态形成 SU_3 的十重态 D^{ijk}. 根据夸克模型,它们的量子数可得到很好的确定.

由于重子自旋的半整数性质,在夸克模型中它们必须由奇数个夸克和反夸克组成. 最简单的方式是将它们看成是三个夸克的束缚态. 每个夸克是自旋为 1/2 的费米子. 如果像(12.39)那样只显示 SU_3 的味指标,则可写

$$B^i_j \sim q^i q^a q^b \varepsilon_{abj} - \frac{1}{3}\delta^i_j q^k q^a q^b \varepsilon_{abk}$$

和

$$D^{ijk} \sim \text{对称化的 } q^i q^j q^k. \tag{12.49}$$

用(12.36)中的记号,十重态 D^{ijk} 可确定为:

$$\begin{aligned}
&\Omega^- = D^{333} \sim sss\,,\\
&\Xi^{*0} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(uss + sus + ssu)\,,\\
&\Xi^{*-} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(dss + sds + ssd)\,,\\
&\Sigma^{*+} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(suu + usu + suu)\,,\\
&\Sigma^{*0} \sim (sud + sdu + usd + dsu + uds + dus)/\sqrt{6}\,,\\
&\Sigma^{*-} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(sdd + dsd + sdd)\,,\\
&\Delta^{++} \sim uuu\,,\\
&\Delta^{+} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(duu + udu + uud)\,,\\
&\Delta^{0} \sim \sqrt{\frac{1}{3}}(udd + dud + ddu)\,,\\
&\Delta^{-} \sim ddd\,,
\end{aligned} \tag{12.50}$$

其中夸克的不同次序反映着某种不同的运动学属性. 就目前而言,如果我们愿意,可以简单地选取比如说满足 $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}'' = 0$ 的不同动量 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$作为这些不同属性. 因此,比如说在 Ξ^{*0}中,我们可以把第一项 uss 看成 u 的动量为 $\boldsymbol{p}$,中间的 s 的动量为 $\boldsymbol{p}'$,而最后一个 s 的动量为 $\boldsymbol{p}''$. 其余两项

sus 和 ssu 可将 SU_3 的指标进行置换得到，但要保持 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}'$，$\boldsymbol{p}''$固定．这样就解释了在 Ξ^{*0}中的因子$\sqrt{\frac{1}{3}}$，使得它和 Ω^- 以相同的方式归一化．[详细情况见后面的(12.51)和(12.54)—(12.56)．]这些束缚态的实际动力学将在后面第 20 章中来分析，这里我们只对它们的纯运动学方面感兴趣．从(12.50)我们看到，u、d 和 s 的电荷分别必须是$\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$．它们的自旋是$\frac{1}{2}$，因此它们是费米子．

稍后我们将表明，假定每个夸克都处于公共位势的最低能量的 s 轨道上，之间没有相互作用，这是个合理的近似．这样就立刻产生一个问题：例如考虑$\frac{3}{2}$自旋的重子 $\Omega^-\sim sss$，在遍及夸克的动量求和后，由于有 s 轨道的假设，总轨道波函数是全对称的．又由于所有$\frac{1}{2}$自旋的夸克的自旋沿同方向顺排起来形成总自旋为$\frac{3}{2}$．夸克的费米统计将使它们不可能是一个全对称张量 D^{ijk} 的分量，除非假定夸克具有某种其他的自由度．由于这一原因，我们将假定夸克的确具有另一个称之为色的自由度*．每个 u 或 d 或 s 夸克，…，具有三个品种：u(c)或 d(c)或 s(c)，…，$c=1,2,3$．[有时为了更具有色彩的象征，人们可以选取例如 c＝红、白和蓝．]例如在(12.49)的第二表式中，总自旋是$\frac{3}{2}$，其 z 分量也是$\frac{3}{2}$的重子态假定具有下列的形式：

$$D^{ijk}\sim q^i_{\uparrow}(c)q^j_{\uparrow}(c')q^k_{\uparrow}(c'')\epsilon_{cc'c''},\tag{12.51}$$

式中 c，c'，c''是颜色指标，$\epsilon_{cc'c''}$是(3.4)中给定的全反对称张量．下标 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 标明夸克的自旋向上和向下的状态，而 $q^i_{\uparrow}(c)$表示相应的反对易夸克场算符．因此，(12.51)右端交换 i 和 j 时要出两个负号：一个来自费米子算符的反对易性，另一个来自 $\epsilon_{cc'c''}$．这样一来，D^{ijk} 的对称性得到了保证．

现在我们来检验含有新自由度的其他强子态．例如考虑(12.40)，代替 $\pi^+\sim u\bar{d}$的我们必须写成 u(c)$\bar{\text{d}}$(c')．由于 c 和 c'不同值可导致 $3^2=9$

* Greenberg O W. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:598.

种可能的介子状态. 为了避免这一困难,假设所有相互作用满足**严格的 SU_3 颜色对称性**,并且**所有观测到的强子态都是颜色单态**. 故 π^+ 由

$$\pi^+ \sim \mathrm{u}(c)\bar{\mathrm{d}}(c) \tag{12.52}$$

代表. 对重复指标遍及 1 至 3 求和使这个态和(12.51)一样成为颜色单态. 同样的规则应用于所有其他介子和重子态. 因此(12.39)和(12.49)变为

$$\begin{aligned} M^i_j &\sim q^i(c)q_j(c) - \frac{1}{3}\delta^i_j q^k(c)q_k(c), \\ B^i_j &\sim [q^i(c)q^a(c')q^b(c'')\varepsilon_{abj} \\ &\quad - \frac{1}{3}\delta^i_j q^k(c)q^a(c')q^b(c'')\varepsilon_{abk}]\varepsilon_{cc'c''} \end{aligned} \tag{12.53}$$

和

$$D^{ijk} \sim q^i(c)q^j(c')q^k(c'')\varepsilon_{cc'c''},$$

为简洁起见,省写了自旋指标.

前面见到,区分 u、d 和 s 夸克的是称之为味的指标. 例如,相应于 D^{ijk} 的不同上指标的选择就有十种物理上不同的味的状态:

$$\begin{aligned} \Omega^- &= D^{333}, \\ \Xi^{*0} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{133} + D^{313} + D^{331}), \\ \Xi^{*-} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{233} + D^{323} + D^{332}), \\ \Sigma^{*+} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{311} + D^{131} + D^{113}), \\ \Sigma^{*0} &= (D^{312} + D^{321} + D^{132} + D^{231} + D^{123} + D^{213})/\sqrt{6}, \\ \Sigma^{*-} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{322} + D^{232} + D^{223}), \\ \Delta^{++} &= D^{111}, \\ \Delta^{+} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{211} + D^{121} + D^{112}), \\ \Delta^{0} &= \sqrt{\frac{1}{3}}(D^{122} + D^{212} + D^{221}), \\ \Delta^{-} &= D^{222}, \end{aligned} \tag{12.54}$$

这里,对于自旋的 Z 分量 $=\frac{3}{2}$ 的状态,根据(12.36)和(12.51)的记号为

$$\begin{aligned}D^{333} &\sim s_{\uparrow}(c)s_{\uparrow}(c')s_{\uparrow}(c'')\epsilon_{cc'c''},\\D^{133} &\sim u_{\uparrow}(c)s_{\uparrow}(c')s_{\uparrow}(c'')\epsilon_{cc'c''},\\D^{313} &\sim s_{\uparrow}(c)u_{\uparrow}(c')s_{\uparrow}(c'')\epsilon_{cc'c''},\end{aligned} \tag{12.55}$$

等等. 通过空间转动可以立刻得到具有不同自旋分量的十重态重子. 由于 D^{ijk} 对指标 i、j 和 k 是对称的,因此从(12.54)有

$$\begin{aligned}D^{133} &= D^{313} = D^{331} = \sqrt{\frac{1}{3}}\Xi^{*0},\\D^{311} &= D^{131} = D^{113} = \sqrt{\frac{1}{3}}\Sigma^{*+},\\D^{211} &= D^{121} = D^{112} = \sqrt{\frac{1}{3}}\Delta^{+}.\end{aligned} \tag{12.56}$$

对于 Ξ^{*-}, Σ^{*0}, Σ^{*-} 和 Δ^{0} 有类似的表式.

说明. 对重子的最低能态,三个夸克都处于同一 s 态. 由此,总角动量等于总自旋,可为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$;前者给出 $\frac{1}{2}$ 自旋的八重态;后者给出 $\frac{3}{2}$ 自旋的十重态. 对于一个相似地构造出来的 s 态夸克-反夸克的介子系统,总自旋可为 0 或 1;前者相应于赝标介子八重态加上 $\eta'(958)$;后者相应于矢量介子九重态:$\rho(770)$, $\omega(783)$, $K^{*}(892)$和 $\phi(1020)$. 第 20 章中将作进一步的讨论.

12.3 质量公式

由于 π、K 和 η 在质量上的差别为几百个 MeV,重子八重态或十重态的不同成员也有这种现象,因此强相互作用具有 SU_3 的味对称性至多只能是近似的. 相反,前面说过 SU_3 色对称性却假定是严格的. 在这一节中,我们将只讨论 SU_3 味的变换,因此为了行文方便,“味”一字将予以省略.

让我们将强相互作用分解为

$$H_{st} = H_{sym} + H_{asym}, \tag{12.57}$$

式中 H_{sym}是 SU_3 不变的，而 H_{asym}则不是 SU_3 不变的.

1. H_{asym}**和假粒子表述形式** 可以想像 H_{asym}的表式可用(12.1)式的夸克场 q^i 来表示. 为了使重子数守恒，最简单的形式应是二次型表式 $q^{i\dagger}q^j$的线性函数；亦即 H_{asym}像(1, 1)阶的不可约张量那样变换. 电荷和同位旋守恒要求 H_{asym}像

$$H_{asym} \sim S_3^3 \tag{12.58}$$

一样变换，S_3^3 是八重态 S_j^i 的 $i = j = 3$ 成员. S_j^i 的准确形式并不重要，在这一节里我们只对 H_{asym}的 SU_3 变换性质感兴趣. [作为一个具体的例子，可假定 S_j^i 由下式给定

$$S_j^i = q_j\beta q^i - \frac{1}{3}\delta_j^i q_k\beta q^k.$$

其中 β 是(3.10)中的狄拉克矩阵，q_j 是夸克场量 q^j 的厄米共轭.]因此，一个强子 h 的能量 E 由对角矩阵元

$$E_h = \langle h \mid H_{st} \mid h \rangle \tag{12.59}$$

给定.

下面我们假定有(12.57)，此外又假定 H_{asym}比 H_{sym}要弱很多，因此可把它看成是一个微扰. 忽略(12.59)中 H_{asym}的二级效应，我们只需准至零级的态矢 $|h\rangle$，即 $|h\rangle$满足

$$H_{sym} \mid h \rangle = \gamma \mid h \rangle, \tag{12.60}$$

式中 γ 是本征值. 因此(12.59)式变成

$$E_h = \gamma + \langle h \mid H_{asym} \mid h \rangle + O(H_{asym}^2). \tag{12.61}$$

为将 H_{asym}的 SU_3 变换性质(12.58)在能量计算中考虑进去，引入 G. Wentzel* 的“假粒子”表述形式. 我们来考察一个典型的矩阵元 $\langle h' | H_{asym} | h \rangle$. $|h\rangle$和$|h'\rangle$都是 H_{sym}的本征矢，因此属于 SU_3 的某些不可

---

* Wentzel G. In High Energy Nuclear Physics: Proceedings of the Rochester Conference, ed. Ballam J, et al. New York: Interscience Publishers, 1956, Ⅷ 15.

约表示. 然后我们来考虑一个假想的、SU_3 守恒的跃迁

$$h \to h' + S^i_j, \tag{12.62}$$

这里 S^i_j 表示假粒子,它按 SU_3 八维的不可约表示变换,而且携带的 4 动量为零、电荷为零、宇称为正. 此外我们只对 $i = j = 3$ 的末态感兴趣. 十分清楚,若只涉及 SU_3 的变换,则(12.58)式 H_{asym} 的矩阵元 $\langle h' | H_{\text{asym}} | h \rangle$ 的性质就和关于(12.62)式的假想的 SU_3 守恒的跃迁振幅的性质相同. 发射一个 SU_3 守恒的假粒子等同于有一个 SU_3 适当破坏的振幅但不引入假粒子. 下面将会看到我们怎样利用假粒子来推导质量公式*.

2. **八重态质量公式** 首先讨论由(12.48)给出的重子八重态 $h = B^i_j$ 的矩阵元(12.59). 利用假粒子表述形式,相应的跃迁(12.62)变为

$$B^i_j \to B^a_b + S^3_3.$$

可将 H_{asym} 唯象地看成是由三个八重态的积所形成的和给出的跃迁哈密顿量. 这三个八重态是重子场 $B = (B^a_b)$、其厄米共轭 $\bar{B} = (\bar{B}^b_a)$ 和假粒子场 $S = (S^i_j)$, 而这个和是 SU_3 守恒的. 利用(12.19)和(12.20),可见在这种乘积之中只有两个是不变的:

$$X^j_i S^i_j \quad 和 \quad Y^j_i S^i_j, \tag{12.63}$$

式中

$$X^j_i = \bar{B}^j_a B^a_i$$

$$Y^j_i = \bar{B}^a_i B^j_a. \tag{12.64}$$

H_{asym} 可写成

$$H_{\text{asym}} = (\alpha X^j_i + \beta Y^j_i) S^i_j, \tag{12.65}$$

式中 α 和 β 是常数. 我们将会看到,假粒子振幅可取为

$$S^i_j = \begin{cases} 1, & 若\ i = j = 3, \\ 0, & 其他情形. \end{cases} \tag{12.66}$$

---

* Gell-Mann M. *Phys Rev*, 1962, **125**: 1067. Okubo S. *Progr Theor Phys*, 1962, **27**: 949.

为简单起见，我们不把 X^i_j、Y^i_j 和 S^i_j 的迹分离开来，因为那只不过是在(12.57)的分解上重新定义 H_{asym} 和 H_{sym} 而已．我们看到在上式中，除了 $i=j=3$ 外 $S^i_j=0$．这是用假粒子的语言表达了假设(12.58)．由于(12.65)中有两个常数 α 和 β，因此选取 $S^3_3=1$ 并不会失去普遍性．忽略 $O(H^2_{\mathrm{asym}})$ 并联合(12.65)—(12.66)与(12.57)和(12.61)，对于重子八重态可写

$$H_{\mathrm{st}}=\alpha X^3_3+\beta Y^3_3+\gamma. \tag{12.67}$$

对八重态的不同成员来说，γ 是同一常数，由(12.60)给出．对八重态重子场(12.48)取厄米共轭，则有(为符号清楚起见，用一横来代替 †)

$$\bar{B}=(\bar{B}^j_i)=\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}}-\dfrac{\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\dfrac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}}-\dfrac{\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{\mathrm{p}} & \bar{\mathrm{n}} & \dfrac{2\bar{\Lambda}^0}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}. \tag{12.68}$$

考虑到(12.64)式，则有

$$X^3_3=\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}+\bar{\mathrm{n}}\mathrm{n}+\frac{2}{3}\bar{\Lambda}^0\Lambda^0$$

和

$$Y^3_3=\bar{\Xi}^-\,\Xi^-+\bar{\Xi}^0\Xi^0+\frac{2}{3}\bar{\Lambda}^0\Lambda^0. \tag{12.69}$$

现在，利用(12.67)和(12.69)可以推得对重子八重态的不同成员的对角矩阵元(12.59)：

$$E_\Lambda=\frac{2}{3}(\alpha+\beta)+\gamma,\ E_\Sigma=\gamma,$$

$$E_\Xi=\beta+\gamma \quad 和 \quad E_{\mathrm{N}}=\alpha+\gamma,$$

这里 N 代表 p 和 n．这四方程消去 α，β，γ，结果为

$$3E_\Lambda-2(E_{\mathrm{N}}+E_\Xi)+E_\Sigma=0. \tag{12.70}$$

完全相同的考虑可用于赝标介子八重态．经替换 $\Lambda\to\eta$，$\mathrm{N}\to\mathrm{K}$，$\Xi\to\bar{\mathrm{K}}$ 和

$\Sigma\to\pi$,从(12.70)可推得

$$3E_{\eta}-4E_{K}+E_{\pi}=0. \tag{12.71}$$

公式(12.70)—(12.71)都只是在 H_{asym}的一级近似下才成立的.

计算$\langle h|H_{st}|h\rangle$时可假定强子态处于动量为 $\boldsymbol{k}$ 的态.能量 E_h 与 $\boldsymbol{k}$ 和强子质量 m_h 的联系为

$$E_h=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m_h^2}; \tag{12.72}$$

其变分为

$$\delta E_h=\frac{\delta(m_h^2)}{2E_h}. \tag{12.73}$$

将(12.73)代入(12.70)和(12.71),得到质量公式

$$3m_{\Lambda}^2-2(m_N^2+m_{\Xi}^2)+m_{\Sigma}^2=0, \tag{12.74}$$

$$3m_{\eta}^2-4m_K^2+m_{\pi}^2=0; \tag{12.75}$$

这和实验数据符合得相当好.在推导过程中,我们应用了一种在其中强子能量 E_h 远大于八重态不同成员间质量差的参考系,因此(12.73)是成立的.当然,最后的公式(12.74)和(12.75)是和特殊的参考系无关的.对重子八重态,我们可选静止系 $\boldsymbol{k}=0$,由于 $\delta m_h\ll m_h$,故(12.73)可归结为 $\delta E_h=\delta m_h$ 并且(12.74)式取线性形式

$$3m_{\Lambda}-2(m_N+m_{\Xi})+m_{\Sigma}=0. \tag{12.76}$$

对于介子八重态,由于 m_π 比质量差 m_K-m_π 小很多,因此不可能将(12.75)线性化.

说明. (12.63)中的由三个八重态 $\bar{B}$, B 和 S 构成的两个不变量,可从八重态 $\bar{B}$ 和 B 的直乘⑧×⑧来理解.由于

$$⑧\times⑧=①+⑧+⑧+⑩+\overline{⑩}+㉗,$$

因此由两个八重态组成的直积其分量可用(12.64)式导得,而每一分量依次与 S_j^i 联合可构成不变量.这就说明了(12.65)式中的两个独立常数 α 和 β.

3. 十重态质量公式 由对称的十重态场 D^{ijk} 和厄米共轭 $\bar{D}_{ijk}=$

$(D^{ijk})^\dagger$ 的直积只能形成单个的八重态

$$Z^i_j = \overline{D}_{jab}D^{iab} - \frac{1}{3}\delta^i_j\overline{D}_{abc}D^{abc}. \tag{12.77}$$

按照推导(12.67)时的相同推理,对重子十重态可将 H_{st} 写成

$$H_{\text{st}} = \alpha + \beta Z^3_3, \tag{12.78}$$

式中 α, β 是常数. 因为(12.54)—(12.56),这一表式变为

$$H_{\text{st}} = \alpha + \beta\Big[\frac{2}{3}\overline{\Omega}\Omega + \frac{1}{3}(\overline{\Xi}^{*0}\Xi^{*0} + \overline{\Xi}^{*-}\Xi^{*-}) - \frac{1}{3}(\overline{\Delta}^{++}\Delta^{++} + \overline{\Delta}^{+}\Delta^{+} + \overline{\Delta}^{0}\Delta^{0} + \overline{\Delta}^{-}\Delta^{-})\Big], \tag{12.79}$$

这导致 $E_\Omega = \alpha + \frac{2}{3}\beta$, $E_{\Xi^*} = \alpha + \frac{1}{3}\beta$, $E_{\Sigma^*} = \alpha$ 和 $E_\Delta = \alpha - \frac{1}{3}\beta$. 像从(12.70)导致(12.76)那样,可得质量公式

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_\Delta. \tag{12.80}$$

读者很容易验证,这个质量公式是和粒子性质表中给出的 $\Delta(1232)$, $\Sigma^*(1385)$, $\Xi^*(1530)$和 $\Omega(1672)$的实验值符合得很好的.

说明. 考虑 m_π 要比质量差 $m_K - m_\pi$ 和 $m_\eta - m_\pi$ 小得很多这一事实,看起来似乎很奇怪,为什么 H_{asym} 可以当作微扰来处理. 后面第 20 章中将给出一个可能的解释.

习题 12.1. 令$|B^a_i\rangle$表示 1/2 自旋的物理重子八重态,$\langle B^i_a|$是其厄米共轭

(i) 试证如 $S^j_b(x)$是一标量(即自旋为 0,宇称为+)的定域 SU_3 八重态算符,则它在 4 动量为 k 的态$|B^k_c\rangle$和 4 动量为 $k+q$ 的态$|B'^a_i\rangle$之间的矩阵元在 $q\to 0$ 的极限下为

$$\langle B'^i_a \mid S^j_b(x) \mid B^k_c\rangle = (D_s d^{ijk}_{abc} + F_s f^{ijk}_{abc})u'^\dagger\gamma_4 u. \tag{12.81}$$

式中 u 和 u'是(3.26)中的旋量解,具有与物理重子的初态和末态相同的自旋和动量,γ_4 是(3.11)中给出的狄拉克矩阵,D_s 和 F_s 是常数,而张量

$$d^{ijk}_{abc} = \frac{4}{9}\delta^i_a\delta^j_b\delta^k_c + \delta^i_b\delta^j_c\delta^k_a + \delta^i_c\delta^j_a\delta^k_b$$

$$-\frac{2}{3}[\delta_b^i\delta_a^j\delta_c^k+\delta_a^i\delta_c^j\delta_b^k+\delta_c^i\delta_b^j\delta_a^k], \tag{12.82}$$

和
$$f_{abc}^{ijk}=\delta_b^i\delta_c^j\delta_a^k-\delta_c^i\delta_a^j\delta_b^k. \tag{12.83}$$

(ii) 试证 d_{abc}^{ijk} 在交换 (i, a) 和 (j, b)，或交换 (i, a) 和 (k, c)，或交换 (j, b) 和 (k, c) 下是对称的，而 f_{abc}^{ijk} 则为反对称的. 两张量都满足无迹条件 $d_{ibc}^{ijk}=f_{ibc}^{ijk}=0$.

(iii) 从(12.48)和(12.68)可见，$|\mathrm{p}\rangle=|B_3^1\rangle$，$\langle\mathrm{p}|=\langle B_1^3|$. 设 $j=b=3$，并证明

$$\langle\mathrm{p}\mid S_3^3\mid\mathrm{p}\rangle=D_sd_{133}^{331}+F_sf_{133}^{331}=\frac{1}{3}D_s+F_s. \tag{12.84}$$

同样地，证明

$$\langle\Lambda\mid S_3^3\mid\Lambda\rangle=\frac{2}{3}D_s,\ \langle\Sigma\mid S_3^3\mid\Sigma\rangle=-\frac{2}{3}D_s,$$

$$\langle\Xi\mid S_3^3\mid\Xi\rangle=\frac{1}{3}D_s-F_s, \tag{12.85}$$

故有

$$2\langle\mathrm{p}\mid S_3^3\mid\mathrm{p}\rangle+2\langle\Xi\mid S_3^3\mid\Xi\rangle=3\langle\Lambda\mid S_3^3\mid\Lambda\rangle+\langle\Sigma\mid S_3^3\mid\Sigma\rangle,$$

这是八重态质量公式(12.70).

习题 12.2. 令 $J_\lambda(x)_b^k$ 为强子 SU_3 八重态的矢量或轴矢量算符. 利用上一习题中的记号，试证随 $J_\lambda(x)_b^j$ 是矢量或轴矢量而不同而有

$$\lim_{q\to 0}\langle B_a'^i\mid J_\lambda(x)_b^j\mid B_c^k\rangle = \mathrm{i}(Dd_{abc}^{ijk}+Ff_{abc}^{ijk})\cdot\begin{cases}u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda u & \text{矢量},\\ u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5 u & \text{轴矢量}.\end{cases} \tag{12.86}$$

式中 D 和 F 是常数. 由此，如 h 和 h' 表示各种不同的强子，上式又可写成

$$\lim_{q\to 0}\langle h'\mid J_\lambda(x)_b^j\mid h\rangle \equiv \mathrm{i}\langle h'\mid \mathscr{J}_b^j\mid h\rangle\cdot\begin{cases}u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda u & \text{矢量},\\ u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5 u & \text{轴矢量}.\end{cases} \tag{12.87}$$

试证下表 $b=2$, $j=1$ 和 $b=3$, $j=1$ 的约化矩阵元 $\langle h'|\mathscr{J}_b^j|h\rangle$[这些流在弱作用的卡比博理论中很重要].

表 12.2

$h\to h'$	$\langle h'\|\mathscr{J}_2^1\|h\rangle$	$\langle h'\|\mathscr{J}_3^1\|h\rangle$
$n\to p$	$D-F$	0
$\Sigma^-\to\Lambda^0$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}D$	0
$\Lambda^0\to\Sigma^+$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}D$	0
$\Sigma^-\to\Sigma^0$	$-\sqrt{2}F$	0
$\Xi^-\to\Xi^0$	$D+F$	0
$\Lambda^0\to p$	0	$(D-3F)/\sqrt{6}$
$\Sigma^-\to n$	0	$D+F$
$\Xi^-\to\Lambda^0$	0	$(D+3F)/\sqrt{6}$
$\Xi^-\to\Sigma^0$	0	$(D-F)/\sqrt{2}$
$\Xi^0\to\Sigma^+$	0	$D-F$

参 考 文 献

Ne'eman Y, Gell-Mann M, eds. The Eightfold Way. New York: Benjamin, 1964.

第13章　时间反演

考虑在第1章开始就已经讨论过的一个经典粒子系. 令 q_i 表示广义坐标,这里 $i = 1, 2, \cdots, N$, 它们可以写成一个列矩阵 q. 对这样的一个系统而言,时间反演(T)不变性只是意味着在如下的变换下物理定律保持不变

$$q \to q \text{ 和 } t \to -t.$$

因此,如果 $q(t)$是动力学方程的一个解,则 $q(-t)$也是.

假如我们看一个经典粒子系的运动影片. 在 T 不变的条件下,时间反演序列也代表一个动力学方程的可能解. 例如,一水滴从水龙头落下滴在池子上溅开的影片,当反过来放映时,就会从溅散的水珠集合起来开始到重新构成水滴,再跳回水龙头. T 不变性是说这样一个不大可能的序列是能够实现的. 当然,为了使它发生,我们必须使包含在溅散过程中的所有分子的速度同时反转. 这是很困难的. 实际上不会发生. 因此,如果 T 不变的经典系是由大量数目的粒子组成的,虽然时间反演序列是有可能实现的,但一般说来是不大可能发生的. 只有在这种概率的意义上我们才能够把一个宏观系统任何事件的时序系列和它的时间反演系列加以区分,从而决定宏观时间的方向.

众所周知,经典力学的时间反演不变的动力学方程能够导致宏观世界时间不可逆的热力学. 作为一个例子,我们可以考虑乘火车在纽约和普林斯顿(Princeton)之间的旅行. 为了与微观的可逆性类比. 让我们假定每一列从纽约向普林斯顿行驶的火车有一列和它相反行驶的火车. 现在假定火车站没有标志. 一个人如果注意了火车的方向,则他从普林斯顿出发到达纽约终点的概率将是1,否则就是$\frac{1}{2}$. 但一旦他到达纽约后,如果在本因站(Penn Station)仍然没有标志,则他能够乘一列火车返回普林斯

顿的机会是非常小的.他可能乘上去波士顿的火车,并从波士顿转到芝加哥…,这就造成了宏观上的不可逆性.

在经典物理学中,一个微观系统和一个宏观系统有很大的差别.如果系统只包含少数几个粒子,在 T 不变性成立下,将不可能在统计的意义下区别顺时序和反时序的系列.因为两者都同样可能.在13.2节中我们将看到后一表述在量子力学中必须加以修改.

现在,我们转到量子理论中时间反演的问题.

13.1 薛定谔表象中的时间反演

我们从薛定谔方程式(5.4)开始,

$$H \mid t\rangle = -\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle \tag{13.1}$$

对任何态矢 $|t\rangle$ 成立.

定义:H 被叫做 T-不变的,当且仅当有一个幺正算符 U_T 满足

$$U_T H^* U_T^\dagger = H. \tag{13.2}$$

这里,像以前一样,* 是表示复共轭.由这个定义,能够很容易地建立如下的定理.

定理. 若 H 是 T 不变的,则 $U_T|t\rangle^*$ 满足时间反演的薛定谔方程式.

证明. 在(13.1)中,$|t\rangle$ 是一个列矩阵而 H 是一个方矩阵.令 $|t\rangle^*$ 和 H^* 分别表示它们的复共轭.由薛定谔方程得出

$$H^* \mid t\rangle^* = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle^*.$$

用 U_T 乘上式的左边并用

$$U_T^\dagger U_T = 1, \tag{13.3}$$

我们得到

$$U_T H^* U_T^\dagger U_T \mid t\rangle^* = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} U_T \mid t\rangle^*.$$

由于(13.2),它也可以写作

$$HU_T|t\rangle^* = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial(-t)}U_T|t\rangle^* . \tag{13.4}$$

因此 $U_T|t\rangle^*$ 满足时间反演的薛定谔方程式.

这样,在量子力学和在经典力学中,T 不变性是表示从动力学方程式的任一个解可以得到另一解,这个解满足同样的方程式,只是 $t \to -t$.

定义:我们定义 T 为这样的算符,对于任一态矢 $|\rangle$,它满足*

$$T|\rangle = U_T|\rangle^* \tag{13.5}$$

并且,对于任一线性算符 O,有

$$TOT^{-1} = U_T O^* U_T^{\dagger}. \tag{13.6}$$

[在矩阵表示下,$|\rangle$可以是任一列矩阵而 O 是任一方矩阵.]

我们注意到,当 O=单位矩阵 1 时,(13.6)式变为

$$TT^{-1} = 1. \tag{13.7}$$

若$|\rangle$是两个态矢$|1\rangle$和$|2\rangle$的线性叠加

$$|\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle,$$

这里 c_1 和 c_2 是常数,则根据(13.5)

$$T|\rangle = c_1^* T|1\rangle + c_2^* T|2\rangle. \tag{13.8}$$

因此,T **不是**一个线性算符. 文献中有时把 T 称作"反幺正"(antiunitary)算符,除上面给出的意义之外,并无其他含义.

13.2 对微观系统建立时间反演量子解的不可能性

如我们在本章开始所说的那样,与宏观系统相反,在经典力学中,T-不变的微观系统的时间反演运动不仅是可能的而且能以相同的概率

---

* Wigner E P. *Gött Nach Math Naturw Kl*, 1932, 546.

发生. 但是,在量子理论中,这一情况是大大地改变了.

我们可以用 μ 衰变的简单例子来说明这一情况. 考虑一个静止的 μ^-,假定它的自旋 $\boldsymbol{S}_\mu$ 的极化方向向上,如图 13.1. 在它的衰变

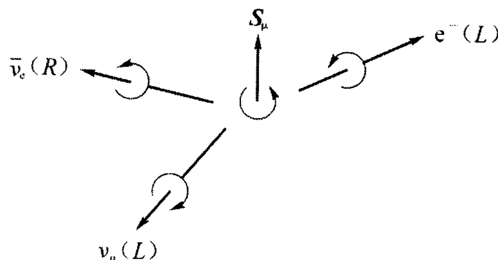


图 13.1 衰变 $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

$$\mu^- \to e^-(L) + \bar{\nu}_e(R) + \nu_\mu(L), \tag{13.9}$$

中,e^-, $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 分别以螺旋度 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 发射出来,用 L, R 和 L 表示它们的螺旋度. [为简单计,我们把电子质量 m_e 近似地当作 0.]让我们考察这一特殊过程,即(13.9)中 e^-, $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 的末动量分别为 $\boldsymbol{P}_e$, $\boldsymbol{P}_{\bar{\nu}}$ 和 $\boldsymbol{P}_\nu$;它的时间反演过程为

$$e^-(L) + \bar{\nu}_e(R) + \nu_\mu(L) \to \mu^-, \tag{13.10}$$

这是从动量为 $-\boldsymbol{P}_e$, $-\boldsymbol{P}_{\bar{\nu}}$ 和 $-\boldsymbol{P}_\nu$ 的 e^-, $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 的初态开始的. 如图13.2所示,由于动量和自旋的方向都逆转了,因而每个粒子的螺旋度不变. 假定 T 不变成立,这将导致一个静止的 μ^- 态. 问题是它的自旋方向 $\boldsymbol{S}'_\mu$ 将如

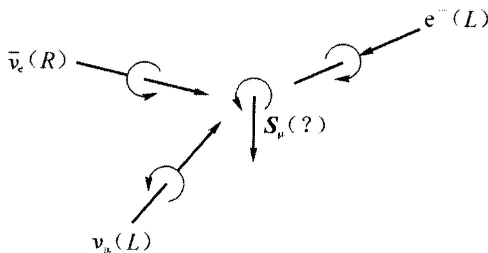


图13.2 逆反应 $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \to \mu^-$,其中 e^-, $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 的动量和自旋与图 13.1 中的相反

何？望读者在此停留片刻加以思考. 如果这是一个经典系统，则 T 不变性将要求 μ 的末态的自旋 $\boldsymbol{S}'_\mu$ 与(13.9)中 $\boldsymbol{S}_\mu$ 的方向相反，即向下，如图 13.2 所示，但这要加一问号.

无论如何，对量子系统而言，一般将不会如此. 这能从图 13.3 和图 13.4 所示的特殊情况中看出，这时 $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 的动量是平行的. 如图 13.3 和图 13.4 所示. 在(13.10)的逆反应中，由于假定了所有的初动量都在一条直线上，因此沿这条直线的总角动量必须守恒；这要求末态 μ 的自旋 $\boldsymbol{S}'_\mu$ 和始态电子的自旋相同. 这样 $\boldsymbol{S}'_\mu$ 必须与电子的动量平行，因而可以落在与 $-\boldsymbol{S}_\mu$ 完全不同的方向上.

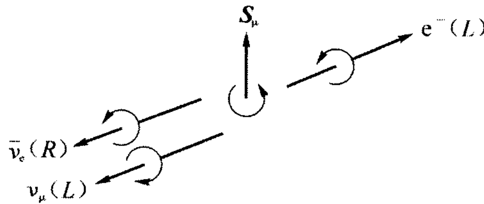


图 13.3 衰变 $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$，其中两个末态中微子的动量平行

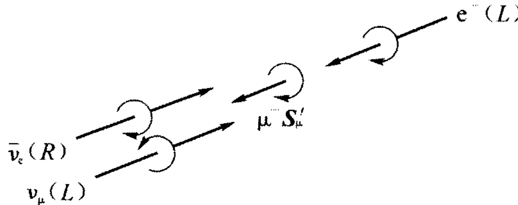


图 13.4 反应 $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \to \mu^-$，其中两个初态中微子的动量平行

理由是，在量子力学中，μ 衰变(13.9)的末态 $|e\bar{\nu}_e\nu_\mu\rangle$ 是由向外的相干球面波所组成. 它的时间反演态

$$T|e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\rangle$$

应当由相干的入射球面波所组成；即我们应当在一切可能的方向上同时逆转这三个轻子的自旋和动量并保持它们的波幅之间适当的相位关系，只有这样，(13.10)中 μ 的自旋 $\boldsymbol{S}'_\mu$ 才能是 $-\boldsymbol{S}_\mu$. 显然，这是非常困难的.

这个问题的根子在于这一事实，即任一量子系统比起经典宏观物理

的波动方程要复杂得多. 只是对单个的稳定粒子而言,量子力学的时间反演态才是简单的,因为它可以通过把动量的方向转 180°而得到. 一般说来,甚至对于一个具有 T 不变性的微观系统,量子力学的时间反演态 $T\,|\rangle = U_T\,|\rangle^*$ 总是非常复杂而不可几的,因为它包含了非常大的自由度. 因此之故,实际上在量子力学中对 T 不变性的检验并不是直接去验证时间反演的薛定谔方程(13.4). 而是像我们将要讨论的,通过对一些倒易关系或某些相角等式的肯定或否定去检验它. 不过,在这之前,我们必须熟习一下反幺正算符 T 的一些性质.

13.3 T 算符的一些性质

1. *以 QED 为例* 令 H 为 QED 的哈密顿算符. 像在第 6 章那样,我们取库仑规范;因而独立的广义坐标是横向电磁场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\text{tr}}$ 和电子场 ψ. 在这一节里,我们将停留在薛定谔表象中. 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 ψ 都与时间 t 无关. 我们可写出

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t) = \psi(\boldsymbol{r},\ 0),\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ 0)$$

同样,对于电磁场的共轭动量 $\boldsymbol{\Pi}$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ t) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ 0).$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 都满足横向条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \quad 和 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} = 0,$$

与(6.30)相符,

定理. 由(6.55)式给出的 H 是 T 不变的,这里 T 满足

$$T\psi(\boldsymbol{r},\ 0)T^{-1} = U_T\psi^*(\boldsymbol{r},\ 0)U_T^\dagger = \eta_+\sigma_2\psi(\boldsymbol{r},\ 0), \tag{13.11}$$

$$T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ 0)T^{-1} = U_T\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r},\ 0)U_T^\dagger = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ 0), \tag{13.12}$$

$$T\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ 0)T^{-1} = U_T\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ 0)^*U_T^\dagger = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},\ 0), \tag{13.13}$$

其中 η_+ 是一个常数相因子, $|\eta_+| = 1$, σ_2 由(3.6)式给出.

证明. 首先,我们假定由(13.11)—(13.13)所定义的算符 T 是存

在的,因此我们可以用它来建立 H 的时间反演不变性.随后,我们将回来证明这样的 T 算符确实存在.

根据(6.6)和(6.21)

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{E}^{\text{tr}}=-\boldsymbol{\Pi},$$

由于(13.12)—(13.13),自由电磁哈密顿密度(6.24),

$$\mathscr{H}_\gamma=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^{\text{tr}})^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2,$$

显然满足 T-不变性的条件

$$T\mathscr{H}_\gamma T^{-1}=\mathscr{H}_\gamma,$$

在 T 变换下,自由电子哈密顿密度(6.25),

$$\mathscr{H}_e=\psi^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi,$$

变为

$$T\mathscr{H}_e T^{-1}=U_T\mathscr{H}_e^* U_T^\dagger=U_T\psi^{*\dagger}(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\nabla+\beta^* m)\psi^* U_T^\dagger$$
$$=U_T\psi^{*\dagger}U_T^\dagger(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\nabla+\beta^* m)U_T\psi^* U_T^\dagger.$$

由于(13.11)及其厄米共轭式

$$T\psi^\dagger(\boldsymbol{r},0)T^{-1}=U_T[\psi^\dagger(\boldsymbol{r},0)]^* U_T^\dagger=\eta_+^*\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r},0)\sigma_2, \quad (13.14)$$

前式等于

$$\psi^\dagger\sigma_2(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\nabla+\beta^* m)\sigma_2\psi. \quad (13.15)$$

回顾在(3.10)中,$\boldsymbol{\alpha}=\rho_1\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\beta=\rho_3$. 因而,

$$\sigma_2\boldsymbol{\alpha}^*\sigma_2=-\boldsymbol{\alpha} \quad \text{和} \quad \sigma_2\beta^*\sigma_2=\beta, \quad (13.16)$$

利用这结果,(13.15)变为 $\mathscr{H}_e$,因此

$$T\mathscr{H}_e T^{-1}=\mathscr{H}_e.$$

电磁流算符是

$$j_\mu=\mathrm{i}:\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi:. \quad (13.17)$$

用

$$\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu = \begin{cases} \rho_1\sigma_j = \alpha_j, & \text{对于 } \mu = j \neq 4, \\ \mathrm{i}, & \text{对于 } \mu = 4, \end{cases} \tag{13.18}$$

和(13.16),我们有

$$\sigma_2(\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu)^*\sigma_2 = -\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu, \tag{13.19}$$

由此就有

$$T\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi T^{-1} = T\psi^\dagger T^{-1}(\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu)^* T\psi T^{-1}$$
$$= \psi^\dagger\sigma_2(\mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu)^*\sigma_2\psi = -\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi.$$

把上方程式与(13.17)联合起来,我们导出

$$Tj_\mu(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = -j_\mu(\boldsymbol{r}, 0). \tag{13.20}$$

这个公式有一直接的解释:由于 $j_\mu = (\boldsymbol{j}, \mathrm{i}\rho)$,在时间反演下,矢量 $\boldsymbol{j}$ 反向而成为 $-\boldsymbol{j}$;电荷密度 ρ 不变,

$$T\rho(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = \rho(\boldsymbol{r}, 0).$$

但由于 $\mathrm{i}\to-\mathrm{i}$,这使得 $j_4 = \mathrm{i}\rho \to -j_4$. 在库仑规范中,$A_0$ 由 ρ 导出即(6.16)式. ρ 的 T 不变性意味着

$$TA_0(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = A_0(\boldsymbol{r}, 0),$$

加上(13.12)式,就得出

$$TA_\mu(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = -A_\mu(\boldsymbol{r}, 0), \tag{13.21}$$

这里 $A_\mu = (\boldsymbol{A}, \mathrm{i}A_0)$. 利用(13.20)—(13.21),我们建立起相互作用哈密顿密度(6.26),从而也就是 H 的 T 不变性;即

$$THT^{-1} = H. \tag{13.22}$$

由(13.11)式,我们注意到

$$T^2\psi T^{-2} = T(\eta_+\sigma_2\psi)T^{-1} = U_T(\eta_+\sigma_2\psi)^* U_T^\dagger$$
$$= \eta_+^*\sigma_2^* U_T\psi^* U_T = \eta_+^*\sigma_2^*\eta_+\sigma_2\psi.$$

因为 $\sigma_2^* = -\sigma_2$,我们有 $\sigma_2^*\sigma_2 = -1$,这使上式转变为

$$T^2\psi T^{-2} = -\psi, \tag{13.23}$$

即 ψ 的时间反转的时间反演态是 $-\psi$.

进一步我们注意到在相位变换下

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi,$$

(13.11)式变为

$$T\psi T^{-1} \to T\psi' T^{-1} = e^{-i\theta}T\psi T^{-1} = e^{-i\theta}\eta_+ \sigma_2\psi = e^{-2i\theta}\eta_+ \psi'.$$

因此,如果我们用下式定义 η'_+

$$T\psi' T^{-1} \equiv \eta'_+\sigma_2\psi',$$

则

$$\eta'_+ = e^{-2i\theta}\eta_+.$$

由于 QED 满足轻子数守恒,ψ 的相角可任意选定;因此,在不失一般性的条件下,我们可选择这样的相角以使最后的相因子 $\eta_+ = 1$, 因此(13.11)变为

$$T\psi(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = \sigma_2\psi(\boldsymbol{r}, 0), \tag{13.24}$$

或者从左边乘以 σ_2,

$$\sigma_2 T\psi(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = \psi(\boldsymbol{r}, 0). \tag{13.24a}$$

剩下的问题是要证明由式(13.11)—(13.13)所定义的 T 的存在. 把 $t = 0$ 的傅里叶展开式

$$\psi(\boldsymbol{r}, 0) = \sum_{\boldsymbol{p}, s} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}(a_{\boldsymbol{p}, s}u_{\boldsymbol{p}, s}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}, s}v_{\boldsymbol{p}, s}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}) \tag{13.25}$$

代入(13.24a),我们得到左边为

$$\sigma_2 T\psi(\boldsymbol{r}, 0)T^{-1} = \sigma_2 \sum_{\boldsymbol{p}, s} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}(Ta_{\boldsymbol{p}, s}T^{-1}v^*_{\boldsymbol{p}, s}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + Tb^\dagger_{\boldsymbol{p}, s}T^{-1}v^*_{\boldsymbol{p}, s}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}),$$

由于(3.83)式,它可以写作

$$\sum_{p,s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(Ta_{p,s}T^{-1}e^{i\theta_{p,s}}u_{-p,s}e^{-ip\cdot r}+Tb^{\dagger}_{p,s}T^{-1}e^{-i\theta_{-p,s}}v_{-p,s}),$$

上式的右边就是(13.25). 令 $u_{p,s}e^{ip\cdot r}$和$v_{p,s}e^{-ip\cdot r}$的系数相等,我们导出

$$Ta_{p,s}T^{-1}=e^{-i\theta_{p,s}}a_{-p,s},$$
$$Tb^{\dagger}_{p,s}T^{-1}=e^{i\theta_{-p,s}}b^{\dagger}_{-p,s}, \tag{13.26}$$

通过厄米共轭

$$Ta^{\dagger}_{p,s}T^{-1}=e^{i\theta_{p,s}}a^{\dagger}_{-p,s},$$
$$Tb_{p,s}T^{-1}=e^{-i\theta_{-p,s}}b_{-p,s}. \tag{13.27}$$

利用(3.84)并记住 T 算符的反幺正性质,我们看出

$$T^2a^{\dagger}_{p,s}T^{-2}=e^{-i\theta_{p,s}+i\theta_{-p,s}}a^{\dagger}_{p,s}=-a^{\dagger}_{p,s}$$

和

$$T^2b^{\dagger}_{p,s}T^{-2}=e^{-i\theta_{p,s}+i\theta_{-p,s}}b^{\dagger}_{p,s}=-b^{\dagger}_{p,s}, \tag{13.28}$$

这与(13.23)相符. 下一步我们把 $t=0$ 时的傅里叶展开式(6.32)—(6.33)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},0)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}[\boldsymbol{\alpha}_k e^{ik\cdot r}+\text{h. c.}]$$

和

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},0)=\sum_k\sqrt{\frac{\omega}{2\Omega}}[-i\boldsymbol{\alpha}_k e^{ik\cdot r}+\text{h. c.}]$$

代入(13.12)—(13.13);我们有

$$T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},0)T^{-1}=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}[T\boldsymbol{\alpha}_kT^{-1}e^{-ik\cdot r}+\text{h.c.}]$$
$$=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},0)$$

和

$$T\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},0)T^{-1}=\sum_k\sqrt{\frac{\omega}{2\Omega}}[iT\boldsymbol{\alpha}_kT^{-1}e^{-ik\cdot r}+\text{h. c.}]$$
$$=\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},0),$$

由此得到

$$T\boldsymbol{\alpha}_k T^{-1} = -\boldsymbol{\alpha}_{-k}$$

和

$$T\boldsymbol{\alpha}_k^\dagger T^{-1} = -\boldsymbol{\alpha}_{-k}^\dagger. \tag{13.29}$$

像以前一样,横向条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi} = 0$ 表示

$$\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\alpha}_k^\dagger \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

现在如果我们利用(6.36)式

$$\alpha_{k,\, s=\pm 1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_k^\dagger \cdot [\, \hat{e}_1(\boldsymbol{k}) \pm \mathrm{i}\hat{e}_2(\boldsymbol{k})\,],$$

这里,正如图 6.1 中一样,$\hat{e}_1(\boldsymbol{k})$, $\hat{e}_2(\boldsymbol{k})$和$\hat{k}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$构成标准的右手正交矢量组,因此,在 T 变换下.我们有

$$T\alpha_{k,\, s=\pm 1}^\dagger T^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_{-k}^\dagger \cdot [\, \hat{e}_1(\boldsymbol{k}) \mp \mathrm{i}\hat{e}_2(\boldsymbol{k})\,]. \tag{13.30}$$

由于 $\hat{e}_1(\boldsymbol{k})$, $-\hat{e}_2(\boldsymbol{k})$和$-\hat{k}$也组成一套右手正交矢量组,我们可以令

$$\hat{e}_1(-\hat{k}) = \hat{e}_1(\hat{k}),\quad \hat{e}_2(-\hat{k}) = -\hat{e}_2(\boldsymbol{k}),$$

它把(13.30)变为

$$T\alpha_{k,\,s}^\dagger T^{-1} = -\alpha_{-k,\,s}^\dagger, \tag{13.31}$$

它的厄米共轭为

$$T\alpha_{k,\,s} T^{-1} = -\alpha_{-k,\,s}.$$

让我们考虑希耳伯特空间的基矢(3.40),它可以用实数的列矩阵表示

$$|\,0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\ \vdots\end{pmatrix},\quad a_{p,\,s}^\dagger\,|\,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\ \vdots\end{pmatrix},$$

$$b_{p,\,s}^\dagger\,|\,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix},\ \cdots. \tag{13.32}$$

类似于(10.35)和(10.56),我们对希尔伯特空间中的基矢(10.25)引进线性变换

$$|0\rangle \to |0\rangle,\ a_{p,s}^{\dagger}|0\rangle \to e^{i\theta_{p,s}}a_{-p,s}^{\dagger}|0\rangle,$$

$$b_{p,s}^{\dagger}|0\rangle \to -e^{i\theta_{p,s}}b_{-p,s}^{\dagger}|0\rangle,\ \alpha_{k,s}^{\dagger}|0\rangle \to -\alpha_{-k,s}^{\dagger}|0\rangle,$$

和一般地

$$|n_- e^-,\ n_+ e^+,\ n_\gamma\gamma\rangle \to (-1)^{n_++n_\gamma}\prod_{i=1}^{n_-}\prod_{j=1}^{n_+}\prod_{n=1}^{n_\gamma} \cdot e^{i\theta_{p_i,s_i}}a_{-p_i,s_i}^{\dagger}e^{i\theta_{p_j,s_j}}b_{-p_j,s_j}^{\dagger}\alpha_{-p_k,s_k}^{\dagger}|0\rangle. \tag{13.33}$$

显然,这组完全基矢的正交性并未改变.因此,这一变换的算符是幺正的,把它叫做 U_T,现在我们可以由这个 U_T 和它的复共轭建立一个反幺正的 T 算符使它符合(13.5)和(13.6).由于这些基矢都是实的,像(13.32)所表明的那样,很容易看出这样建立起来的 T 算符满足(13.26),(13.27)和(13.31)且有

$$T|0\rangle = |0\rangle. \tag{13.34}$$

这确立了 U_T 和 T 的存在;也完成了定理的证明.

说明. 上述讨论很容易推广到包括其他场.例如,我们可选择 ψ 作为任何带电的自旋为$\frac{1}{2}$的粒子,譬如 μ 子,夸克,质子,….由于这些粒子参与电磁相互作用,T 不变性的假定要求它们的场 ψ 满足(13.11),同时它们的希尔伯特空间矢量像(13.33)那样变换.对于中性粒子,如 n,Σ^0 和 Λ^0,它们的场也必须满足(13.11),这既可以从强相互作用的 T 不变性假定,也可以从它们的磁矩所引起的电磁相互作用来推断.同样的结论也可以应用于中微子,只要我们把 T 不变的假定用于弱相互作用.然而,这是一个在以后的讨论中将受到批判性检验的假定.

2. *时间反演与角动量* 让我们首先考虑一个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子系统.角动量算符由(3.62)给出:

$$\boldsymbol{J} = \int \psi^{\dagger}\left(\boldsymbol{l} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\psi \mathrm{d}^3 r,$$

这里 $\boldsymbol{l}=-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla}$. 由(13.11)和(13.14)得出

$$TJT^{-1}=\int\psi^{\dagger}\sigma_2\left(\boldsymbol{l}^*+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^*\right)\sigma_2\psi\mathrm{d}^3r,$$

由于 $\boldsymbol{l}^*=-\boldsymbol{l}$ 和 $\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2=-\boldsymbol{\sigma}$, 它可以被写作

$$TJT^{-1}=-\boldsymbol{J}. \tag{13.35}$$

因为一切的物理态可以用$\frac{1}{2}$自旋的粒子来产生,如果 T 不变性成立,上述关系对一切系统都会成立.

其次,我们考虑任意一个 T 不变的系统,H, $\boldsymbol{J}$ 和 J_z 是它的哈密顿算符、总角动量算符及其 z 分量. 令$|j, m\rangle$代表本征态,它满足:

$$H\mid j, m\rangle=E\mid j, m\rangle,$$
$$\boldsymbol{J}^2\mid j, m\rangle=j(j+1)\mid j, m\rangle \tag{13.36}$$

和

$$J_z\mid j, m\rangle=m\mid j, m\rangle,$$

这里 m 在下列诸值中变化,

$$-j, -j+1, \cdots, j.$$

(i) 我们首先讨论这简单的情况,即除了 $2j+1$ 个转动简并外,态$|j, m\rangle$没有其他的简并. 把 T 算符作用于(13.36)式的最后一个方程,我们得到

$$TJ_zT^{-1}T\mid j, m\rangle=mT\mid j, m\rangle,$$

由于(13.35)式,它可以写作

$$J_zT\mid j, m\rangle=-mT\mid j, m\rangle.$$

同样. 从(13.36)式的上面两个方程,我们发现 $T|j, m\rangle$仍然是 H 和 $\boldsymbol{J}^2$ 的本征态,本征值为 E 和 $j(j+1)$. 因此,根据我们的假定没有其他的简并,$T|j, m\rangle$必定正比于$|j, -m\rangle$;即

$$T\mid j, m\rangle=U_T\mid j, m\rangle^*=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(j, m)}\mid j, -m\rangle. \tag{13.37}$$

让我们构造这 $(2j+1)$ 维的空间,它的基矢为 $|j,j\rangle$, $|j,j-1\rangle$, $\cdots$, $|j,-j\rangle$. 写出来是

$$|j,j\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad |j,j-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

$$\cdots,\qquad |j,-j\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{13.38}$$

在这个空间中,厄米算符 J_x, J_y, J_z 和幺正算符 U_T 都是 $(2j+1)\times(2j+1)$ 的矩阵. 我们将看到,可以选

$$\begin{aligned}&J_x,\ J_z && \text{实数},\\ &J_y && \text{虚数},\\ &U_T=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi J_y} && \text{也是实数},\end{aligned} \tag{13.39}$$

并且,由于根据(13.38), $|j,m\rangle^*=|j,m\rangle$

$$\begin{aligned}T|j,m\rangle&=U_T|j,m\rangle^*=U_T|j,m\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi J_y}|j,m\rangle\\&=(-1)^{j+m}|j,-m\rangle,\end{aligned} \tag{13.40}$$

这固定了(13.37)中的相因子.

证明. 在 $j=\frac{1}{2}$ 的情况下,我们有 $\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, 它的标准表示实现了 J_x, J_z 为实数和 J_y 为虚数的条件,这可以从取它的分量为 $\sigma_x=\tau_1$, $\sigma_y=\tau_2$ 和 $\sigma_z=\tau_3$ 看出,τ 的表示见(3.1)式. 为了使(3.35)式成立, 2×2 的幺正矩阵 U_T 必须满足

$$U_T\boldsymbol{\sigma}^*U_T^\dagger=-\boldsymbol{\sigma}.$$

利用(11.41),我们看出 U_T 必须是如下的形式

$$U_T = e^{i\alpha}e^{i\frac{1}{2}\pi\sigma_y}$$

这里 $e^{i\alpha}$是一个任意的因子,我们的惯例是取 $e^{i\alpha}=1$,这使得在这个二维空间中

$$U_T = e^{i\frac{1}{2}\pi\sigma_y} \text{ 实数},$$

因此(13.40)是对的.

通过考虑这样两个 $j=\frac{1}{2}$ 的二维旋量空间的直积,我们得到一个四维空间.它可以被分解成一个 $j=1$ 的三维空间和剩下的一个 $j=0$ 的空间.既然 J_x, J_y 和 J_z 是相加性的,而 U_T 是相乘的,就很容易看出我们所选择的作为 $j=\frac{1}{2}$ 的 $\boldsymbol{J}$ 和 U_T 的矩阵同样对于 $j=1$ 也能导致(13.39)和(13.40).与此类似,考察 N 个这样的 $j=\frac{1}{2}$ 的旋量空间的直积,我们能够证明,对于一般的 j,同样的选择也给出了(13.39)和(13.40).

我们进一步注意到从(13.40)

$$T^2 = (-1)^{2j}, \tag{13.41}$$

这与(13.23)式中的负号相符.

(ii) 对于分立的态,例如一个静止的单粒子,H 有时可能有其他的简并,例如 p 和 $\bar{p}$ 之间精确的简并,或者 p 和 n 之间近似的简并.对于前者,可以要求态$|j, m\rangle$还带有一确定的重子数来区分这附加的简并;对于后者简并可以在 H 中包含电磁相互作用而消除.因此,在每种情况下,(13.39)和(13.40)都成立.

(iii) 对于连续态中的自由粒子,可以通过下面的办法消除简并,首先确定粒子的种类以使问题约化为自由单粒子问题,因为自由多粒子的波函数是单粒子波函数的乘积.其次,我们可以把整个系统放在一个半径为 R 的大球形盒内.对于有限的 R,不同的角动量态具有不同的能量;因此简并被消除.从而(13.39)成立.这样的态将被标志为

$$|j, m; \text{free}\rangle,$$

它们满足(13.40),即

$$T \mid j, m; \text{free}\rangle = (-1)^{j+m} \mid j, -m; \text{free}\rangle, \tag{13.42}$$

既然对于任何有限的 R,(13.39)和(13.40)两式都成立,则它们在 $R\to\infty$ 的极限下也应成立.

对于那些是动量的本征态而不是角动量本征态的自由粒子,它们的 T 变换由(13.33)给出.

(iv) 对于在连续态中角动量 J 有定值的那些相互作用的粒子,我们可以考虑"初"态(6.58),

$$\mid (j, m)^{\text{in}}\rangle = U(0, -\infty) \mid j, m; \text{free}\rangle, \tag{13.43}$$

或者"末"态(6.59),

$$\mid (j, m)^{\text{f}}\rangle = U^{\dagger}(\infty, 0) \mid j, m; \text{free}\rangle, \tag{13.44}$$

这里为了方便,在(6.58)—(6.59)中我们已令 $t = 0$. 正如在以后的(13.75)中将要证明的,T 不变性表示

$$TU(0, -\infty)T^{-1} = U(0, \infty),$$

由于

$$U(0, \infty)U(\infty, 0) = U(0, 0) = 1$$

和

$$U(\infty, 0)^{\dagger}U(\infty, 0) = 1,$$

这也可以写成

$$TU(0, -\infty)T^{-1} = U^{\dagger}(\infty, 0). \tag{13.45}$$

因此,利用(13.42)—(13.45),我们有

$$T \mid (j, m)^{\text{in}}\rangle = (-1)^{j+m} \mid (j, -m)^{\text{f}}\rangle$$

和

$$T \mid (j, m)^{\text{f}}\rangle = (-1)^{j+m} \mid (j, -m)^{\text{in}}\rangle. \tag{13.46}$$

所以,在时间反演下,初态和末态互相交换了.

练习题. 证明在(13.38)的 $(2j+1)$ 维空间中,不为零的 J_x, J_y 和 J_z 的矩阵元是

$$\langle j, m\pm 1 \mid J_x \mid j, m\rangle = \frac{1}{2}[(j\mp m)(j\pm m+1)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle j, m\pm 1 \mid J_y \mid j, m\rangle = \mp \frac{1}{2}\mathrm{i}[(j\mp m)(j\pm m+1)]^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\langle j, m \mid J_z \mid j, m\rangle = m. \tag{13.47}$$

13.4 不同表象中的时间反演

1. **海森伯表象** 海森伯表象中的算符 O_{H} 与薛定谔表象中的算符有如下关系

$$O_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},$$

因此它满足海森伯方程

$$[H, O_{\mathrm{H}}(t)] = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O_{\mathrm{H}}(t), \tag{13.48}$$

这与(5.1)和(5.12)相符. 在 T 运算下,$O_{\mathrm{H}}(t)$变为

$$\begin{aligned} TO_{\mathrm{H}}(t)T^{-1} &= U_T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^*t}O_{\mathrm{S}}^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^*t}U_T^\dagger \\ &= U_T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^*t}U_T^\dagger U_T O_{\mathrm{S}}^*\,U_T^\dagger U_T\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^*t}U_T^\dagger. \end{aligned}$$

如果理论是 T 不变的,由于(13.2)和(13.6). 我们可以把上式重写作

$$TO_{\mathrm{H}}(t)T^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}TO_{\mathrm{S}}T^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}, \tag{13.49}$$

它满足

$$[H, TO_{\mathrm{H}}(t)T^{-1}] = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial(-t)}TO_{\mathrm{H}}(t)T^{-1}, \tag{13.50}$$

这很容易从直接微分(13.49)来证明. 这样 $TO_{\mathrm{H}}(t)T^{-1}$ 满足时间反演的海森伯方程.

现在,让我们继续我们对 QED 的讨论,只是在海森伯表象中进行. 在 $O=\psi$ 的情况下,我们有

$$\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\psi(\boldsymbol{r}, 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \tag{13.51}$$

这里,在 $t=0$ 时

$$\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},0)=\psi(\boldsymbol{r},0)=\psi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r},0).$$

方程式(13.49)给出

$$T\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},t)T^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}T\psi(\boldsymbol{r},0)T^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht},\tag{13.52}$$

由于(13.11)和(13.51),这导致

$$\begin{aligned}T\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},t)T^{-1}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\eta_t\sigma_2\psi(\boldsymbol{r},0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\\&=\eta_t\sigma_2\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},-t).\end{aligned}$$

我们注意到如果略去下标 H,上式取如下形式

$$T\psi(\boldsymbol{r},t)T^{-1}=\eta_t\sigma_2\psi(\boldsymbol{r},-t).\tag{13.53}$$

现在,在薛定谔表象中,这也成立,原因是在这个表象中 $\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r},0)$,因而(13.53)变为(13.11).正如在(13.24)中一样,因为 T 是反幺正的,只要我们愿意,我们可以令 $\eta_t=1$ 而不失任何一般性.

同样,由(13.13),(13.20)和(13.21)我们有

$$\begin{aligned}TA_\mu(\boldsymbol{r},t)T^{-1}&=-A_\mu(\boldsymbol{r},-t),\\Tj_\mu(\boldsymbol{r},t)T^{-1}&=-j_\mu(\boldsymbol{r},-t),\\T\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)T^{-1}&=\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},-t).\end{aligned}\tag{13.54}$$

更进一步,(13.26),(13.27)和(13.29)现在可以写作

$$\begin{aligned}Ta_{\boldsymbol{p},s}(t)T^{-1}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}}a_{-\boldsymbol{p},s}(-t),\\Ta^\dagger_{\boldsymbol{p},s}(t)T^{-1}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{\boldsymbol{p},s}}a^\dagger_{-\boldsymbol{p},s}(-t),\\Tb_{\boldsymbol{p},s}(t)T^{-1}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{-\boldsymbol{p},s}}b_{-\boldsymbol{p},s}(-t),\\Tb^\dagger_{\boldsymbol{p},s}(t)T^{-1}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{-\boldsymbol{p},s}}b^\dagger_{-\boldsymbol{p},s}(-t),\\Ta_{\boldsymbol{k},s}(t)T^{-1}&=-a_{-\boldsymbol{k},s}(-t),\\Ta^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t)T^{-1}&=-a^\dagger_{-\boldsymbol{k},s}(-t).\end{aligned}\tag{13.55}$$

在海森伯表象和薛定谔表象中,这两者(13.54)和(13.55)都成立.

2. **相互作用表象** 让我们把总的哈密顿量分成两项之和:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \tag{13.56}$$

在薛定谔表象中，它将被写作

$$H_S = (H_0)_S + (H_{\text{int}})_S, \tag{13.57}$$

在相互作用表象中，则是

$$H_I = (H_0)_I + (H_{\text{int}})_I, \tag{13.58}$$

这和(5.5)式和(5.9)式一样. 态矢$|t\rangle_I$和算符$O_I(t)$与薛定谔表象中的关系由(5.14)和(5.15)决定

$$|t\rangle_I = e^{iH_0 t}|t\rangle_S \tag{13.59}$$

和

$$O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}, \tag{13.60}$$

这里，正如在(5.16)所表明的，

$$H_0 = (H_0)_I = (H_0)_S. \tag{13.61}$$

从(13.59)—(13.60)，就得出运动方程(5.6)—(5.7)式成立的结论；即

$$(H_{\text{int}}(t))_I |t\rangle_I = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I, \tag{13.62}$$

$$[(H_0)_I, O_I(t)] = -i\dot{O}_I(t). \tag{13.63}$$

我们将假定H_S和H_0两者都满足T不变性条件(13.2)：

$$TH_S T^{-1} = U_T H_S^* U_T^\dagger = H_S, \tag{13.64}$$

$$TH_0 T^{-1} = U_T H_0^* U_T^\dagger = H_0. \tag{13.65}$$

在T运算下，$|t\rangle_I$和$O_I(t)$分别变为

$$T|t\rangle_I = U_T e^{-iH_0^* t}|t\rangle_S^* = U_T e^{-iH_0^* t} U_T^\dagger U_T |t\rangle_S^*$$

$$\begin{aligned} TO_I(t)T^{-1} &= U_T e^{-iH_0^* t} O_S^* e^{iH_0^* t} U_T^\dagger \\ &= U_T e^{-iH_0^* t} U_T^\dagger U_T O_S^* U_T^\dagger U_T e^{iH_0^* t} U_T^\dagger. \end{aligned} \tag{13.66}$$

应用(13.65)可以看出，这两个表式能够写成

$$T \mid t\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t} T \mid t\rangle_{\mathrm{S}} \tag{13.67}$$

和

$$TO_{\mathrm{I}}(t)T^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t} TO_{\mathrm{S}} T^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}. \tag{13.68}$$

直接微分就能证明 $T|t\rangle_{\mathrm{I}}$ 和 $TO_{\mathrm{I}}(t)T^{-1}$ 满足同样的运动方程(13.62)—(13.63),只是要作代换 $t \to -t$;即,它们满足时间反演的运动方程.

练习题. 证明在 QED 的情况下,(13.53)—(13.55)在相互作用表象中也成立.

13.5 S 矩阵的 T 不变性

定理. 若 T 不变性成立,则由(5.23)所定义的 S 矩阵满足

$$TST^{-1} = S^{\dagger}. \tag{13.69}$$

证明. 根据(5.20)—(5.21),在相互作用表象中 $U(t, t_0)$-矩阵满足

$$-\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_{\mathrm{int}}(t) U(t, t_0) \tag{13.70}$$

边界条件为

$$U(t_0, t_0) = 1, \tag{13.71}$$

这里 $H_{\mathrm{int}}(t)$=(13.58)式中的$(H_{\mathrm{int}}(t))_{\mathrm{I}}$,只是为简单计,略去了下标 I.
在 T 变换下,(13.70)—(13.71)变为

$$T\left[-\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0)\right] T^{-1} = TH_{\mathrm{int}}(t) T^{-1} TU(t, t_0) T^{-1} \tag{13.72}$$

和

$$TU(t_0, t_0) T^{-1} = 1. \tag{13.73}$$

假定时间反演不变,应用(13.64)—(13.65),我们有

$$T(H_{\mathrm{int}})_{\mathrm{S}} T^{-1} = (H_{\mathrm{int}})_{\mathrm{S}}.$$

把这个式子代入(13.68)式中令 $O = H_{\mathrm{int}}$,我们得到

$$TH_{\text{int}}(t)T^{-1} = H_{\text{int}}(-t). \tag{13.74}$$

因此,(13.72)变为

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial(-t)}TU(t,\ t_0)T^{-1} = H_{\text{int}}(-t)TU(t,\ t_0)T^{-1},$$

由此随即得出

$$TU(t,\ t_0)T^{-1} = U(-t,\ -t_0), \tag{13.75}$$

这是因为两边都满足 t 的同一个一阶微分方程,并且当 $t = t_0$ 时,两者都等于单位矩阵. 由于 S 矩阵是

$$S = U(\infty,\ -\infty), \tag{13.76}$$

(13.75)表示

$$TST^{-1} = U(-\infty,\ \infty). \tag{13.77}$$

利用

$$U(t,\ t')U(t',\ t_0) = U(t,\ t_0) \tag{13.78}$$

和 $U(t,\ t_0)$的幺正性,我们看出

$$U(-\infty,\ \infty) = U(\infty,\ -\infty)^{-1} = U(\infty,\ -\infty)^{\dagger}.$$

因此(13.77)变为

$$TST^{-1} = S^{\dagger},$$

这就证明了这个定理.

13.6 倒易性

1. **倒易关系** 现在考虑反应

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\cdots \rightleftharpoons \mathrm{a}'+\mathrm{b}'+\cdots, \tag{13.79}$$

其中每一个粒子带有一定的动量和螺旋性,在等式左边的标作 $\boldsymbol{p}_i$ 和 s_i $(i=a,\ b,\ \cdots)$,而右边的标作 $\boldsymbol{p}'_j$和 $\boldsymbol{s}'_j(j=a',\ b',\ \cdots)$. 让我们分别用

$|\boldsymbol{p}_i, s_i\rangle$和$|\boldsymbol{p}_j', s_j'\rangle$表示左边和右边的自由粒子的态矢量.根据上面的定理,我们能够建立倒易关系

$$|\langle \boldsymbol{p}_j', s_j' | S | \boldsymbol{p}_i, s_i\rangle| = |\langle -\boldsymbol{p}_i, s_i | S | -\boldsymbol{p}_j', s_j'\rangle|. \tag{13.80}$$

证明. 在时间反演下,一个自由粒子反转了它的动量和自旋矢量;从而它的螺旋性保持不变.因此,我们有

$$T|\boldsymbol{p}_i, s_i\rangle = e^{i\theta}|-\boldsymbol{p}_i, s_i\rangle,$$

$$T|\boldsymbol{p}_j', s_i'\rangle = e^{i\theta'}|-\boldsymbol{p}_j', s_j'\rangle, \tag{13.81}$$

这里 $e^{i\theta}$和 $e^{i\theta'}$是相因子.让我们取矩阵元$\langle \boldsymbol{p}_j', s_j'|S|\boldsymbol{p}_i, s_i\rangle$的复共轭:

$$\langle \boldsymbol{p}_j', s_j' | S | \boldsymbol{p}_i, s_i\rangle^* = \langle \boldsymbol{p}_j', s_j' | T^{-1}TST^{-1}T | \boldsymbol{p}_i, s_i\rangle,$$

由于(13.69)和(13.81),它就是

$$e^{i\theta-i\theta'}\langle -\boldsymbol{p}_j', s_j' | S^\dagger | -\boldsymbol{p}_i, s_i\rangle = e^{i\theta-i\theta'}\langle -\boldsymbol{p}_i, s_i | S | -\boldsymbol{p}_j', s_j'\rangle^*,$$

这给出了倒易关系(13.80).

我们注意到如果我们从仅仅是平面波组成的初态 a+b+… 开始,则(13.79)中的末态将是以球面波向外行进的 a′+b′+…,它的时间反演波函数应当是以球面波向内的 a′+b′+….如前所述,物理上这样一个时间反演的函数几乎是不可能建立的.但是,倒易关系使那些仅由平面波组成初态和末态反应的跃迁幅相等,因而这是能够由实验直接检验的.

2. *二体反应* 大多数对倒易关系的检验是二体反应

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} \to \mathrm{a}' + \mathrm{b}'. \tag{13.82}$$

$$\mathrm{a}' + \mathrm{b}' \to \mathrm{a} + \mathrm{b}. \tag{13.82a}$$

令 j_i、k_i、E_i 和 v_i 分别是粒子 i 的自旋、动量、能量和速度,其中

$$\mathrm{i} = \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{a}' \text{和}\ \mathrm{b}'$$

较为方便的办法是用质心参考系,并令

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_\mathrm{a} = -\boldsymbol{k}_\mathrm{b},\ \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}_{\mathrm{a}'} = -\boldsymbol{k}_{\mathrm{b}'} \tag{13.83}$$

这里用球坐标

$$\boldsymbol{k} = (k,\ \theta,\ \phi) \quad 和 \quad \boldsymbol{k}' = (k',\ \theta',\ \phi'),$$

其中 θ, θ'是极角,ϕ, ϕ'是方位角. 现在我们将证明如果在(13.82)和(13.82a)中,初态粒子没有极化,并且末态的极化也不测量,则

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\mathrm{a}+\mathrm{b}\rightarrow \mathrm{a}'+\mathrm{b}')}{\mathrm{d}\sigma(\mathrm{a}'+\mathrm{b}'\rightarrow \mathrm{a}+\mathrm{b})} = \frac{k'^2(2j_{\mathrm{a}'}+1)(2j_{\mathrm{b}'}+1)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'}{k^2(2j_{\mathrm{a}}+1)(2j_{\mathrm{b}}+1)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}. \tag{13.84}$$

证明. 在反应(13.82)中,我们可以用$|\boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\rangle$和$|\boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\rangle$表示初态和末态,这里 s_{i} 是粒子 i 的螺旋性. 根据倒易关系(13.80),我们有

$$|\langle \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\ |\ S\ |\ \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\rangle| = |\langle -\boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\ |\ S\ |-\boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\rangle|. \tag{13.85}$$

沿 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'$ 的方向转过 180°后,矢量 $\boldsymbol{k}$ 变为$-\boldsymbol{k}$,并且 $\boldsymbol{k}'$变为$-\boldsymbol{k}'$. 因此,(13.85)变为

$$|\langle \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\ |\ S\ |\ \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\rangle| = |\langle \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\ |\ S\ |\ \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\rangle|. \tag{13.86}$$

由于(5.111)式,在(13.84)的左边 $\mathrm{a}+\mathrm{b}\rightarrow\mathrm{a}'+\mathrm{b}'$ 的微分截面能够写作

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{k'^2\mathrm{d}\cos\theta'\mathrm{d}\phi'}{4\pi^2(2j_{\mathrm{a}}+1)(2j_{\mathrm{b}}+1)\ |\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{b}}|}\ \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}E}\cdot\sum_{s_{\mathrm{i}}}|\langle \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\ |\ \mathscr{m}\ |\ \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\rangle|^2. \tag{13.87}$$

这里

$$E = E_{\mathrm{a}'}+E_{\mathrm{b}'} = E_{\mathrm{a}}+E_{\mathrm{b}} \tag{13.88}$$

是系统的总能量,求和系对所有 4 个螺旋性 s_{a}, …, $s_{\mathrm{b}'}$ 进行,m 通过(5.106)与 S 矩阵相关. 根据(13.86)得出 m 满足

$$|\langle \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\ |\ \mathscr{m}\ |\ \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\rangle| = |\langle \boldsymbol{k}s_{\mathrm{a}}s_{\mathrm{b}}\ |\ \mathscr{m}\ |\ \boldsymbol{k}'s_{\mathrm{a}'}s_{\mathrm{b}'}\rangle|. \tag{13.89}$$

因为对于任一粒子 i, $E_{\mathrm{i}}\mathrm{d}E_{\mathrm{i}} = k_{\mathrm{i}}\mathrm{d}k_{\mathrm{i}}$, 由于(13.88),在质心参考系我们有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k'} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{a}'}}{\mathrm{d}k'}+\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{b}'}}{\mathrm{d}k'} = v_{\mathrm{a}'}+v_{\mathrm{b}'} = |\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}'}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{b}'}|,$$

把它代入(13.87),我们得到

$$d\sigma(a+b\to a'+b')=\frac{\sum\limits_{s_i}|\langle \boldsymbol{k}' s_{a'} s_{b'}|m|\boldsymbol{k} s_a s_b\rangle|^2 k'^2 d\cos\theta' d\phi'}{4\pi^2(2j_a+1)(2j_b+1)|\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v}_b|\cdot|\boldsymbol{v}_{a'}-\boldsymbol{v}_{b'}|}.$$

现在根据(13.89),上面这个表达式,和一个与此相似的 $d\sigma(a'+b'\to a+b)$ 的表达式,就得出方程式(13.84).

如果对一切角积分,则由(13.84),我们有下面总截面的关系:

$$\frac{\sigma(a+b\to a'+b')}{\sigma(a'+b'\to a+b)}=\frac{(2j_{a'}+1)(2j_{b'}+1)k'^2}{(2j_a+1)(2j_b+1)k^2}\cdot\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{若 } a\neq b,\text{ 但 } a'=b',\\ 2, & \text{若 } a=b,\text{ 但 } a'\neq b',\\ 1, & \text{其他情形},\end{cases}\tag{13.90}$$

这里若 $a\neq b$, 但 $a'=b'$, 则由于全同粒子的对称性,立体角 $\int d\cos\theta' d\phi'$ 仅为 2π,而 $\int d\cos\theta d\phi$ 是 4π;这说明了 $\frac{1}{2}$ 这个因子. 与此相似,若 $a=b$ 而 $a'=b'$, 就有一个因子 2.

3. **π 介子的自旋** 对于反应 $\pi^++d\to p+p$ 和 $p+p\to\pi^++d$, (13.90)取如下形式:

$$\frac{\sigma(\pi^++d\to p+p)}{\sigma(p+p\to\pi^++d)}=\frac{2}{3(2j_\pi+1)}\left(\frac{k_{pp}}{k_{\pi d}}\right)^2,\tag{13.91}$$

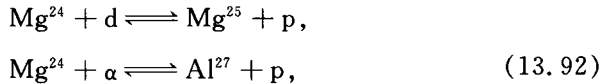
这里 $k_{pp}=k'$, $k_{\pi d}=k$, 右边的数值因子是由于 $j_d=1$, $j_p=\frac{1}{2}$, 并且由于 $a'=b'=p$, 所以有一个附加的因子 $\frac{1}{2}$. π 介子的自旋最初是由这个关系式定出来* 为 0.

4. **说明** 倒易关系已经在几个强过程中加以检验. 这些过程是**

---

* Dubin R, Loar H, Steinberger J. *Phys Rev*, 1951, **83**:646; 又见 Marshak R. *Phys Rev*, 1951, **82**:313.

** Weitkamp W G, Storm D W, Shreve D C, BraithWaite W J, Bodansky D. *Phys Rev*, 1968, **165**:1233; von Witsch W, Richter A, von Brentand P. *Phys Rev Lett*, 1967, **19**:524.



$$\mathrm{Mg}^{24}+\mathrm{d} \rightleftharpoons \mathrm{Mg}^{25}+\mathrm{p},$$
$$\mathrm{Mg}^{24}+\alpha \rightleftharpoons \mathrm{Al}^{27}+\mathrm{p}, \tag{13.92}$$

它们以$\sim\frac{1}{2}\%$的精确度支持了强相互作用的 T 不变性.

对于 QED,能够用已知的拉氏量直接建立 T 不变性. 对于弱过程,倒易关系很难应用. 但是,我们将讨论,相角测量用来检验 T 不变性. 当 T 不变性成立时,倒易关系对所有各级相互作用都成立. 与此相反,相角测量用来检验 T 不变性,只能准确到有关相互作用的最低级.

13.7 相角关系

1. β 衰变　考虑强子 a 到 b 的 β 衰变

$$\mathrm{a} \to \mathrm{b}+\mathrm{e}^{\mp}+\bar{\nu}_{\mathrm{e}}(\text{或 } \nu_{\mathrm{e}}). \tag{13.93}$$

这里,例如,可能是 $\mathrm{a}=\mathrm{n}$ 和 $\mathrm{b}=\mathrm{p}$, 或者 $\mathrm{a}=\Sigma^{\pm}$ 和 $\mathrm{b}=\Sigma^{0}$, 等等. 唯象的相互作用哈密顿量由费米理论给出(修正到包括宇称破坏):

$$H_{\beta}=\int\left[J_{\mu}(x) j_{\mu}(x)+\text{h. c.}\right] \mathrm{d}^{3} r. \tag{13.94}$$

在这里轻子流 j_{μ} 的表示式是已知的

$$j_{\mu}=\mathrm{i} \psi_{\mathrm{e}}^{\dagger} \gamma_{4} \gamma_{\mu}\left(1+\gamma_{5}\right) \psi_{\nu},$$

其中 ψ_{e} 和 ψ_{ν} 代表 e^{-} 和 ν_{e} 的场. 强子流算符将在我们以后几章讨论相互作用时加以分析. 这里我们只对它在态$|a\rangle$和$|b\rangle$之间的矩阵元感兴趣. 根据(11.80),得出

$$\langle b \mid J_{\mu}(x) \mid a\rangle=\langle b \mid J_{\mu}(0) \mid a\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(a_{\mu}-b_{\mu}\right) x_{\mu}}, \tag{13.95}$$

这里 a_{μ} 和 b_{μ} 是$|a\rangle$和$|b\rangle$的 4 动量. 在大多数 β 衰变的例子中,4 动量转移 $q_{\mu} \equiv(a-b)_{\mu}$ 是非常小的. 因此,$\langle b| J_{\mu}(0)|a\rangle$只依赖于初末强子态的 c 数狄拉克旋量 u_{a} 和 u_{b}. 根据洛伦兹不变性,它的最一般的形式是

$$\langle b| J_{\mu}(0)|a\rangle=\mathrm{i} u_{\mathrm{b}}^{\dagger} \gamma_{4} \gamma_{\mu}\left(G_{\mathrm{V}}-G_{\mathrm{A}} \gamma_{5}\right) u_{\mathrm{a}}. \tag{13.96}$$

在 $q_\mu \to 0$ 的极限下，我们可以唯象地用下一算符代替(13.96)

$$J_\mu = \mathrm{i}\psi_b^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (G_V - G_A \gamma_5) \psi_a, \tag{13.97}$$

这里 ψ_a 和 ψ_b 是 a 和 b 的场算符.

定理 1. G_V/G_A 是实数，如果 T 不变性成立.

证明. 在 T 不变性成立下，我们有(13.53). 因此

$$T\psi_i(\boldsymbol{r},\ t)T^{-1} = \eta_i \sigma_2 \psi_i(\boldsymbol{r},\ -t),$$

这里 i=a, b, e 或 ν. 这样，利用(13.97)，我们发现

$$TJ_\mu(\boldsymbol{r},\ t)T^{-1} = \eta_b^* \eta_a \psi_b^\dagger \sigma_2 (\mathrm{i}\gamma_4 \gamma_\mu)^* (G_V^* - G_A^* \gamma_5^*) \sigma_2 \psi_a.$$

这里，由于(13.19)和 $\gamma_5 = -\rho_1 =$ 实数，也可以在 $\boldsymbol{r}$ 和 $-t$ 时写作

$$-\mathrm{i}\eta_b^* \eta_a \psi_b^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (G_V^* - G_A^* \gamma_5) \psi_{a'}.$$

同样，我们有

$$Tj_\mu(\boldsymbol{r},\ t)T^{-1} = -\eta_e^* \eta_\nu j_\mu(\boldsymbol{r},\ -t). \tag{13.98}$$

这样，为了使 H_β 是 T 不变的，必须有 $G_V/G_A =$ 实数. 定理得到了证明.

从粒子数据组(Particle data Group, http://pdg. ldl. gov)出版的粒子性质表可以看出，实验上定出的，由下式定义的

$$\frac{G_V}{G_A} = \left|\frac{G_V}{G_A}\right| e^{\mathrm{i}\delta},$$

中子 β 衰变的相角 δ 是

$$\delta = (180.20 \pm 0.19)^\circ, \tag{13.99}$$

这与 T 不变性的要求相符.

2. Λ^0 衰变 根据(11.107)—(11.108)，在 Λ^0 衰变

$$\Lambda^0 \to \pi + \mathrm{N} \tag{13.100}$$

中，最后的 πN 系统主要是同位旋 $I = \frac{1}{2}$ 的态. 在 Λ^0 的静止坐标系中，Λ^0 的态完全由它的自旋波函数所表征

$$u_\Lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

这里 a 和 b 分别是自旋↑和自旋↓的幅. 同样,在 N 的静止坐标系中,核子自旋波函数 u_N 决定了 N 的物理态. 由于叠加原理,这两个旋量的关系必定是线性关系;即,

$$u_\Lambda = M u_N.$$

这里 M 是一个 2×2 的矩阵函数. 因为(13.100)是一个二体衰变,除了自旋外,运动学的问题由一个单位矢量惟一地决定 $\hat{k} \equiv \Lambda^0$ 的静止坐标系中核子动量的方向;因而 M 的泛函依赖关系也是如此. 根据转动不变性,我们看出 M 必须具有的形式是

$$M = A_s + A_p \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{k}, \tag{13.101}$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利自旋矩阵,A_s和 A_p是常数. 因为 A_s 代表球对称部分,它被称为 s 波幅;同样,我们把 A_p 叫做 p 波幅,因为在(13.101)中,它与一个 $\hat{k}$ 的线性函数相乘. 令 ϕ 是 A_p 和 A_s 之间的相对相位,由下式定义

$$\frac{A_p}{A_s} = e^{i\phi}\left|\frac{A_p}{A_s}\right|. \tag{13.102}$$

定理 2.　若 T 不变性成立,则

$$\phi = \delta_p - \delta_s \quad 或 \quad \delta_p - \delta_s + \pi, \tag{13.103}$$

这里 δ_p 和 δ_s 分别是 $I=\frac{1}{2}$, $j=\frac{1}{2}$ 态中,πN 散射的 p 波和 s 波的相移(由强相互作用引起).

证明.　因为 Λ^0 衰变是一个弱过程,而 πN 系统具有强相互作用,T 不变性的假定要应用于强和弱相互作用的两方面. 对弱相互作用哈密顿 H_{wk}取第一级而对强相互作用 H_{st}取所有各级时,振幅 A_l 由下式给出

$$A_l = \langle(\pi N)_l;\ \text{free}\mid U(\infty,0)H_{wk}\mid \Lambda^0\rangle_m, \tag{13.104}$$

这里$|(\pi N)_l;\ \text{free}\rangle$是自由的 πN 态,但它的同位旋 $I=\frac{1}{2}$,轨道角动量为 l,总角动量 $j=\frac{1}{2}$ 以及它的 z 分量为 m. 对于 A_s,我们有 $l=0$, 而对于 A_p, $l=1$. 显然,由于旋转不变性,矩阵元(13.104)与 m 无关. U 矩阵只由强相互作用决定;即,它满足(5.20)式,式中 H_{int}代表强相互作用. 根据

(6.59),我们看出最后的物理的 πN 态由下式给出

$$U(\infty,\ 0)^{\dagger}\mid(\pi\mathrm{N})_{l};\ \text{free}\rangle. \tag{13.105}$$

令$|\Lambda^0\rangle$表示物理的 Λ^0 态. (13.105)和$|\Lambda^0\rangle$两者都是强相互作用哈密顿量的本征态. 根据微扰论的公式,H_{wk}在这两个态之间的矩阵元是第一级跃迁幅,它给出(13.104). 取(13.104)式的复共轭并利用(13.5)—(13.6)和 $U_T^{\dagger}U_T=1$, 我们发现

$$A_l^*=\langle\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\mid T^{-1}TU(\infty,\ 0)T^{-1}TH_{\mathrm{wk}}T^{-1}T\mid\Lambda^0\rangle_m.$$

由于(13.40), (13.42), (13.75)以及 T 不变性的假设,上面的式子可以写作

$$A_l^*=\langle\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\mid U(-\infty,\ 0)H_{\mathrm{wk}}\mid\Lambda^0\rangle_{-m}. \tag{13.106}$$

我们可以利用(13.78)和 U 矩阵的幺正性来得到

$$\begin{aligned}U(-\infty,\ 0)&=U(0,\ -\infty)^{-1}=U(0,\ -\infty)^{\dagger}\\&=[U(0,\ \infty)U(\infty,\ -\infty)]^{\dagger}\\&=U(\infty,\ -\infty)^{\dagger}U(\infty,\ 0)=S^{\dagger}U(\infty,\ 0).\end{aligned} \tag{13.107}$$

把这个表示式代入(13.106)并利用完全性定理,我们导出

$$\begin{aligned}A_l^*&=\langle\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\mid S^{\dagger}U(\infty,\ 0)H_{\mathrm{wk}}\mid\Lambda^0\rangle_{-m}\\&=\langle\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\mid S^{\dagger}\mid n\rangle\langle n\mid U(\infty,\ 0)H_{\mathrm{wk}}\mid\Lambda^0\rangle_{-m}.\end{aligned} \tag{13.108}$$

这里重复指标 n 表示对所有自由粒子态的全集求和. S 矩阵元代表强相互作用的矩阵元. 这样,

$$\langle\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}|S^{\dagger}|n\rangle=\begin{cases}0,\text{当}\,|n\rangle\neq|\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\rangle,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta_l},\text{其他情形},\end{cases} \tag{13.109}$$

这是由于 S 矩阵元仅使$|\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\rangle$和具有相同量子数和相同能量的强子态相联系. 在能量$=\Lambda^0$ 质量时,只有一个这样的态,即$|\pi\mathrm{N}_l;\ \text{free}\rangle$本身. 因为 S 是一个幺正矩阵,如果在任一行,它只有一个不为零的矩阵元,则那个元必然是一个纯粹的相因子 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l}$,这里 δ_l 是通常的相移. 因此

就得出了方程式(13.109).联合(13.108)与(13.109),我们有

$$A_l^* = e^{-2i\delta_l} A_l,$$

这导致定理 2.

通过对 N 的密度矩阵的测量能够直接决定(13.102)式中的相位 ϕ(问题 13.1);它的实验值,在粒子性质表上是

$$\phi = -6.5 \pm 3.5°,$$

这与强相互作用的相移测量量 *

$$\delta_p - \delta_s = -6.5 \pm 1.3°.$$

能够相比.

说明. 正如我们在第 15 章中将要讨论的,在 $K^0 - \bar{K}^0$ 系统的衰变中,已经探测到时间反演的不对称性.但是,这种观测到的 T 破坏量是非常小的.它的真正的重要性直到现在还没有完全弄清楚.

习题 13.1. 在 π-N 散射中,

$$\pi + N \to \pi + N,$$

令 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 是在质心参考系中 N 的初动量和末动量.

(i) 假定有空间反射和时间反演的对称性,证明对于初态非极化的核子而言,末态核子能够被极化,它的自旋 $\boldsymbol{\sigma}$ 的极化方向垂直于包含 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 的平面.

(ii) 在 P 变换下,我们有 $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}'$,和 $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma}$;这就是为什么在 P 对称成立的条件下,不可能观测到像 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{k}'$ 这样的赝标量.在 T 变换下,我们期望 $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{\sigma} \to -\boldsymbol{\sigma}$. 为什么 T 对称性并不妨碍人们对明显地奇 T 项 $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}')$ 的观测?

习题 13.2.

(i) 证明在一个完全极化的 Λ^0 的衰变中,末态核子的自旋密度矩阵 D 在静止坐标系中由下式给出

$$D = \frac{1}{2}(1 + \alpha \cos\theta)(1 + \hat{S}_N \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

* Barnes S W, Winick H, Miyake K, Kinsey K. *Phys Rev*, 1960, **117**:238.

这里

$$\hat{S}_{\mathrm{N}}=(1+\alpha\cos\theta)^{-1}[(\alpha+\cos\theta)\hat{k}+\beta(\hat{k}\times\hat{S}_{\Lambda})$$
$$+\gamma(\hat{k}\times\hat{S}_{\Lambda})\times\hat{k}],$$
$$\alpha=(|A_s|^2+|A_p|^2)^{-1}2\mathrm{Re}(A_s^*A_p),$$
$$\beta=-(|A_s|^2+|A_p|^2)^{-1}2\mathrm{Im}(A_s^*A_p),$$
$$\gamma=(|A_s|^2+|A_p|^2)^{-1}(|A_s|^2-|A_p|^2),$$

$\hat{S}_{\Lambda}$ 是初态的 Λ^0 自旋方向，$\hat{k}$ 是核子的动量方向，两者都在 Λ^0 的静止坐标系中测量，还有 $\theta=\angle(\hat{S}_{\Lambda},\hat{k})$. 注意 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 和 $|\hat{S}_{\mathrm{N}}|^2=1$.

(ii) 若 Λ^0 并非完全极化，而其自旋密度矩阵 D_{Λ} 由下式给出

$$D_{\Lambda}=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{S}_{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

证明在 Λ^0 的静止坐标系中 N 的角分布由下式给出

$$\mathrm{trace}\,D_{\mathrm{N}}=1+\alpha\,|\boldsymbol{S}_{\Lambda}|\cos\theta.$$

习题 13.3.　考虑一个自旋为 J 的粒子衰变成一个核子和一个 π 介子.

$$\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{N}+\pi.$$

令 θ 为 X 的静止坐标系中核子动量与任何一个固定方向的夹角.

证明

(i) $|\langle\cos\theta\rangle_{AV.}|\leqslant(2J+2)^{-1}$,

(ii) 若衰变的分布已知是 $\cos\theta$ 的线性函数，则

$$|\langle\cos\theta\rangle_{AV.}|\leqslant(6J)^{-1}.$$

[见 *Phys Rev*, 1958, **109**:1755. 许多重子的自旋，例如 Λ, Σ, 等等是用这些不等式决定的.]

第14章　CPT 不变性

目前,有很好的证据表明,在我们的宇宙中,三种分立对称性 C, P 和 T 的每一个本身只是近似的成立. 同样的结论可应用于双线性乘积 CP, PT, TC, CT 等当中的每一个上. 但是,就我们所知,三乘积 CPT (或者它的排列组合 PTC, TCP, …)是代表一个精确的对称性. 因此,当我们把粒子换成反粒子,左换成右,过去换成将来,我们重新获得了对称. 自然界对于这样一种联合对称运算的倾向是与我们目前的理论形式相协调的. 我们将看到,在定域场论的结构中,洛伦兹不变性和通常的自旋统计的要求自动地导致 CPT 不变性.

14.1　CPT 定理*

让我们考虑一个定域场理论,其中有 N_j 个自旋 j 的场,表示如下

$$
\begin{aligned}
&\text{自旋 } 0: \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \cdots,\ \phi_{N_0}(x),\\
&\text{自旋 } \frac{1}{2}: \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \cdots,\ \psi_{N_{\frac{1}{2}}}(x),\\
&\text{自旋 } 1: (A_1(x))_\mu,\ (A_2(x))_\mu,\ \cdots,\ (A_{N_1}(x))_\mu,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

就变换性质而言,在洛伦兹群和分立对称群 C, P, T 的变换下,一般的自旋 j 为整数的场总可以用一个 x 的 j 阶对称张量函数来表示

---

* Pauli W. Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-time and Charge [M]//Pauli W, Rosenfeld L, Weisskopf V. Niels Bohr and the Development of Physics. New York: McGraw-Hill, 1955. 参看其中提到的 Lüders 和 Schwinger 较早的工作.

$$T_{\mu_1\cdots\mu_j}(x). \tag{14.2}$$

同样,一般的自旋 j 为半整数的场能够表示为

$$S_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}};\alpha}(x) \sim T_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}}}(x)\psi_\alpha(x), \tag{14.3}$$

即,它像一个$\left(j-\dfrac{1}{2}\right)$阶的对称张量 $T_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}}}$ 与狄拉克旋量的直积那样变换.所有这些场满足通常的自旋统计关系;整数自旋的场遵从玻色统计,半整数自旋的场遵从费米统计.假定拉格朗日密度 $\mathscr{L}(x)$具有如下的形式

$$\mathscr{L}(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda},\ \phi_a,\ \phi_a^\dagger,\ \psi_b,\ \psi_b^\dagger,\ (A_c)_\mu,\ (A_c^\dagger)_\mu,\ \cdots\right)$$

的正规乘积之和 (14.4)

其中所有的场都取在同一个时空点 x 上, $x_\mu=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$, 这和通常一样.

算符 $\mathscr{I}$的定义是

$$\mathscr{I}\equiv CPT. \tag{14.5}$$

(所有以下的讨论能够同样应用于其他的排列组合 PTC,或 TCP 等等.)根据(13.53),对于任一自旋为$\dfrac{1}{2}$的场

$$T\psi(\boldsymbol{r},\ t)T^{-1}=\eta_t\sigma_2\psi(\boldsymbol{r},\ -t),$$

它在(10.9)给出的 P 变换下,按下式变换

$$\begin{aligned} PT\psi(\boldsymbol{r},\ t)T^{-1}P^{-1} &= \eta_t\sigma_2 P\psi(\boldsymbol{r},\ -t)P^{-1} \\ &= \eta_t\eta_{\mathrm{P}}\sigma_2\gamma_4\psi(-\boldsymbol{r},\ -t). \end{aligned}$$

把(10.5)式的 C 应用于上式,我们得到

$$\begin{aligned} \mathscr{I}\psi(x)\mathscr{I}^{-1} &= CPT\psi(x)T^{-1}P^{-1}C^{-1} \\ &= \eta_t\eta_{\mathrm{P}}\eta_c\sigma_2\gamma_4\psi^c(-x). \end{aligned}$$

因为按照(10.6)

$$\psi_\alpha^c=(\gamma_2)_{\alpha\beta}\psi_\beta^\dagger, \tag{14.6}$$

又由于(3.11)和(3.103), $\sigma_2\gamma_4\gamma_2=\sigma_2\rho_3\rho_2\sigma_2=-\mathrm{i}\rho_1=\mathrm{i}\gamma_5$, 随即得出

$$\mathscr{I}\psi(x)_\alpha\mathscr{I}^{-1}=\eta(\mathrm{i}\gamma_5)_{\alpha\beta}\psi_\beta^\dagger(-x),\tag{14.7}$$

这里 η 是相因子 $\eta_t\eta_p\eta_c$ 的乘积.

定理. 任何一个洛伦兹不变的 $\mathscr{L}(x)$满足

$$\mathscr{I}\mathscr{L}(x)\mathscr{I}^{-1}=\mathscr{L}^\dagger(-x),$$

如果我们做如下的选择

对于所有 $a=1,2,\cdots,N_0$, $\mathscr{I}\phi_a(x)\mathscr{I}^{-1}=\phi_a^\dagger(-x)$, (14.8)

对于所有 $b=1,2,\cdots,N_{\frac{1}{2}}$,

$$\mathscr{I}(\psi_b(x))_\alpha\mathscr{I}^{-1}=\mathrm{i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\psi_b^\dagger(-x))_\beta,\tag{14.9}$$

对于所有 $c=1,2,\cdots,N_1$,

$$\mathscr{I}(A_c(x))_\mu\mathscr{I}^{-1}=-(A_c^\dagger(-x))_\mu,\tag{14.10}$$

对于所有一般的自旋 j 为整数的场(14.2)

$$\mathscr{I}T_{\mu_1\cdots\mu_j}(x)\mathscr{I}^{-1}=(-1)^jT_{\mu_1\cdots\mu_j}^\dagger(-x),\tag{14.11}$$

和对于所有一般的自旋 j 为半整数的场(14.3)

$$\mathscr{I}S_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}};\alpha}(x)S^{-1}=(-1)^j(\mathrm{i}\gamma_5)_{\alpha\beta}S_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}};\beta}^\dagger(-x).\tag{14.12}$$

证明. 让我们先考虑两个通常的自旋$\frac{1}{2}$场 $\psi_b^\dagger(x)$和 $\psi_{b'}(x)$的正规乘积

$$O(x)\equiv:g\psi_b^\dagger(x)\Gamma\psi_{b'}(x):\tag{14.13}$$

这里 Γ 是一个 4×4 矩阵.因为任何 4×4 矩阵具有 16 个矩阵元,它总能分解成以下 16 个矩阵的线性函数.这些矩阵分属于以下五组:标量(S),赝标量(P),矢量(V),轴矢量(A)和张量(T)

$$\begin{array}{rccccc}\Gamma= & \gamma_4 & \mathrm{i}\gamma_4\gamma_5 & \mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu & \mathrm{i}\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5 & \gamma_4\sigma_{\mu\nu} \\ & S & P & V & A & T,\end{array}\tag{14.14}$$

这里

$$\sigma_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu).\tag{14.15}$$

根据我们的度规 $x_\mu=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$，我们已经选取这些 Γ 矩阵为厄米矩阵，它们是 $S,\ P$，以及 $V,\ A$ 的空间分量，和 T 的(4, 4)分量；其他的 Γ 是反厄米的，即根据(3.11)

$$\gamma_4\ ,\ \mathrm{i}\gamma_4\gamma_5\ ,\ \mathrm{i}\gamma_4\gamma_j\ ,\ \mathrm{i}\gamma_4\gamma_j\gamma_5\ ,\ \gamma_4\sigma_{ij}\text{和}\ \gamma_4\sigma_{44}$$

是厄米的，而(14.14)中其余的表式是反厄米的. 再则，Γ 满足

$$\Gamma\gamma_5=-\gamma_5\Gamma\quad\text{对于}\ S,\ P,\ T$$

和

$$\Gamma\gamma_5=\gamma_5\Gamma\quad\text{对于}\ V,\ A,\tag{14.16}$$

它们的厄米共轭是

$$\Gamma^\dagger\gamma_5=-\gamma_5\Gamma^\dagger\quad\text{对于}\ S,\ P,\ T$$

和

$$\Gamma^\dagger\gamma_5=\gamma_5\Gamma^\dagger\quad\text{对于}\ V,\ A.\tag{14.17}$$

ψ_b 应当满足(14.9)这一要求也包含了它的厄米共轭满足

$$\mathscr{I}(\psi_b^\dagger(x))_\alpha\mathscr{I}^{-1}=-\mathrm{i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\psi_b(-x))_\beta,\tag{14.18}$$

这里我们已经注意到 $\gamma_5^*=\gamma_5$. 由此，利用(14.9)，(14.18)并应用 $\mathscr{I}$ 于(14.13)，我们得到

$$\mathscr{I}O(x)\mathscr{I}^{-1}=:g^*\,[\psi_b(-x)]_\alpha(-\mathrm{i}\gamma_5\Gamma^*\,\mathrm{i}\gamma_5)_{\alpha\beta}[\psi_{b'}^\dagger(-x)]_\beta:,$$

经过我们交换 ψ_b 和 $\psi_{b'}^\dagger$ 的次序，并利用性质 $\widetilde{\gamma}_5=\gamma_5$，上式变为

$$-:g^*\,\psi_{b'}^\dagger(-x)\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5\psi_b(-x):,$$

这里负号的出现是由于费米统计，又因为取了正规乘积，所以反对易子被消去了. 把(14.17)代入上式，我们导出

$$\mathscr{I}O(x)\mathscr{I}^{-1}=\begin{cases}O^\dagger(-x)&\text{对于}\ S,\ P,\ T\\-O^\dagger(-x)&\text{对于}\ V,\ A.\end{cases}\tag{14.19}$$

很重要的一点是要注意到对于任何一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的场 ψ_b，我们可以定义它的反粒子场是(14.6)式中的 ψ_b^c. 在 $\mathscr{I}$ 的作用下，ψ_b^c 按下式变换

$$\mathscr{I}(\psi_b^c(x))_\alpha \mathscr{I}^{-1} = (\gamma_2)^*_{\alpha\beta}\mathscr{I}(\psi_b^\dagger(x))_\beta \mathscr{I}^{-1}.$$

由于 γ_2 是实的并与 γ_5 反对易，通过利用(14.18)，我们能够把上式重写为

$$-\mathrm{i}(\gamma_2\gamma_5)_{\alpha\beta}(\psi_b(-x))_\beta = \mathrm{i}(\gamma_5\gamma_2)_{\alpha\beta}(\psi_b(-x))_\beta,$$

这导致

$$\mathscr{I}(\psi_b^c(x))_\alpha \mathscr{I}^{-1} = \mathrm{i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\psi_b^{c\dagger}(-x))_\beta. \tag{14.20}$$

由问题 10.4(iii)，我们注意到在连续的洛伦兹变换下 ψ_b^c 像 ψ_b 一样变换；比较(14.9)与(14.20)，我们看出在分立对称变换 CPT 作用下，它们也具有相同的变换.

其次，我们知道 c 数 x_μ 满足

$$\mathscr{I}x_\mu \mathscr{I}^{-1} = x_\mu^* = -(-x_\mu^*); \tag{14.21}$$

因此之故，微分算符也满足

$$\mathscr{I}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{I}^{-1} = -\left(\frac{\partial}{\partial(-x_\mu)}\right)^*. \tag{14.22}$$

在连续的洛伦兹变换下，(14.14)中的 x_μ，$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$，$V$ 和 A 都像一阶张量那样变换；根据(14.19)，(14.21)和(14.22)，我们看出，在 CPT 变换下，它们也具有相同的变换性质.

让我们现在考虑一个定域的 N 阶张量函数 $F_{\mu_1\cdots\mu_N}(x)$，它是一个由费米场 ψ_1，ψ_2，…和微分算符$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$组成的多项式：

$$F_{\mu_1\cdots\mu_N}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda},\ \psi_b,\ \psi_{b'}^\dagger\right)\text{的正规乘积} \tag{14.23}$$

其中所有的场都取同一的时空点 x.

引理.

$$\mathscr{I}F_{\mu_1\cdots\mu_N}(x)\mathscr{I}^{-1} = (-1)^N F^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_N}(-x). \tag{14.24}$$

为了证明这个引理，让我们用 n 表示(14.23)中 ψ_b 的个数，而 $\psi_{b'}^\dagger$ 的个数用 n' 表示.

(i) $n = n'$. 由于(14.23)是一个正规乘积,我们能够对费米场的次序进行排列. 因为 $n = n'$, 每一个 $\psi_{b'}^{\dagger}$ 能够和一个 ψ_b 相配而构成双线性乘积(14.13),于是它们就能够被分成 0 阶张量(S 或 P),1 阶张量(V 或 A),和 2 阶张量(T),正如在(14.14)中一样. 根据(14.19)和(14.22),我们看出变换定则(14.24)能用于这些张量和 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$,后者是一个一阶张量;因此(14.24)也适用于它们的乘积.

(ii) $n < n'$. 在这一情况下,我们只需要把多余的 $\psi_{b'}^{\dagger}$ 写作 $\psi_{b'}^{c}$,并把这些 $\psi_{b'}^{c}$ 作为另外的 ψ_b,在作了这样的重写以后,ψ_b 和 $\psi_{b'}^{\dagger}$ 的数目就是一样了. 于是这一情况化为(i).

(iii) $n > n'$. 通过把多余的 ψ_b 换成 $\psi_b^{c\dagger}$,我们也可以把这一情况化为(i). 于是,引理得证.

把(14.11)和引理加以比较,我们看出,如果在连续洛伦兹群的变换下,一个玻色场的乘积 $T_{\mu_1\cdots\mu_j}$ 和费米场的正规乘积 $F_{\mu_1\cdots\mu_N}$ 具有相同的变换性质(即,它们是同阶的张量),则它们在 *CPT* 下的变换也是相同的. 由(14.12)我们看出这一表述能够推广到包括任意自旋的费米场,因而(14.24)能够应用于任何玻色场和费米场的乘积. 拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 就是这样一个乘积,它是一个 0 阶张量. 因此,在(14.24)中令 $N = 0$,我们得到

$$\mathscr{I}\mathscr{L}(x)\mathscr{I}^{-1} = \mathscr{L}^{\dagger}(-x), \tag{14.25}$$

这建立了 *CPT* 定理.

在一个量子理论中,拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 是一个厄米算符而作用量是四维体积分 $\int \mathscr{L} d^4 x$. 上述定理保证了作用量积分的不变性,从而也保证了理论的不变性.

说明. (i) 如果我们比较(14.7)和(14.9),我们看出在我们对 *CPT* 定理的证明中,对于所有自旋 $\frac{1}{2}$ 的场,它们在(14.7)中的相角 η 已在(14.9)式中被置为 1. 我们可以问在这个证明中能否有另一种相角的选择.

为简单计,让我们考虑一个仅由自旋 $\frac{1}{2}$ 场组成的系统. 假定 *CPT* 定

理也可以用下式代替(14.9)来加以证明

$$\text{对于所有的 } b = 1, 2, \cdots, N_{\frac{1}{2}}: \mathscr{I}(\psi_b(x))_\alpha \mathscr{I}^{-1} = \mathrm{i}\eta_b(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\psi_b^\dagger(-x))_\beta, \tag{14.26}$$

那么,哪一个是正确的 CPT 算符呢? 是(14.9)中的 $\mathscr{I}$? 或是(14.26)中的 $\mathscr{I}$?

我们注意到这两个 $\mathscr{I}$ 算符的商

$$S \equiv \mathscr{I}(14.26)/\mathscr{I}(14.9)$$

满足

$$S\psi_b(x)S^{-1} = \eta_b\psi_b(x). \tag{14.27}$$

根据 CPT 定理,我们知道这个理论肯定是在(14.9)式的 $\mathscr{I}$ 的作用下不变的;根据我们的假定,它又是在(14.26)式的 $\mathscr{I}$ 作用下不变. 因此,它必定在 S 变换下不变. 看一下(14.27)式,我们就知道 S 对称性不影响 CPT;它是一种与这个理论无关的内部对称性.

对于任何理论,令

$$\{S\} \tag{14.28}$$

是与 C, P, T,和任何连续时空变换无关的一组精确的内部对称性. 显然,如果 $\mathscr{I}$ 是一个 CPT 算符,则 $\mathscr{I}S$,或 $S\mathscr{I}$,或 $S\mathscr{I}S'$ 应当是同样好的候选者. 这里 S 和 S' 属于群(14.28). 把哪一个称作 CPT 算符都没有差别.

CPT 定理表明,由(14.8)—(14.12)所定义的 $\mathscr{I}$ 常是一个好的对称算符,它与系统的内部对称群无关.

(ii) 由(14.9)和(14.18)得出,对于任何自旋 $\frac{1}{2}$ 的场 $\psi(x)$

$$\mathscr{I}^2\psi(x)_\alpha\mathscr{I}^{-2} = \mathscr{I}(\mathrm{i}\gamma_5)_{\alpha\beta}\psi^\dagger(-x)_\beta\mathscr{I}^{-1} = -\mathrm{i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\mathscr{I}\psi^\dagger(-x)_\beta\mathscr{I}^{-1} = -\psi(x)_\alpha.$$

同样,由(14.11)和(14.12),我们发现对于任何整数自旋 j 的场

$$\mathscr{I}^2 T_{\mu_1\cdots\mu_j}(x)\mathscr{I}^{-2} = T_{\mu_1\cdots\mu_j}(x),$$

而对于任何半整数自旋 j 的场

$$\mathscr{I}^2 S_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}};\alpha}(x)\mathscr{I}^{-2} = -S_{\mu_1\cdots\mu_{j-\frac{1}{2}};\alpha}(x).$$

合起来，它们表示

$$\mathscr{I}^2 = (-1)^{2j}. \tag{14.29}$$

(iii) CPT 定理的正确性仅来源于这些假定：连续洛伦兹变换群下的不变性和自旋统计关系，加上定域场论的应用. 它与每一个单独的运算 C, P 和 T 是否是一种好的对称无关.

(iv) 考虑一个静止的粒子，譬如说质子 p. 令 $|\mathrm{p}\rangle_m$ 是角动量的 z 分量 $=m$ 的一个态. 除了一个相乘的相因子之外，在 C 变换下，这个态变为 $|\overline{\mathrm{p}}\rangle_m$，在 P 变换下，它仍旧是它自己，但在 T 的变换下，m 变为 $-m$，这由(13.40)给出，因此

$$\mathscr{I}|\mathrm{p}\rangle_m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\overline{\mathrm{p}}\rangle_{-m}. \tag{14.30}$$

习题. 证明如果 CPT 不变成立，则由(5.20)—(5.21)所定义的 $U(t, t_0)$ 矩阵满足

$$\mathscr{I}U(t, t_0)\mathscr{I}^{-1} = U(-t, -t_0). \tag{14.31}$$

因此，在 $\mathscr{I}$ 变换下，S 矩阵的变换如下

$$\mathscr{I}S\mathscr{I}^{-1} = S^{\dagger}. \tag{14.32}$$

14.2 应用

1. *粒子与反粒子的质量相等* 为确定起见，我们可以考虑质子和反质子的质量. 和以前一样，令 $|\mathrm{p}\rangle_m$ 为一个静止质子的态，它的角动量的 z 分量 $=m$. 因为质子的质量由期望值给出

$$(\text{质量})_{\mathrm{p}} = \langle \mathrm{p}|H|\mathrm{p}\rangle_m, \tag{14.33}$$

这里 H 是总的哈密顿，显然它是实的且与 m 无关. 因此，(14.33)与它的复共轭相等. 我们有

$$(\text{质量})_{\mathrm{p}} = \langle \mathrm{p}|H|\mathrm{p}\rangle_m^* = \langle \mathrm{p}|\mathscr{I}^{-1}\mathscr{I}H\mathscr{I}^{-1}\mathscr{I}|\mathrm{p}\rangle_m.$$

由于(14.30)式和 $\mathscr{I}H\mathscr{I}^{-1} = H$，上面的式子也能写作

$$(质量)_{\mathrm{p}} = \langle \bar{\mathrm{p}} \mid H \mid \bar{\mathrm{p}} \rangle_{-m} = (质量)_{\bar{\mathrm{p}}}; \tag{14.34}$$

与此相似,我们能够证明 e^+ 和 e^- , μ^+ 和 μ^- 等等的质量相等. 同样,我们能够建立

$$\langle K^0 \mid H \mid K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 \mid H \mid \bar{K}^0 \rangle. \tag{14.35}$$

正如我们在下一章将讨论的,这个等式在以(质量)$_K$ 为单位时,准确到精度为

$$\sim 7 \times 10^{-15} \tag{14.36}$$

这提供了对 CPT 不变性的一个最好的实验支持.

2. **粒子与反粒子之间相反的电磁性质** 令 $j_\mu(x)$为电磁流算符,因为它是一个 4-矢量,由(14.19)或(14.24)我们知道

$$\mathscr{I} j_\mu(x) \mathscr{I}^{-1} = - j_\mu^\dagger(-x). \tag{14.37}$$

我们可以把 j_μ 写作 $j_\mu = (\boldsymbol{j},\ \mathrm{i}\rho)$, 这里 $\boldsymbol{j}$ 与 ρ 是厄米算符,于是(14.37)变为

$$\mathscr{I} \boldsymbol{j}(x) \mathscr{I}^{-1} = - \boldsymbol{j}(-x)$$

和 (14.38)

$$\mathscr{I} \mathrm{i}\rho(x) \mathscr{I}^{-1} = - \mathrm{i} \mathscr{I} \rho(x) \mathscr{I}^{-1} = \mathrm{i}\rho(-x)$$

或

$$\mathscr{I} \rho(x) \mathscr{I}^{-1} = - \mathrm{i}\rho(-x). \tag{14.39}$$

一个粒子,譬如说 p 的电荷是由下式给出

$$Q_{\mathrm{p}} = \langle \mathrm{p} \mid \int \rho \mathrm{d}^3 r \mid \mathrm{p} \rangle_m,$$

它显然与角动量的 z 分量 m 无关. 因为它是实的,我们可以写作

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{p}} &= \langle \mathrm{p} \mid \int \rho \mathrm{d}^3 r \mid \mathrm{p} \rangle_m^* \\ &= \langle \mathrm{p} \mid \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I} \int \rho \mathrm{d}^3 r \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I} \mid \mathrm{p} \rangle_m \\ &= \langle \bar{\mathrm{p}} \mid - \int \rho \mathrm{d}^3 r \mid \bar{\mathrm{p}} \rangle_{-m} = - Q_{\bar{\mathrm{p}}}, \end{aligned} \tag{14.40}$$

在导出这里的最后一行时,我们已经用了(14.30)和(14.39). 这样,p 和 $\bar{\mathrm{p}}$

的电荷大小相等,符号相反.与此相似,利用(14.38)我们能够证明,对于同样的自旋组态,p 和 $\bar{p}$ 的磁矩也是大小相等,符号相反.用同样的方法,我们能够把这种考虑推广到所有其他的粒子和反粒子以及它们之间电磁形状因子的相等上去.

3. **粒子和反粒子的寿命相等** 考虑粒子 a 和它的反粒子 $\bar{a}$ 通过弱或电磁相互作用哈密顿 H_{int} 衰变:

$$a \to b \quad 和 \quad \bar{a} \to \bar{b}, \tag{14.41}$$

这里 b 和 $\bar{b}$ 是连续态.和以前一样,在这类衰变中,初态 $|a\rangle_m$ 和 $|\bar{a}\rangle_m$ 是强相互作用哈密顿 H_{st} 的本征态,m 表示角动量的 z 分量.就 H_{int} 的最低一级而言,a 和 $\bar{a}$ 的寿命由微扰公式给出

$$\tau_a^{-1} = 2\pi \sum_b \delta(E_{\bar{b}} - E_a) \mid \langle b_{free} \mid U(\infty,\ 0) H_{int} \mid a \rangle_m \mid^2$$

和 (14.42)

$$\tau_{\bar{a}}^{-1} = 2\pi \sum_{\bar{b}} \delta(E_b - E_{\bar{a}}) \mid \langle \bar{b}_{free} \mid U(\infty,\ 0) H_{int} \mid \bar{a} \rangle_m \mid^2,$$

在导出这些公式时,对末态我们已经用了(6.59)式,其中 U 矩阵仅由 H_{st} 决定.利用(14.31),我们能够把上面关于 τ_a 的公式转变为

$$\begin{aligned}
\tau_a^{-1} &= 2\pi \sum_b \delta(E_b - E_a) \mid \langle b_{free} \mid \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I} U(\infty,\ 0) \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I} H_{int} \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I} \mid a \rangle_m \mid^2 \\
&= 2\pi \sum_b \delta(E_b - E_a) \mid \langle \bar{b}_{free} \mid U(-\infty,\ 0) H_{int} \mid \bar{a} \rangle_{-m} \mid^2.
\end{aligned}$$

显然,寿命与脚标 $\pm m$ 无关,因而我们将把它略去.由于(13.107)和 $E_b = E_{\bar{b}}$, $E_a = E_{\bar{a}}$, 上面的表式现在也能够写作

$$\begin{aligned}
\tau_a^{-1} &= 2\pi \sum_{\bar{b}} \delta(E_{\bar{b}} - E_{\bar{a}}) \mid \langle \bar{b}_{free} \mid S^\dagger U(\infty,\ 0) H_{int} \mid \bar{a} \rangle \mid^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{b}} \delta(E_{\bar{b}} - E_{\bar{a}}) \mid \sum_{\bar{b}'} \langle \bar{b}_{free} \mid S^\dagger \mid \bar{b}'_{free} \rangle \\
&\quad \cdot \langle \bar{b}'_{free} \mid U(\infty,\ 0) H_{int} \mid \bar{a} \rangle \mid^2
\end{aligned} \tag{14.43}$$

在这里,绝对值平方项等于

$$\sum_{\bar{b}',\, \bar{b}''} \langle \bar{b}_{free} \mid S^\dagger \mid \bar{b}'_{free} \rangle \langle \bar{b}_{free} \mid S^\dagger \mid \bar{b}''_{free} \rangle^*$$

$$\cdot \langle \bar{b}'_{\text{free}} \mid U(\infty, 0) H_{\text{int}} \mid \bar{a} \rangle \langle \bar{b}''_{\text{free}} \mid U(\infty, 0) H_{\text{int}} \mid \bar{a} \rangle^* . \quad (14.44)$$

因为 $S^\dagger S = 1$，并且 S 矩阵的矩阵元只是在能量相等的态之间才不为零，我们有

$$\sum_{\bar{b}} \delta(E_{\bar{b}} - E_{\bar{a}}) \langle \bar{b}_{\text{free}} \mid S^\dagger \mid \bar{b}'_{\text{free}} \rangle \langle \bar{b}_{\text{free}} \mid S^\dagger \mid \bar{b}''_{\text{free}} \rangle^*$$
$$= \delta(E_{\bar{b}'} - E_{\bar{a}}) \delta_{\bar{b}'\bar{b}''}. \quad (14.45)$$

把(14.44)代入(14.43)，并利用(14.45)，我们导出

$$\tau_{\text{a}}^{-1} = 2\pi \sum_{\bar{b}'} \delta(E_{\bar{b}'} - E_{\bar{a}}) \mid \langle \bar{b}'_{\text{free}} \mid U(\infty, 0) H_{\text{int}} \mid \bar{a} \rangle \mid^2$$
$$= \tau_{\bar{\text{a}}}^{-1},$$

这在衰变哈密顿 H_{int} 的最低级但在 H_{st} 的所有各级上建立了 a 与 $\bar{\text{a}}$ 的寿命相等. 另一方面，质量等式(14.45)和反电荷关系(14.40)是精确到总哈密顿量的所有各级.

我们注意到(14.45)的成立有赖于对所有 $\bar{\text{b}}$ 的求和. 因此，一个粒子衰变到某一特定道的分支比可以和它的反粒子不同.

实验上，对 a^+ 和 a^- 之间寿命的相等，已经证实到如下的精确度

$$\frac{\tau_{\text{a}}^{+} - \tau_{\text{a}}^{-}}{\tau_{\text{a}}^{+} + \tau_{\text{a}}^{-}} = \begin{cases} 0 \pm 0.05\% & \text{对于}^{*}\ \text{a} = \mu. \\ 0.027\,5 \pm 0.035\,5\% & \text{对于}^{**}\ \text{a} = \pi. \\ 0.045 \pm 0.039\% & \text{对于}^{***}\ \text{a} = \text{K}. \end{cases}$$

在量子场论中用到的 CPT 运算决不是一个显然的运算，注意到这一点是很重要的. CPT 定理意味着当我们把粒子换成反粒子，保持它们的动量不变而螺旋性反向，则所有的相互作用矩阵元应当变到它们相应的复共轭. 像粒子与反粒子的质量和寿命相等这一类的试验并没有证实

---

* Meyer S L, Anderson E W, Bleser E, Lederman L M, Rosen J L, Rothberg J, Wang I-T. *Phys Rev*, 1963, **132**:2693.

** Ayres D S, Cormack A M, Greenberg A J, Kenney R W, Caldwell D O, Elings V B, Hesse W P 和 Morrison R J. *Phys Rev*, 1971, **D3**:1051.

*** Lobkowicz F, Melissinos A C, Nagashima Y, Tewksbury S, von Briesen H, Jr., Fox J D. *Phys Rev*, 1969, **185**:1676.

了 CPT 不变性的全部内容;它不牵涉到螺旋性的反向,对复共轭也不敏感. 对 CPT 对称性的详尽的检验可以在研究 $\mathrm{K}-\overline{\mathrm{K}}$ 复态中作出. 这是下一章中我们将要讨论的.

习题 14.1. 证明在衰变(14.41)中,如果末道 b 和 $\overline{\mathrm{b}}$ 仅由自由粒子组成,它们没有相互作用,则对于这样一个固定的道而言,$\mathrm{a} \to \mathrm{b}$ 和 $\overline{\mathrm{a}} \to \overline{\mathrm{b}}$ 的分支比在衰变哈密顿的最低级上是相等的.

第 15 章　K-$\overline{\text{K}}$ 系 统

四种 K 介子,两种带电的和两种中性的,构成了自然界最令人感兴趣的系统之一.实验决定的 K_L^0 和 K_S^0 之间质量差

$$m_L - m_S = (3.521 \pm 0.015) \times 10^{-6}\,\text{eV}, \tag{15.1}$$

达到了粒子物理学中难与比拟的精确度,并且可与物理学中任何精密的测量相匹敌.很幸运这个小的质量差大约是 K_S^0 衰变宽度的一半.这使得有可能来观察这两个靠得很近的态在产生和衰变中复杂的相干现象的丰富变化.另一方面.这样的观察使我们能够检验量子力学中的线性叠加原理,不同守恒定律的相互影响和各种对称原理的正确性.

历史上,带电 K 介子的 2π 和 3π 衰变模式引导到宇称不守恒的假定.随后对 K_L^0 的 $\pi^+\pi^-$ 衰变模式的观测建立了 CP 不变性的破坏,现在我们将详细的研究这些.

15.1　达利兹图

1953 年,达利兹(Dalitz)* 指出 K 介子的自旋能够通过 3π 衰变模式加以确定

$$K^{\pm} \to \begin{cases} \pi^{\pm} + \pi^{\pm} + \pi^{\mp} \\ \pi^0 + \pi^0 + \pi^{\pm} \end{cases}$$

和 　　　　(15.2)

$$K^0 \to \begin{cases} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ 3\pi^0. \end{cases}$$

---

* Dalitz R H. *Phil Mag*, 1953, **44**:1068; *Phys Rev*, 1954, **94**:1046.

令 $\boldsymbol{k}_i$ 是在 K 介子静止坐标系中第 i 个($i=1$ 或 2 或 3)π 介子的动量，$k_i=|\boldsymbol{k}_i|$ 以及

$$\omega_i=\sqrt{k_i^2+m_\pi^2}$$

是质量为 m_π 的相应的 π 介子的能量. 动量守恒要求这三个 $\boldsymbol{k}_i$ 落在同一平面内，叫做衰变平面，如图 15.1 所示. 能量守恒给出

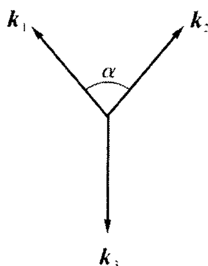


图 15.1　K → 3π 的衰变平面，$\boldsymbol{k}_i$ 是在 K 的静止坐标系中第 i 个 π 介子的动量

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=m_{\mathrm{K}},$$

这里 m_{K} 是 K 介子质量. 根据推导(5.109)—(5.110)的相同理由，我们发现衰变概率是

$$\text{概率}\propto|A|^2\cdot(\text{相空间}) \tag{15.3}$$

这里 A 是衰变矩阵元

$$\text{相空间}\propto\prod_i\frac{\mathrm{d}^3k_i}{\omega_i}\cdot\delta^4(\pi_1+\pi_2+\pi_3-K), \tag{15.4}$$

这里 π_i 和 K 代表 4-动量

$$(\pi_i)_\mu=(\boldsymbol{k}_i,\ \mathrm{i}\omega_i)\quad\text{和}\quad K_\mu=(0,\ \mathrm{i}m_{\mathrm{K}}).$$

1. **相空间**　在这个衰变中，每一 $\boldsymbol{k}_i$ 有三个分量，总数为 9. 由于总的能量动量守恒，有 $9-4=5$ 个变量. 如果我们停留在 K 介子的静止坐标系从而略去它在产生衰变以前的运动，则衰变概率(15.3)与垂直于衰变平面的轴的取向以及绕此轴的转动无关；前者有两个自由度而后者只有一个. 这样，在这个问题中，总共只有 $5-2-1=2$ 个独立的变量.

在图 15.1 中，$\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 之间的夹角是 α. 于是能够把相空间(15.4)写作

$$\mathrm{d}^2\rho\propto k_1^2k_2^2\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}\cos\alpha\,\delta\Big(\sum_i\omega_i-m_{\mathrm{K}}\Big)\prod_i\omega_i^{-1}, \tag{15.5}$$

因为 $\omega_3=(k_1^2+k_2^2+2k_1k_2\cos\alpha+m_\pi^2)^{1/2}$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}\cos\alpha}=\frac{k_1k_2}{\omega_3}.$$

把这个式子代入(15.5)，我们导出

$$d^2\rho \propto \frac{k_1 k_2 dk_1 dk_2}{\omega_1 \omega_2},$$

或

$$d^2\rho \propto d\omega_1 d\omega_2 = d\omega_2 d\omega_3 = d\omega_3 d\omega_1. \quad (15.6)$$

引入第 i 个 π 介子的"动能"

$$T_i = \omega_i - m_\pi, \quad (15.7)$$

并定义衰变的 Q 值为

$$Q = m_K - 3m_\pi = \sum_i T_i \quad (15.8)$$

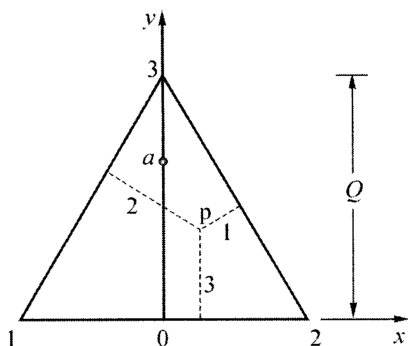


图 15.2　每一次 K → 3π 在三角形中给出一点 P

是很方便的. 这样,每一个衰变的运动学完全由这些变量中的任何两个,譬如说 T_1 和 T_2 所决定. 一个简单的几何表示是画一个高为 Q 的等边三角形,如图 15.2 所示. 令 P 为三角形内的一点. 把它到三边的距离叫做 T_1, T_2 和 T_3;则能量守恒(15.8)会自动满足. 很容易看出,在这个表示中面积元是 $2dT_1dT_2/\sqrt{3}$,它和(15.6)联合起来意味着

$$d^2\rho \propto d(\text{面积}), \quad (15.9)$$

因此,每一衰变(15.2)在这个三角形内定出一点,其相空间体积正比于面积. 这样一些点的积累就叫做达利兹图.

2. *边界*　由于动量守恒,三角形内的每一点不是都能实现. 例如,在图 15.2 中,顶点 3 对应于 $T_1 = T_2 = 0$ 而 $T_3 = Q$, 这显然是非物理的,从图 15.1 我们看出

$$k_3^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos\alpha. \quad (15.10)$$

因为 $|\cos\alpha|$ 是 $\leqslant 1$,物理区的边界由极值决定

$$\cos\alpha = \pm 1, \quad (15.11)$$

这是在 3-动量共线的时候,因此

$$k_3 = \begin{cases} k_1 + k_2, \text{对于} & \xleftarrow{3} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow 2 \end{matrix} \\ k_1 - k_2, \text{对于} & \xleftarrow{1} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 2 \\ \longrightarrow 3 \end{matrix} \\ k_2 - k_1, \text{对于} & \xleftarrow{2} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 3 \\ \longrightarrow 1 \end{matrix} \end{cases} \tag{15.12}$$

(i) 非相对论的情形

从(15.10)我们有

$$\cos\alpha = \frac{k_3^2 - k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2}.$$

对于一个非相对论性的 π 介子,T_i 是 $k_i^2/2m_\pi$,因此,约束 $\cos^2\alpha \leqslant 1$ 能够被写作

$$4T_1T_2 \geqslant (T_3 - T_1 - T_2)^2,$$

边界可以用一个简单的方程式表示

$$4T_1T_2 = (T_3 - T_1 - T_2)^2. \tag{15.13}$$

利用图 15.2 中所表示的坐标 x 和 y,我们看出每一个 T_i 是 x 和 y 的一个线性函数,因而(15.13)是 x 和 y 的二次函数. 因此,它描述一个圆锥曲线,因为它是有界的,它必定是一个椭圆. 对于三个 π 介子的对称性要求椭圆的边界经过 120°的转动后不变;因此它必定是一个圆. 因为图 15.2中的 O 点对应于 $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}Q$ 是物理的点,边界必定是一个内切圆,如图 15.3(a)所示.

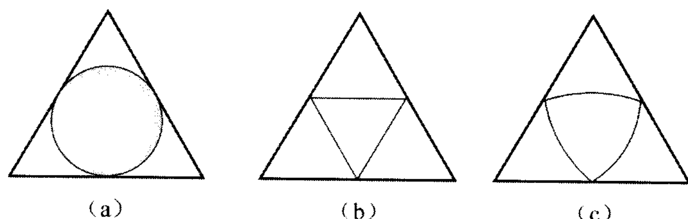


图 15.3　阴影面相当于 K → 3π 的物理区

(a)在非相对论极限下,(b)极端相对论极限下和(c)一般情况下.

(ii) 极端相对论的情况.

在这个极限下,我们可以略去 m_π,因此 $T_i = \omega_i = k_i$. 边界(15.12)可以用三个方程式表示

$$
\begin{aligned}
T_1 &= T_2 + T_3, \\
T_2 &= T_3 + T_1, \\
T_3 &= T_1 + T_2.
\end{aligned}
\tag{15.14}
$$

再一次利用图 15.2 中的坐标 x 和 y,我们看出它们每一个都是一条直线. 结果就是图 15.3(b)中的阴影三角形.

(iii) 一般情况

一般情况下,物理区占有一个盾形的面积,介于上述两种极端情况之间,如图 15.3(c)所示. 解析的形式在习题 15.1 中给出.

3. **自旋的确定** 作为一个具体的例子,让我们考虑衰变

$$
\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-. \tag{15.15}
$$

每一个衰变在达利兹图中将用一个点 p 来代表. 在图 15.2 中,选择 T_1 和 T_2 作为两个 π^+ 的能量而 T_3 是 π^- 的能量 T_-;即 p 的 y 坐标是

$$
y = T_-. \tag{15.16}
$$

由于两个 π^+ 的对称性,概率幅必定是 x 的一个偶函数. T_i 的平均值是≃27 MeV,这意味着 π 介子主要是非相对论性的. 让我们令

$\boldsymbol{q}$=在一个 π^+ 介子的静止坐标系中 $2\pi^+$ 的相对动量

和

$\boldsymbol{k}$=在 K^+ 的静止坐标系中 π^- 的动量.

由于 π 介子的能量较低,我们期望(15.3)中 A 的矩阵元能够展成 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的多项式. 在这一衰变中,这两个动量各自带有一个轨道角动量,分别用 $\boldsymbol{l}_q$ 和 $\boldsymbol{l}_k$ 表示. 令宇称和三个 π 介子系统的总角动量为 P 和 $\boldsymbol{j}$. 显然,

$$
\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l}_q + \boldsymbol{l}_k, \tag{15.17}
$$

又因为 π 介子是赝标量

$$
P = (-1)^{l_q + l_k + 1}, \tag{15.18}
$$

这里 l_q 和 l_k 表示 $\boldsymbol{l}_q$ 和 $\boldsymbol{l}_k$ 的量子数. 由于 $2\pi^+$ 属于玻色统计,只能有 l_q 为偶数的态. 令 j 是 $\boldsymbol{j}$ 的量子数.

现在我们将分析对于不同的 j^{P} 约定值,达利兹标绘的分布.

(i) $j^{\mathrm{P}} = 0^+$

对于 $j = 0$ 我们必须有 $l_q = l_k$; 因此二者都必须是偶数. 根据 (15.18), P 是奇. 这使得 0^+ 成为不可能.

(ii) $j^{\mathrm{P}} = 0^-$

在这一情况下 $l_q = l_k =$ 偶. 最简单的选择是 $l_q = l_k = 0$, 这时,未经归一化的幅 A 是一常数,可以设它为 1. 一般情况下,A 的形式是

$$A = F(y,\ x^2) = 1 + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + \cdots, \tag{15.19}$$

这里 λ_1, λ_2, …是常数.

(iii) $j^{\mathrm{P}} = 1^+$

由于 $j = 1$, 3π 的波函数应当像矢量一样变换. 最简单的选择是 $l_k = 1$ 和 $l_q = 0$; 因此 A 线性地依赖于 $\boldsymbol{k}$. 一般的形式是

$$A = \boldsymbol{k}F(y,\ x^2), \tag{15.20}$$

这意味着当 $\boldsymbol{k} = 0$ 时,衰变的分布必须是 0,即图 15.2 中的 0 点.

(iv) $j^{\mathrm{P}} = 1^-$

在这一情况下,A 应当像矢量一样地变换,最简单的选择是 $l_q = l_k = 2$, 从而 A 二次式地依赖于 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$, A 的最一般的形式是

$$A = (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})F(y,\ x^2),$$

这意味着当 $\boldsymbol{k} = 0$ 和 $\boldsymbol{q} = 0$ 时, 衰变的分布应当是 0. 前者指的是图 15.2 中的 0 点而后者指的点 a $\left(\text{即}, T_1 = T_2 \text{ 和 } T_3 \cong \frac{2}{3}Q\right)$.

当 $\boldsymbol{q} = 0$,或 $\boldsymbol{k} = 0$, 或兼有二者的情况下,直截了当地可以看出对于任何 $j \neq 0$, 衰变幅必须是零. 通过 3π 衰变事例的积累,根据达利兹图的实验分布能够定出 $|A|^2$. 结果是

$$|A|^2 = 1 + g\,\frac{2m_{\mathrm{K}}}{m_\pi^2}\left(\frac{1}{3}Q - T_-\right), \tag{15.21}$$

这里 $g = -0.215 \pm 0.004$, 这是根据本书之末的粒子性质表上的值. 因此

$|A|^2$ 近似地是一个常数,只有少许对 y 的线性依赖关系,A 没有零点这一事实确立了

$$j = 0.$$

这样,3π 的末态是 0^-. 另一方面,当 $j=0$, 任何 2π 的末态必须是偶宇称.

15.2 历史

早在 1947 年,即发现 π 介子 * 的同一年,罗切斯特(Rochester)和巴特勒**(Butler)在用他们的云室研究宇宙射线时,观察到了两个分叉的径迹"具有非常引人注目的性质". 这两个事例,一个带电,一个中性,发现都是一种未知粒子的衰变,它们的质量约为电子的 1 000 倍. 这个著名的 K 介子的发现给了我们进入这个丰富的奇异粒子世界最初的一瞥.

它们的品种迅速增加. 通过对这些粒子的研究,盖尔曼(Gell-Mann)和西岛(Nishijima)在 1950 年代的初期引入了奇异粒子的概念. 这些新的发展也给我们带来了 θ 和 τ 介子之谜.

现在所谓的 K 介子的 2π 和 3π 衰变方式,在那时是指

$$\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0,$$

$$\theta^0 \to \pi^0 + \pi^0, \text{ 或 } \pi^+ + \pi^-,$$

$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0,$$

等等. θ^+ 的自旋宇称显然是 $0^+, 1^-, 2^+, \cdots$. 对于 θ^0,由于玻色统计,它必须是 $0^+, 2^+, 4^+, \cdots$. 正如我们已经说过的,在 1954 年,达利兹已经能确定 τ^+ 的自旋宇称是 0^-. 虽然已知 θ^+ 和 τ^+ 二者的质量差不多,但尚未觉得有什么特别之处. 无论如何,到了 1955 年,非常精确的寿命测量已经可行了,这时发现这两种介子在百分之几的范围内是相同的. 同时,质量的测量也变得更加精确. 发现它们的质量差在 10—20 MeV 以内. 于是我们碰到这

---

* Lattes C M G, Occhialini G P S, Powell C F. *Nature*, 1947, **160**:453.

** Rochester G D, Butler C C. *Nature*, 1947, **160**: 855. See also Leprince-Ringuet L, L'héritier M. *J Phys Radium*, 1946, **7**: 66, 69.

样的伴谬,即两种粒子差不多有同样的质量和寿命,但具有非常不同的衰变模式和总的不相等的相空间体积. 这就是著名的 θ—τ 之谜.

因为宇称守恒被认为是当然的,首先想去说明这个谜的企图自然是沿着一条习惯的路子 * . 但是,在 1956 年初,当阿尔瓦雷茨** (Alvarez)小组的第一个大型的气泡室实验没有得到支持这一解释的证据之后,那就很明显了:答案必定落在某些更深刻的事情上. 也许宇称不守恒,而 θ—τ 是同一种粒子. 但是立刻的反应就是"如此则将如何?". 如果宇称不守恒仅发生在 θ—τ上,则这个线索变成惟一的现象,人们就无法知道这个解释是否正确. 这样就有必要去研究宇称不守恒是否也能够发生在其他的弱过程中.

那时候,宇称选择定则已广泛地用于一切过程——强,电和弱. 因为这些选择定则所给出的结果与实验非常好地相符,因此,最初似乎非常难以继续进行. 只有当一个人认识到和强以及电磁相互作用的情况不同,到那时为止,还没有一个弱相互作用的实验曾经涉及到宇称破坏的问题时,进展才有了可能. 为了直接去观察这样一种破坏,人们必须从一切都是左右对称的装置中去测量一个物理的赝标量. 一旦明白了这一点,就有一大批数目的实验被提出来*** 用以检验这个宇称定律.

---

* 注意一下过去是怎样考虑这种可能的解释是有兴趣的. 它的产生是相信宇称守恒并接受了这种自旋宇称的确定值,即 τ 是 0^- 而 θ 是 0^+,出于对相空间的考虑,人们就要假定 θ 比 τ 的寿命短得多. 又如果 θ 比 τ 轻大约 10 MeV,则 0—0 禁戒跃迁

$$\tau^+ \to \theta^+ + 2\gamma$$

将和 τ^+ 的 3π 衰变模有一个可以比拟的数值. 这一解释的关键是:对 θ 和 τ 的寿命测量在那时候是由沿射线束上 2π 和 3π 末态的衰减来定的,但这仅仅由 τ 的结果所组成. 因为那些 θ 粒子被假定寿命很短,产生以后就立刻衰变掉了. 因此在级联过程

$$\tau^+ \to \theta^+ + 2\gamma \quad \text{和} \quad \tau^+ \to 3\pi$$
$$\theta^+ \to 2\pi$$

中,3π 和 2π 的衰减主要由寿命长得多的 τ 所决定,因此给出了似乎相等的寿命. 这一解释叫做级联抗构(*Phys Rev*, 1955, **100**:932). 这里把近似的质量相等结合到宇称交换的对称性中去了.

** Alvarez L. High Energy Nuclear Physics: Proceedings of the Sixth Annual Rochester Conference. New York: Interscience Publishers, 1956.

*** Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1956, **104**:254.

宇称守恒受到怀疑,自然要把问题扩展到其他的分立对称中去.同一年,即1956,莱德曼*(L. M. Lederman)和他的同事观察了长寿命的中性K介子(当时叫做θ_2^0).这是使用云室的最后的一个大实验;那时,它被用来证明C守恒,这是基于盖尔曼(Gellmann)和佩斯(Pais)的理论分析**.进一步的研究表明这个发现实际上与C守恒无关.事实上,就弱相互作用而言,正如在宇称对称的情形中一样,没有实验证明C或者T,或者CP,或者CT,或者PT是守恒的.那些能够检验所有这些对称性的实验也已经提出,它们只在CPT不变性的基础***上分析全部的K_L^0和K_S^0结构.但是,如果说P, C, CT和PT的破坏能够是几乎最大的,正如在二分量中微子的理论中一样****,那时已经认识到在K衰变中,由于幺正性的限制,CP和T的破坏量必须是很小的.

紧随着这些理论分析作出之后,吴健雄,安布勒(Ambler),海沃德(Hayward),霍普斯(Hoppes)和哈得孙(Hudson)*****在1957年1月用β衰变给出了P和C不对称性的第一个示例.紧跟着又由加温(Garwin),里德曼和温里克******(Weinrich)和由弗里德曼(Friedman)及特莱格迪(Telegdi)*******在π和μ的衰变中观察到了相同的不对称性.不过,CP破坏的实验发现要来得晚得多,那是在1964年由克里斯滕松(Christenson),克罗宁(Cronin),菲奇(Fitch)和特莱(Turlay)********通过观测到长寿命的K介子能够衰变成$\pi^+\pi^-$而得到的.

我们注意到如果CP是一个严格的对称性,就有可能由K^0和$\bar{K}^0$定

---

* Lande K, Booth E T, Impeduglia J, Lederman L M, Chinovsky W. *Phys Rev*, 1956, **103**:1901.

** Gell-Mann M, Pais A. *Phys Rev*, 1955, **97**:1387.

*** Lee T D, Oehme R, Yang C N. *Phys Rev*, 1957, **106**:340.

**** Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1957, **105**:1671; Landau L. *Nucl Phys*, 1957, **3**:127; Salam A. *Nuovo Cimento*, 1957, **5**:299.

***** Wu C S, Ambler E, Hayward R W, Hoppes D D, Hudson R P. *Phys Rev*, 1957, **105**:1413.

****** Garwin R L, Lederman L M, Weinrich M. *Phys Rev*, 1957, **105**:1415.

******* Friedman J J, Telegdi, V L. *Phys Rev*, 1957, **105**:1681.

******** Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, Turlay R. *Phy Rev Lett*, 1964, **13**:138.

义出两个 CP 相反的态 K_1^0 和 K_2^0：

$$|K_1^0\rangle \equiv 2^{-1/2}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

和 (15.22)

$$|K_2^0\rangle \equiv 2^{-1/2}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle),$$

这里

$$|\bar{K}^0\rangle \equiv CP\ |K^0\rangle. \tag{15.23}$$

因此之故，

$$CP\ |K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle,$$
$$CP\ |K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle. \tag{15.24}$$

因为在一个零角动量的态中，$\pi^+\pi^-$ 和 $2\pi^0$ 的 $CP = +1$，CP 不变性的假设要求只能有 $K_1^0 \to 2\pi$. 而 K_2^0 能够衰变到 3π，$\pi e\nu$，…. 因为 2π 的相空间因子比起 3π，$\pi e\nu$，…的来要大得多，K_1^0 应该比 K_2^0 的寿命短得多.

克里斯滕松(Christenson)等人的发现表明长寿命的 K 介子(今后叫做 K_L^0)也能变成 2π；因此他们建立了 CP 不守恒. 观察到的破坏 CP 的幅能够用一个参数来表征.

$$\eta_{+-} \equiv \frac{\text{幅}(K_L^0 \to \pi^+\pi^-)}{\text{幅}(K_S^0 \to \pi^+\pi^-)}, \tag{15.25}$$

这里 K_S^0 代表短寿命的 K 介子. 观察到的实际数值是

$$\eta_{+-} = (2.274 \pm 0.022) \times 10^{-3}. \tag{15.26}$$

虽然它很小，这个数显示了另一个被人珍惜的对称原理的破坏. 它也表明物理的长寿命和短寿命的 K 介子不能是(15.22)中 CP 的本征态 K_1^0 和 K_2^0. 现在我们转到 $K_L^0 - K_S^0$ 的复态，主要根据 1957 年的文章所给出的理论分析.

15.3 中性 K 介子复态的一般讨论

1. *质量和衰变矩阵* 让我们考虑一个 K^0 和 $\bar{K}^0$ 的相干射线束，它在

固有时间 τ 的幅由波函数

$$\psi(\tau) = a_1(\tau) \mid K^0\rangle + a_2(\tau) \mid \overline{K}^0\rangle$$

来描述.或简写成

$$\psi(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{pmatrix}, \tag{15.27}$$

这里的 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}}^0$ 态通过下式相关

$$\mid \overline{K}^0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S\theta} CPT \mid K^0\rangle, \tag{15.28}$$

其中 S 是奇异量子数,θ 是任意的相角.在整个分析中我们假定强和电磁相互作用,H_{st}和 H_γ,是 CPT 守恒的,而留下弱相互作用 H_{wk}是否 CPT 不变的问题暂不肯定.这里态 K^0 被定义为 $H_{\mathrm{st}}+H_\gamma$ 的本征态,其奇异数 $S=+1$. 因为 $H_{\mathrm{st}}+H_\gamma$ 与 CPT 对易,(15.28)式所定义的态 $\overline{\mathrm{K}}^0$ 也必须是 $H_{\mathrm{st}}+H_\gamma$ 的本征态,但 $S=-1$. 这样我们有

$$(H_{\mathrm{st}} + H_\gamma) \mid K^0\rangle = m_{\mathrm{K}} \mid K^0\rangle$$

和 (15.29)

$$(H_{\mathrm{st}} + H_\gamma) \mid \overline{K}^0\rangle = m_{\mathrm{K}} \mid \overline{K}^0\rangle.$$

弱相互作用 H_{wk}把 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}}^0$ 与其他的连续态例如 2π, 3π, $\pi e\nu$ 等联系起来.这造成了 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}}^0$ 的各种衰变方式,并消除了它们的简并.正如在任何原子跃迁的标准谱线宽度的问题 * 中一样,我们可以消去依赖时间的薛定谔方程中的连续幅.于是波函数(15.27)的时间导数 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau$ 能够用 $\psi(\tau)$本身表示.根据叠加原理,这样一个表示式显然应当是线性的.联系 $\psi(\tau)$和 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau$ 的最一般的线性算子是一个 2×2 的矩阵,它总可以被写成两个厄米矩阵之和.因此,我们可以写出

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\psi(\tau) = (M - \mathrm{i}\Gamma)\psi(\tau), \tag{15.30}$$

这里 Γ 和 M 都是 2×2 的厄米矩阵

---

* Weisskopf V F, Wigner E P. *Z Physik*, 1930, **63**:54; 1930, **65**:18.

$$\Gamma = \Gamma^+ \quad 和 \quad M = M^+. \tag{15.31}$$

用 H_{wk}和总哈密顿 $H = H_{\mathrm{st}} + H_{\gamma} + H_{\mathrm{wk}}$ 我们得到通常的微扰公式

$$(M - \mathrm{i}\Gamma)_{\alpha\beta} = \langle \alpha \mid H \mid \beta \rangle + \sum_n \frac{\langle \alpha \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n \rangle \langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid \beta \rangle}{m_{\mathrm{K}} - (m_n - \mathrm{i}\varepsilon)}, \\ + O(H_{\mathrm{wk}}^3) \tag{15.32}$$

这里 $\varepsilon = 0^+$, α 和 β 可以是 K^0 或 $\overline{\mathrm{K}}^0$, $|n\rangle$是 $H_{\mathrm{st}} + H_{\gamma}$ 任意的一个本征态,本征值为 m_n,但

$$n \neq \mathrm{K}^0 \text{ 或 } \overline{\mathrm{K}}^0. \tag{15.33}$$

把恒等式

$$\frac{1}{m_{\mathrm{K}} - (m_n - \mathrm{i}\varepsilon)} = \mathscr{P}\frac{1}{m_{\mathrm{K}} - m_n} - \mathrm{i}\pi\delta(m_n - m_{\mathrm{K}}), \tag{15.34}$$

代入(15.32),这里 $\mathscr{P}$表示主值,得到

$$M_{\alpha\beta} = \langle \alpha \mid H \mid \beta \rangle + \sum_n \mathscr{P}\frac{\langle \alpha \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n \rangle \langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid \beta \rangle}{m_{\mathrm{K}} - m_n} \tag{15.35}$$

和

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \pi \sum_n \langle \alpha \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n \rangle \langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid \beta \rangle \delta(m_{\mathrm{K}} - m_n). \tag{15.36}$$

在这些以及以后的表式中,我们将略去所有的 $O(H_{\mathrm{wk}}^3)$项.

练习. 证明积分

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(z)}{z \pm \mathrm{i}\varepsilon} \mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} \mathscr{P}\frac{f(z)}{z} \mathrm{d}z \mp \mathrm{i}\pi f(0),$$

这里 ε 是一个正的无穷小,积分沿轴 z 的实轴从 $-a$ 到 $a > 0$, 在这个区间上 $f(z)$是一个正则函数.

定理 1. (i) Γ 是一个正的矩阵,即

$$\Gamma_{11} \geqslant 0, \Gamma_{22} \geqslant 0 \quad 和 \quad \det\Gamma \geqslant 0. \tag{15.37}$$

(ii) 若 CPT 不变性成立,则不管 T 对称性是否成立,都有

$$M_{11} = M_{22} \quad 和 \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22}. \tag{15.38}$$

(iii) 若 T 不变性成立,则不管 CPT 对称性如何,都有

$$\frac{\Gamma_{12}^*}{\Gamma_{12}} = \frac{M_{12}^*}{M_{12}}. \tag{15.39}$$

进一步,通过调整(15.28)式中的任意相角 θ,我们总能选择 Γ_{12} 为实数;因此,如果 T 不变成立,则

$$\Gamma = \Gamma^* = \widetilde{\Gamma} \quad 和 \quad M = M^* = \widetilde{M}. \tag{15.40}$$

上式中～表示转置,脚标 1 表示 K^0,2 表示 $\overline{\mathrm{K}}^0$.

证明. 从(15.30)得出

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|\psi|^2 = 2\psi^\dagger\Gamma\psi,$$

这必须是正的,因为当 τ 增加时 $\mathrm{K}-\overline{\mathrm{K}}$ 束流只会衰变.因此,对任意的 ψ

$$\psi^\dagger\Gamma\psi \geqslant 0,$$

这就给出了(15.37).

为了证明 $M_{11} = M_{22}$,我们注意到根据(15.35)—(15.36)

$$\Gamma_{11} = \pi\sum_n \delta(m_n - m_{\mathrm{K}})\langle K^0 | H_{\mathrm{wk}} | n\rangle\langle n | H_{\mathrm{wk}} | K^0\rangle \tag{15.41}$$

和

$$M_{11} = \langle K^0 | H | K^0\rangle + \sum_n \mathscr{P}\frac{\langle K^0 | H_{\mathrm{wk}} | n\rangle\langle n | H_{\mathrm{wk}} | K^0\rangle}{m_{\mathrm{K}} - m_n} \tag{15.42}$$

因为两者都是实数,根据(15.41)我们有

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{11}^* = \pi\sum_n \delta(m_n - m_{\mathrm{K}})\langle K^0 | \mathscr{I}^{-1}\mathscr{I}H_{\mathrm{wk}}\mathscr{I}^{-1}\mathscr{I} | n\rangle \cdot\langle n | \mathscr{I}^{-1}\mathscr{I}H_{\mathrm{wk}}\mathscr{I}^{-1}\mathscr{I} | K^0\rangle,$$

这里 $\mathscr{I} = CPT$.如果假定 CPT 不变,则 $\mathscr{I}H_{\mathrm{wk}}\mathscr{I}^{-1} = H_{\mathrm{wk}}$.利用(15.28),我们看出上述表式给出 $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$.与此相似,根据(15.42)和 CPT 不变得出 $M_{11} = M_{22}$.由(15.36),我们发现

$$\Gamma_{12}^* = \pi\sum_n \delta(m_n - m_{\mathrm{K}})\langle K^0 | T^{-1}TH_{\mathrm{wk}}T^{-1}T | n\rangle \cdot\langle n | T^{-1}TH_{\mathrm{wk}}T^{-1}T | \overline{K}^0\rangle. \tag{15.43}$$

如果 T 不变成立，则 $TH_{\mathrm{wk}}T^{-1}=H_{\mathrm{wk}}$，又由于 $T(H_{\mathrm{st}}+H_{\gamma})T^{-1}=H_{\mathrm{st}}+H_{\gamma}$，

$$T\mid K^0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mid K^0\rangle,$$

$$T\mid \overline{K}^0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\alpha}}\mid \overline{K}\rangle,$$

这里 α 和 $\bar{\alpha}$ 是实相角. 同样，我们可以选择 $T|n\rangle \propto |n\rangle$. 因而(15.43)能够被写成

$$\Gamma_{12}^{*} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\alpha}-\alpha)}\Gamma_{12}.$$

与此相似，根据(15.35)和 T 不变的假设，我们有

$$M_{12}^{*} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\alpha}-\alpha)}M_{12};$$

它们联合起来导致(15.39). 这就完成了对定理的证明.

很明显，(15.38)只依赖于 CPT，而与 T 无关，但(15.39)只依赖于 T，而与 CPT 无关.

2. **本征值** 因为 $M-\mathrm{i}\Gamma$ 是一个 2×2 的矩阵，它有两个本征矢量，叫做 $|L\rangle$ 和 $|S\rangle$，它们满足

$$(M-\mathrm{i}\Gamma)\mid j\rangle = \left(m_j - \frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma_j\right)\mid j\rangle, \tag{15.44}$$

这里 $j=L$ 或 S. 本征值的实数部分是质量 m_{L} 和 m_{S}；虚数部分是半宽度，它与寿命 τ_i 有关系 $\tau_{\mathrm{L}}=\gamma_{\mathrm{L}}^{-1}$，和 $\tau_{\mathrm{S}}=\gamma_{\mathrm{S}}^{-1}$. 脚标 S 表示短寿命，L 表示长寿命. 由粒子性质表可以找出实验值是

$$\tau_{\mathrm{S}} = (0.892\,3 \pm 0.002\,2)\times 10^{-10}\,\mathrm{s},$$

$$\tau_{\mathrm{L}} = (5.183 \pm 0.040)\times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

和

$$\Delta m \equiv m_{\mathrm{L}} - m_{\mathrm{S}} = (0.534\,9 \pm 0.002\,2)\times 10^{10}\,\hbar\mathrm{s}^{-1}$$

$$\cong 3.5\times 10^{-6}\,\mathrm{eV} \cong \frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{S}}, \tag{15.45}$$

和 K 介子质量比较，得到

$$\frac{\Delta m}{m_{\mathrm{K}}} \sim 10^{-14}. \tag{15.46}$$

在唯象的分析中，一个典型的 H_{wk} 的矩阵元与 H_{st} 的矩阵元之比是 $Gm_p^2/4\pi$，这里 G 是(8.1)式中给出的费米常数. 正如我们将在第 21 章中要讨论的，对于奇异数改变的矩阵元，还要乘上一个卡比玻角(Cabibbo angle)因子. 这导致

$$[(H_{wk})_{\Delta S=\pm 1}/H_{st}] \sim 10^{-7}. \tag{15.47}$$

把这个与(15.46)相比较，我们得到

$$\frac{\Delta m}{m_K} \sim \left(\frac{H_{wk}}{H_{st}}\right)^2, \tag{15.48}$$

这意味着就 H_{wk} 的一级近似而言，Δm 应该是 0. 由(15.35)我们看出，略去 $O(H_{wk}^2)$ 的质量矩阵就是 $\langle\alpha|H|\beta\rangle$；因为它与单位矩阵成正比，我们必须有

$$\langle K^0 \mid H \mid K^0\rangle = \langle \bar{K}^0 \mid H \mid \bar{K}^0\rangle$$

和

$$\langle K^0 \mid H \mid \bar{K}^0\rangle = 0.$$

第一式支持了 CPT 不变，至少在对角矩阵元上是如此，第二式表示选择定则

$$\Delta S \neq \pm 2. \tag{15.49}$$

由于 $H = H_{st} + H_\gamma + H_{wk}$，其中已知 $H_{st} + H_\gamma$ 是保持奇异数 S 守恒的，因此(15.49)式着重的是 H_{wk} 的选择定则.

现在，回到(15.44)所给出的本征矢量 $|j\rangle$，像在(15.27)中一样，我们可以写出

$$|j\rangle = a_1(j) \mid K^0\rangle + a_2(j) \mid \bar{K}^0\rangle = \begin{bmatrix} a_1(j) \\ a_2(j) \end{bmatrix}. \tag{15.50}$$

用(15.35)—(15.36)中所给出的 $M_{\alpha\beta}$ 和 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 可以表出在这两个本征态之间 M 和 Γ 的矩阵元如下

$$\langle j \mid M \mid j'\rangle = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha^*(j) a_\beta(j') M_{\alpha\beta}$$

和 (15.51)

$$\langle j \mid \Gamma \mid j' \rangle = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha^* (j) a_\beta (j') \Gamma_{\alpha\beta}.$$

它们的对角矩阵元分别给出 m_j 和$\frac{1}{2}\gamma_j$：

$$m_j = \langle j \mid M \mid j \rangle$$

和

$$\frac{1}{2}\gamma_j = \langle j \mid \Gamma \mid j \rangle, \tag{15.52}$$

由于(15.35)—(15.36)，在略去 $O(H_{\mathrm{wk}}^3)$以后，我们有

$$m_j = \langle j \mid H \mid j \rangle + \sum_n \mathscr{P} \frac{\langle j \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n \rangle \langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid j \rangle}{m_{\mathrm{K}} - m_n}$$

和

$$\gamma_j = 2\pi \sum_n \langle j \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n \rangle \langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid j \rangle \delta(m_n - m_{\mathrm{K}}), \tag{15.53}$$

正如(15.33)中一样，在这里我们对所有 $H_{\mathrm{st}} + H_\gamma$ 的本征态$|n\rangle$求和，但 $n \neq \mathrm{K}^0$ 或 $\overline{\mathrm{K}}^0$. 有时按照道 c 来对态$|n\rangle$分组比较方便：

$$c = \pi^+\pi^-,\ 2\pi^0,\ \pi^+ \mathrm{e}^- \bar{\nu}_{\mathrm{e}},\ \cdots,$$

因此对于每一道中不同的态 n_c 它们的矩阵元

$$\langle n_c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid j \rangle = \langle c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid j \rangle \tag{15.54}$$

仅依赖于 c，而与个别的 n_c 无关. 这样，我们可以把总宽度分解成不同的道之和

$$\gamma_j = \sum_c \gamma_j(c), \tag{15.55}$$

这里

$$\gamma_j(c) = 2\pi\rho_c \mid \langle c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid j \rangle \mid^2, \tag{15.56}$$

ρ_c 是 c 道中态的密度

$$\rho_c = \sum_{n_c} \delta(m_{n_c} - m_{\mathrm{K}}). \tag{15.57}$$

对每一个固定的道，一个有用的参数是

$$\eta_c \equiv \frac{\langle c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid L\rangle}{\langle c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid S\rangle}. \tag{15.58}$$

对于 $c = \pi^+\pi^-$, η_c 是(15.26)中 CP 破坏的参数 η_{+-}. 利用(15.56),我们有

$$\eta_c = \left[\frac{\gamma_{\mathrm{L}}(c)}{\gamma_{\mathrm{S}}(c)}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}, \tag{15.59}$$

这里 ϕ_c 是一个相角. 根据(15.52)和(15.55)就得出 Γ 的对角矩阵元能够写成

$$\langle S \mid \Gamma \mid S\rangle = \frac{1}{2}\sum_c \gamma_{\mathrm{S}}(c)$$

和

$$\langle L \mid \Gamma \mid L\rangle = \frac{1}{2}\sum_c \gamma_{\mathrm{L}}(c). \tag{15.60}$$

同样,根据(15.36)和(15.51),我们得到

$$\begin{aligned}\langle S \mid \Gamma \mid L\rangle &= \pi\sum_n \langle S \mid H_{\mathrm{wk}} \mid n\rangle\langle n \mid H_{\mathrm{wk}} \mid L\rangle\delta(m_n - m_{\mathrm{K}}) \\ &= \pi\sum_c \rho_c\langle S \mid H_{\mathrm{wk}} \mid c\rangle\langle c \mid H_{\mathrm{wk}} \mid L\rangle. \end{aligned} \tag{15.61}$$

如前, $\sum\limits_c$ 是表示对所有的道求和,而 $\sum\limits_n$ 是对 $H_{\mathrm{st}} + H_\gamma$ 的所有本征态 n 求和,但 $n \neq \mathrm{K}^0$ 或 $\overline{\mathrm{K}}^0$. 应用 $\gamma_j(c)$和 ϕ_c 的定义,我们可以把(15.61)重写作

$$\langle S \mid \Gamma \mid L\rangle = \frac{1}{2}\sum_c [\gamma_{\mathrm{S}}(c)\gamma_{\mathrm{L}}(c)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}, \tag{15.62}$$

这个公式在以后会有用处.

3. $\mathrm{K}_{\mathrm{S}}^0$ 和 $\mathrm{K}_{\mathrm{L}}^0$　在这一节,我们用(15.50)的记号给出本征矢量$|S\rangle$和$|L\rangle$的显示式

定理 2.　(i) 如果 CPT 不变成立,则不管 T 不变是否成立

$$\mid S\rangle = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+\mid \varepsilon \mid^2)}}$$

和 (15.63)

$$| L\rangle = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ -(1-\varepsilon) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}},$$

这里 ε 是一个复数.

(ii) 如果 T 不变成立,则不管 CPT 不变是否成立,我们可以写出

$$| S\rangle = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+|\delta|^2)}}$$

和

$$| L\rangle = \begin{pmatrix} 1-\delta \\ -(1+\delta) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+|\delta|^2)}}, \tag{15.64}$$

这里 δ 也是一个复数.

(iii) 让我们定义

$$\xi \equiv \langle S | L\rangle, \tag{15.65}$$

则

$$\xi\text{是}\begin{cases}\text{实数,如果 } CPT \text{ 成立,} \\ \text{虚数,如果 } T \text{ 成立.}\end{cases} \tag{15.66}$$

证明. 在(15.44)中,2×2 的矩阵 $M-\mathrm{i}\Gamma$ 是由四个复数矩阵元所组成,因此,我们总能够把它用一个复数 D 和一个矢量 $\boldsymbol{E}$ 的三个复分量 E_1, E_2, E_3 表示出来

$$M-\mathrm{i}\Gamma = D+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\tau}, \tag{15.67}$$

这里 $\boldsymbol{\tau}$ 是(3.1)式给出的泡利矩阵. 为了证明(i)我们从定理 1 的(15.38)式开始,它表明 CPT 不变包含了 $E_3=0$. 令 $E_1=E\cos\alpha$ 和 $E_2=E\sin\alpha$. 于是方程式(15.67)变为

$$M-\mathrm{i}\Gamma = D+E\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \tag{15.68}$$

在这里 D, E 和 α 都是复数. 很容易看出本征矢量正比于

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix}. \tag{15.69}$$

相应的本征值为

$$D+E \quad 和 \quad D-E. \tag{15.70}$$

由下式导入 ε

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \equiv e^{i\alpha}, \tag{15.71}$$

我们可以把(15.69)式重写作

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ -(1-\varepsilon) \end{pmatrix},$$

当乘以归一化常数后它给出(15.63)式.

要证明(ii),方便的方法是把 $|j\rangle$ 表为一个 2×1 列矩阵 ψ_j,和令 $m_j - i\frac{1}{2}\gamma_j = \lambda_j$,这里 j 像以前一样可以是 L 或 S. 方程式(15.44)变为

$$\begin{aligned} (M-i\Gamma)\psi_S &= \lambda_S\psi_S, \\ (M-i\Gamma)\psi_L &= \lambda_L\psi_L. \end{aligned} \tag{15.72}$$

根据定理 1 的(15.40),我们知道 T 不变导致 $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$, $\widetilde{M} = M$, 因此

$$\widetilde{\psi}_L(M-i\Gamma)\psi_S = \widetilde{\psi}_S(M-i\Gamma)\psi_L.$$

把(15.72)代入上式,我们得到

$$\lambda_S\widetilde{\psi}_L\psi_S = \lambda_L\widetilde{\psi}_S\psi_L.$$

由于 $\widetilde{\psi}_S\psi_L = \widetilde{\psi}_L\psi_S$ 和 $\lambda_S \neq \lambda_L$, 我们看出

$$\widetilde{\psi}_L\psi_S = 0. \tag{15.73}$$

2×1 的列矢量 ψ_S 总可以被写作

$$\psi_S \propto \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix}.$$

由于(15.73),我们必须有

$$\psi_L \propto \begin{pmatrix} 1-\delta \\ -(1+\delta) \end{pmatrix}.$$

这两个式子在乘以归一化常数后给出(15.64).

为了证明(iii),我们注意到在 CPT 不变的假定下,(15.63)表示

$$\begin{aligned}\xi = \langle S \mid L\rangle &= [2(1+|\varepsilon|^2)]^{-1}[(1+\varepsilon)^*(1+\varepsilon) \\ &\quad -(1-\varepsilon)^*(1-\varepsilon)] \\ &= (1+|\varepsilon|^2)^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*),\end{aligned} \tag{15.74}$$

它是实数.同样,若 T 不变成立,根据(15.64)得出

$$\begin{aligned}\xi &= [2(1+|\delta|^2)]^{-1}[(1+\delta)^*(1-\delta) \\ &\quad -(1-\delta)^*(1+\delta)] \\ &= (1+|\delta|^2)^{-1}(\delta^*-\delta),\end{aligned} \tag{15.75}$$

它是虚数.这样,我们证明了(15.66),而定理2的证明毕.

说明. 如果 CPT 和 T 二者都是精确成立的对称性,则根据定理2,我们看出 ε 和 δ 应当是0,而 $|S\rangle$ 和 $|L\rangle$ 化为(15.22)式所给出的 CP 本征态 $|K_1^0\rangle$ 和 $|K_2^0\rangle$.因为 CP 守恒要求 $\xi=0$,所以 ξ 是度量 CP 不守恒的一个有用的参数.

定理 3.

$$|\xi|^2 \leqslant \frac{\left[\sum_c \sqrt{\gamma_S(c)\gamma_L(c)}\right]^2}{(m_S-m_L)^2+\frac{1}{4}(\gamma_S+\gamma_L)^2} \tag{15.76}$$

$$\leqslant \frac{\gamma_S\gamma_L}{(m_S-m_L)^2+\frac{1}{4}(\gamma_S+\gamma_L)^2}. \tag{15.77}$$

证明. 以 i 乘(15.44),我们有

$$(\Gamma+\mathrm{i}M)\mid j\rangle = \left(\frac{1}{2}\gamma_j+\mathrm{i}m_j\right)\mid j\rangle, \tag{15.78}$$

由此就得出

$$\langle S \mid \Gamma+\mathrm{i}M \mid L\rangle = \left(\frac{1}{2}\gamma_L+\mathrm{i}m_L\right)\langle S \mid L\rangle$$

和

$$\langle L \mid \Gamma + \mathrm{i}M \mid S\rangle = \left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{S}} + \mathrm{i}m_{\mathrm{S}}\right)\langle L \mid S\rangle. \qquad (15.79)$$

后者的厄米共轭是

$$\langle S \mid \Gamma - \mathrm{i}M \mid L\rangle = \left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{S}} - \mathrm{i}m_{\mathrm{S}}\right)\langle S \mid L\rangle. \qquad (15.80)$$

把(15.79)和(15.80)相加并应用 $\xi = \langle S \mid L\rangle$, 我们得到

$$2\langle S \mid \Gamma \mid L\rangle = \left[\frac{1}{2}(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{S}}) + \mathrm{i}(m_{\mathrm{L}} - m_{\mathrm{S}})\right]\xi, \qquad (15.81)$$

这与(15.62)联合导致

$$\xi = \frac{\sum_c [\gamma_{\mathrm{S}}(c)\gamma_{\mathrm{L}}(c)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}}{\frac{1}{2}(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{S}}) + \mathrm{i}(m_{\mathrm{L}} - m_{\mathrm{S}})}, \qquad (15.82)$$

因此,也导致不等式(15.76). 由于 $\gamma_j = \sum_c \gamma_j(c)$, 不等式(15.77)也由此推出. 这就完成了对定理 3 的证明.

说明. 利用粒子性质表上 $\gamma_{\mathrm{S}}(c)$和 $\gamma_{\mathrm{L}}(c)$的各种实验值,我们看出(15.76)意味着 $|\xi| \leqslant 6\times 10^{-3}$, 而(15.77)意味着 $|\xi| \leqslant 6\times 10^{-2}$. 定理 3 的证明与 CPT 或 T 的对称性假定无关. 它只应用了量子力学的幺正性质,因此,在文献上,这些不等式被称为幺正极限. 它们的存在,在 1956 年当各种分立的时空对称性第一次受到怀疑时,就已经认识到了. 由于幺正极限,当时就预言过 CP 破坏的实验证明,不像 P 和 C 不对称那样,将要困难得多.

15.4 相干现象

像以前一样,τ 表示 K 介子的静止坐标系中的时间. 当 $\tau = 0$, 令态为

$$b_{\mathrm{S}} \mid S\rangle + b_{\mathrm{L}} \mid L\rangle. \qquad (15.83)$$

这里 b_{S} 和 b_{L} 是常参数,它们由产生机理决定. 例如,在反应 $\pi^- + \mathrm{P} \rightarrow$

$\Lambda^0+\mathrm{K}^0$ 中，初态对应于

$$b_S \cong b_L \cong 2^{-\frac{1}{2}}.$$

根据(15.30)和(15.44)，我们知道在后一时刻 τ，态(15.83)是

$$|\tau\rangle = b_S e^{-(im_S+\frac{1}{2}\gamma_S)\tau}|S\rangle + b_L e^{-(im_L+\frac{1}{2}\gamma_L)\tau}|L\rangle. \tag{15.84}$$

因此，在时刻 τ，这个 K 介子态衰变到 c 道的幅是

$$\langle c|H_{wk}|\tau\rangle = b_S e^{-(im_S+\frac{1}{2}\gamma_S)\tau}\langle c|H_{wk}|S\rangle + b_L e^{-(im_L+\frac{1}{2}\gamma_L)\tau}\langle c|H_{wk}|L\rangle.$$

相应的衰变率是

$$\begin{aligned}&2\pi\rho_c|\langle c|H_{wk}|\tau\rangle|^2\\ &\quad=|b_S|^2\gamma_S(c)e^{-\gamma_S\tau}+|b_L|^2\gamma_L(c)e^{-\gamma_L\tau}\\ &\qquad+e^{-\frac{1}{2}(\gamma_S+\gamma_L)\tau}\sqrt{\gamma_S(c)\gamma_L(c)}\\ &\qquad\times[b_S^* b_L e^{i(m_S-m_L)\tau+i\phi_c}+\text{厄米共轭}],\end{aligned} \tag{15.85}$$

在这里，ρ_c，$\gamma_S(c)$，$\gamma_L(c)$和 ϕ_c 由(15.56)—(15.57)和(15.59)所给出. 因为像(15.45)式所表明的那样，$\gamma_L \ll \gamma_S$ 和 $\Delta m = m_L - m_S \cong \frac{1}{2}\gamma_S$，所以在(15.85)右边的三项有非常不同的时间依赖关系，从而能够分别地加以测量. 能级$|L\rangle$和$|S\rangle$就像两个频率相差很少的音叉，它们耦合到和 K 介子的产生和衰变道相似的音域广阔的“音箱”中去，这就导致了粒子物理学中某些最精细的实验. 另一方面，(15.85)式的定量的证明也对量子力学的线性叠加原理给予最强烈的支持.

测量(15.85)的指数，我们能够定出 γ_S，γ_L 和 Δm；选择不同的衰变道 c，我们能够测量不同的 $\gamma_S(c)$，$\gamma_L(c)$和相位 ϕ_c. 于是，根据(15.59)可以决定 η_c. 对于 $c=\pi^+\pi^-$ 和 $2\pi^0$，相应的 η_c 是 $\eta_{+-}=|\eta_{+-}|e^{i\phi_{+-}}$ 和 $\eta_{00}=|\eta_{00}|e^{i\phi_{00}}$. 由粒子性质表我们看出

$$\begin{aligned}&|\eta_{+-}|=(2.274\pm0.022)\times10^{-3},\ \phi_{+-}=(44.6\pm1.2)^\circ,\\ &|\eta_{00}|=(2.33\pm0.08)\times10^{-3}\quad \text{和}\quad \phi_{00}=(54\pm5)^\circ.\end{aligned} \tag{15.86}$$

由于 η_{+-}和 η_{00}都$\neq 0$，K_L^0 能够衰变到 2π. 因为已知 K_L^0 的一个主要

的衰变方式是 3π,并且根据达利兹图所决定的 π 介子的末态主要是 S 态,所以,对于 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 或 $3\pi^0$,我们有

$$(CP)_{3\pi} = (CP)_{2\pi}(CP)_{\pi^0}.$$

由于单个 π^0 的 CP 是-1,这意味着 $(CP)_{3\pi} \neq (CP)_{2\pi}$. 总之,$K_L^0$ 有一个确定的寿命和确定的质量而没有简并态(注意 $m_S \neq m_L$). 它的末态没有确定的 CP 这一事实证明了 CP 破坏. 破坏的幅可以由 η_{+-} 和 η_{00} 来表征;这两者都很小,只有$\sim10^{-3}$.

15.5 T 破坏

如果我们假定 CPT 不变,则 CP 不守恒意味着 T 破坏. 在这一节中,我们将在不作 CPT 不变的假定下,证明同样的结论能够成立.

利用(15.59)和(15.82),我们有

$$\left[\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S) + i(m_L - m_S)\right]\xi = \sum_c \gamma_S(c)\eta_c$$
$$= \gamma_S(\pi^+\pi^-)\eta_{+-} + \gamma_S(\pi^0\pi^0)\eta_{00} + \cdots. \tag{15.87}$$

由粒子性质表我们知道 K_S^0 的主要衰变方式是 $\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^0\pi^0$. 观察到的 K_S^0 的其他衰变方式只有 $\pi^+\pi^-\gamma$,其分支比为$(1.85\pm0.10)\times10^{-3}$;相应的衰变 $K_L^0\to\pi^+\pi^-\gamma$ 具有分支比$(6.0\pm2.0)\times10^{-5}$. 所有 K_S^0 的其他衰变方式,例如 3π, $\gamma\gamma$,等至今还不曾见到过,它们的分支比上限很小. 因此,(15.87)的右边最初的两项是主要的,根据(15.86),两者的相角$\cong 45°\sim55°$. 另一方面,由于 $(m_L - m_S) \cong \frac{1}{2}\gamma_S \gg \frac{1}{2}\gamma_L$,在(15.87)左边方括号中的表式也具有相角$\cong45°$,因此,我们推论 ξ 是实数,至少这是一个好的近似. 但是,如果 T 不变是正确的,则按照定理 2(iii)的(15.66)式,不管 CPT 不变是否成立,ξ 应当是虚数;这和我们的推论相矛盾,由此证明了 T 破坏.

我们注意到,按照(15.66)式中的顶上一行,ξ 是实数给予 CPT 不变又一支持.

15.6 在 *CPT* 不变的假定下作的分析

1. 态矢 假定有 CPT 对称，态矢 $|S\rangle$ 和 $|L\rangle$ 由(15.63)给出. 它们的标量积是 ξ，根据(15.74)它是

$$\xi = \langle S \mid L\rangle = \frac{2}{1+|\varepsilon|^2}\mathrm{Re}\,\varepsilon. \tag{15.88}$$

正如前面提到过的，如果 CP 守恒，则 $\xi = \langle S \mid L\rangle = 0$，那和 ε 是纯虚数相一致，虽然不一定是 0. CP 不守恒使得 ε 有可能获得一实部. 根据(15.68)和(15.71)，我们有

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = \frac{(M-\mathrm{i}\Gamma)_{21}}{(M-\mathrm{i}\Gamma)_{12}}. \tag{15.89}$$

利用(15.35)—(15.36)，我们看出 α 与(15.28)中的任意相角 θ 直接相关，它可以被写成

$$|\bar{K}^0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathscr{I}|K^0\rangle, \tag{15.90}$$

这里 $\mathscr{I} = CPT$. 由于 $\mathscr{I}$ 的反幺正性，(15.90)导致

$$|K^0\rangle = \mathscr{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\bar{K}^0\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathscr{I}|\bar{K}^0\rangle.$$

现在，我们将讨论一个固定相角 θ 的方便的规定. 在粒子性质表上我们注意到由 K_S^0 到 $\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^0\pi^0$ 的分支比非常接近于 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$. 在 11.4 节中已经提到过，这意味着在 $K_S^0 \to 2\pi$ 的衰变中，末态同位旋的一个好的近似为

$$I_{2\pi} = 0. \tag{15.91}$$

相角 θ 将由对比值

$$R \equiv \frac{\langle (2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid K^0\rangle}{\langle (2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid \bar{K}^0\rangle} \quad \text{实和正} \tag{15.92}$$

的要求* 来决定，根据(15.90)和 CPT 不变的假定，R 的复共轭是

* Wu T T, Yang C N. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:180.

$$R^* = \frac{\langle(2\pi)_{I=0} \mid \mathscr{T}^{-1}\mathscr{I}H_{\mathrm{wk}}\mathscr{T}^{-1}\mathscr{I} \mid K^0\rangle}{\langle(2\pi)_{I=0} \mid \mathscr{T}^{-1}\mathscr{I}H_{\mathrm{wk}}\mathscr{T}^{-1}\mathscr{I} \mid \bar{K}^0\rangle}$$

$$= \frac{\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}}e^{i\theta} \mid \bar{K}^0\rangle}{\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}}e^{i\theta} \mid K^0\rangle} = R^{-1}.$$

于是,(15.92)的要求给出

$$\frac{\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid K^0\rangle}{\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid \bar{K}^0\rangle} = 1. \tag{15.93}$$

这一固定 θ 的特殊方法优点何在? 正如前面已经注意到的,如果在(15.90)中的相角 θ 是任意的,则(15.89)中 α 的实部也将如此;这就是为什么即使 CP 是守恒的,ε 也不需要是 0,只要它是纯虚数就可以. 但是,采用规定(15.92),则由(15.63)和(15.93)我们有

$$\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid L\rangle = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}\langle(2\pi)_{I=0} \mid H_{\mathrm{wk}} \mid K^0\rangle. \tag{15.94}$$

这样,现在对 θ 的选择包含了如果 CP 守恒,由于 K_L^0 不能衰变成 2π, ε 应该是 0;因此,ε 也成了一个表征 CP 破坏的参数.

定理 4. ε 的相角是$\cong 45°$或 $225°$.

证明. 为方便计,让我们首先假定 ε 的大小与其他 CP 破坏参数 η_{+-}, η_{00}和 ξ 差不多;所有这些数都很小$\sim 10^{-3}$. [这一假定以后要撤消.]由(15.89)得出

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = e^{i\alpha},$$

这意味着当 $|\varepsilon| \ll 1$, α 也应当很小. 上式化为

$$2\varepsilon \cong -i\alpha. \tag{15.95}$$

利用(15.68),我们有

$$(M - i\Gamma)_{12} - (M - i\Gamma)_{21} = -i2E\sin\alpha \cong -i2E\alpha. \tag{15.96}$$

根据(15.70),我们知道 $M-i\Gamma$ 的本征值是 $D\pm E$;它们之差是 $\pm 2E$,联合(15.44)给出

$$\pm 2E = m_L - m_S + \frac{1}{2}\mathrm{i}(\gamma_S - \gamma_L).$$

把这一表式代入(15.96)并把它与(15.95)联合起来，我们得到

$$\varepsilon = \frac{\Gamma_{12} - \Gamma_{21} + \mathrm{i}(M_{12} - M_{21})}{\gamma_S - \gamma_L - 2\mathrm{i}(m_L - m_S)}. \tag{15.97}$$

现在，M 是厄米的，因此

$$\mathrm{i}(M_{12} - M_{21}) \text{ 是实数}. \tag{15.98}$$

根据(15.36)和(15.57)就得出

$$\Gamma_{12} = \pi \sum_c p_c \langle K^0 \mid H_{wk} \mid c\rangle\langle c \mid H_{wk} \mid \overline{K}^0\rangle. \tag{15.99}$$

在这个求和中，最重要的道是 $c = (2\pi)_{I=0}$. 对所有其他的道 $c \neq (2\pi)_{I=0}$，求和，

$$\pi \sum_c p_c \mid \langle c \mid H_{wk} \mid K^0 \rangle \mid^2 \lesssim 10^{-4} \mid \gamma_S - \gamma_L - 2\mathrm{i}(m_L - m_S) \mid.$$

因此，在(15.99)中，我们只需要考虑一个道 $c = (2\pi)_{I=0}$；由于(15.93)，一个好的近似是

$$\Gamma_{12} \cong \Gamma_{21} \text{ 实数}. \tag{15.100}$$

由于(15.98)和(15.100)，(15.97)右边的分母是实数；因为 $2(m_L - m_S) \cong \gamma_S \gg \gamma_L$，我们看出

$$\varepsilon \text{ 的相位} \cong 45^\circ \text{ 或 } 225^\circ. \tag{15.101}$$

把这个结果代入(15.88)，我们得到

$$\mid \xi \mid \cong \frac{\sqrt{2}}{1 + \mid \varepsilon \mid^2} \mid \varepsilon \mid.$$

根据 15.3 节定理 3，我们知道 ξ 是一个小的参数，由于幺正性，它有一个上限$\leqslant 6 \times 10^{-3}$. 因此，

$$\mid \varepsilon \mid < 4.3 \times 10^{-3}. \tag{15.102}$$

这就证实了在本证明开始我们所用的假定，即 ε 是一个小数. 定理 4 的证

明于是完成.

由于 $|\varepsilon| \ll 1$, 我们可以略去 $O(\varepsilon^2)$项. 因此(15.63)和(15.88)能够写作

$$|S\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon\end{pmatrix}, \ |L\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon \\ -(1-\varepsilon)\end{pmatrix} \tag{15.103}$$

和

$$\xi = \langle S | L\rangle \cong 2\mathrm{Re}\,\varepsilon. \tag{15.104}$$

下一节中,我们将讨论如何从实验上去决定 ε 和 ξ.

2. K_S^0 或 $K_L^0 \rightarrow \pi^{\mp} + l^{\pm} + \nu_l$ 或 $\bar{\nu}_l$ 采用 K 介子的静止坐标系是很方便的. 令 $\boldsymbol{p}_\pi$, $\boldsymbol{p}_l$ 和 $\boldsymbol{p}_\nu$ 是那个坐标系中 $\pi^{\mp}$, $l^{\pm}$ 和 ν_l(或 $\bar{\nu}_l$)的动量,这里 l= e 或 μ. 因此 $\boldsymbol{p}_\pi + \boldsymbol{p}_l + \boldsymbol{p}_\nu = 0$. 我们定义 f 是动量固定时 $K^0 \rightarrow \pi^- + l_s^+ + \nu_l$ 的第一级弱相互作用衰变幅,下标 $s = \pm\frac{1}{2}$ 表示轻子的螺旋度:

$$f \equiv \langle \pi^- \, l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid K^0 \rangle. \tag{15.105}$$

在 $\mathscr{I} = CPT$ 的作用下,$\pi^{\pm} \rightarrow \pi^{\mp}$, $l_s^{\pm} \rightarrow l_{-s}^{\mp}$, $\nu_l(\bar{\nu}_l) \rightarrow \bar{\nu}_l(\nu_l)$但所有粒子的动量不变;即,

$$\mathscr{I} | \pi^- \, l_s^+ \nu_l \rangle \propto | \pi^+ \, l_{-s}^- \bar{\nu}_l \rangle.$$

因为$|\pi^- \, l_s^+ \nu_l\rangle$和$|\pi^+ \, l_{-s}^- \bar{\nu}_l\rangle$的相对相位还没有固定,我们可以把上面的表示式写作

$$\mathscr{I} | \pi^- \, l_s^+ \nu_l \rangle = e^{i\theta} \, | \pi^+ \, l_{-s}^- \bar{\nu}_l \rangle. \tag{15.106}$$

这里选择 θ 作为在(15.90)式中用过的那同一角度. 因此,根据(15.105)和 CPT 不变的假定,我们有

$$f^* = \langle \pi^+ \, l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid \bar{K}^0 \rangle. \tag{15.107}$$

同样,我们可以定义 $K^0 \rightarrow \pi^+ + l_{-s}^- + \bar{\nu}_l$ 相应的衰变幅为 g:

$$g = \langle \pi^+ \, l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid K^0 \rangle. \tag{15.108}$$

利用(15.90)和(15.106),我们得到

$$g^* = \langle \pi^- \, l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid \bar{K}^0 \rangle. \tag{15.109}$$

在这些反应中,我们可以定义 Q 和 S 只是强子的电荷和奇异数,并且

$$\Delta Q = Q_{末} - Q_{初},$$
$$\Delta S = S_{末} - S_{初}, \tag{15.110}$$

这里下标表示初态和末态. 因此 f, f^*, g 和 g^* 代表的反应幅满足

$$f:\Delta S = \Delta Q = -1,$$
$$f^*:\Delta S = \Delta Q = 1,$$
$$g:\Delta S = -\Delta Q = -1,$$
$$g^*:\Delta S = -\Delta Q = 1. \tag{15.111}$$

正如第 21 章中将要讨论的,有很好的理由相信所有第一级的弱过程应当满足

$$\Delta S = \Delta Q. \tag{15.112}$$

但是,目前我们将进行分析而不附带这一要求. 定义

$$x = g^*/f. \tag{15.113}$$

因为 f 和 f^* 满足选择规则 $\Delta S = \Delta Q$, 但 g 和 g^* 则否,对于实验上决定这个选择规则的真实有效性,参数 x 是有用的.

可以通过 15.4 节所讨论的干涉现象对参数 x 和 ξ 加以测量. 让我们假定有一束 K$-\overline{\mathrm{K}}$ 束流,它在固有时刻 τ 的态矢 $|\tau\rangle$ 由(15.84)给出. 为确定起见,我们可以考虑道 $c=\pi^- l_s^+ \nu_l$ 和 $\pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l$. 由(15.85),我们知道 $|\tau\rangle$ 衰变到这些道的衰变率能够分解成三个不同的与时间有关的项,因此

$$\gamma_S(c) = 2\pi\rho_c \mid \langle c \mid H_{wk} \mid S\rangle \mid^2,$$
$$\gamma_L(c) = 2\pi\rho_c \mid \langle c \mid H_{wk} \mid L\rangle \mid^2,$$

和干涉项的系数

$$\sqrt{\gamma_S(c)\gamma_L(c)}\,e^{i\phi_c} = 2\pi\rho_c\langle c \mid H_{wk} \mid S\rangle^* \langle c \mid H_{wk} \mid L\rangle \tag{15.114}$$

都能在实验上加以测定. 利用(15.103), (15.105)和(15.107)—(15.109),我们发现

$$\langle \pi^- l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid L\rangle = 1/\sqrt{2}[(1+\varepsilon)f - (1-\varepsilon)g^*],$$

$$\langle \pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid L \rangle = 1/\sqrt{2}[(1+\varepsilon)g-(1-\varepsilon)f^*],$$

$$\langle \pi^- l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid S \rangle = 1/\sqrt{2}[(1+\varepsilon)f+(1-\varepsilon)g^*],$$

$$\langle \pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid S \rangle = 1/\sqrt{2}[(1+\varepsilon)g+(1-\varepsilon)f^*]. \quad (15.115)$$

这些式子和(15.113)联合起来导致

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_L(\pi^- l_s^+ \nu_l)}{\gamma_L(\pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l)} &= \left|\frac{(1+\varepsilon)f-(1-\varepsilon)g^*}{(1+\varepsilon)g-(1-\varepsilon)f^*}\right|^2 \\ &= \left|\frac{1+\varepsilon-(1-\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)x^*-(1-\varepsilon)}\right|^2 \\ &= \left|\frac{1-x+\varepsilon(1+x)}{x^*-1+\varepsilon(x^*+1)}\right|^2 \\ &= \left|\frac{1-x}{x^*-1}\right|^2\left[1+(\varepsilon+\varepsilon^*)\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^*}{1-x^*}\right)+O(\varepsilon^2)\right] \\ &= 1+4\mathrm{Re}\,\varepsilon\,\frac{1-|x|^2}{|1-x|^2}+O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15.116)$$

用相似的方法我们能够得到

$$\frac{\gamma_S(\pi^- l_s^+ \nu_l)}{\gamma_S(\pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l)} = 1+4\mathrm{Re}\,\varepsilon\,\frac{1-|x|^2}{|1+x|^2}. \quad (15.117)$$

由(15.114),我们知道通过干涉项可以测量

$$\begin{aligned}&\langle \pi^- l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid S \rangle^* \langle \pi^- l_s^+ \nu_l \mid H_{wk} \mid L \rangle \\ &\propto \left(1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}x\right)^*\left(1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}x\right) \\ &= [1+x^*-x-|x|^2+O(\varepsilon)] \end{aligned} \quad (15.118)$$

和

$$\begin{aligned}&\langle \pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid S \rangle^* \langle \pi^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_l \mid H_{wk} \mid L \rangle \\ &\propto \left(1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}x^*\right)^*\left(1-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}x^*\right) \\ &= [1+x-x^*-|x|^2+O(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (15.119)$$

因此(15.118)和(15.119)与 x 的虚部灵敏地相关,而(15.116)—

(15.117)能够被用来决定 ε 和 x 的实部. 正如粒子性质表中所列出的,实验结果是

$$\mathrm{Re}\,x = 0.009 \pm 0.020,\ \mathrm{Im}\,x = -0.004 \pm 0.026, \tag{15.120}$$

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = (1.621 \pm 0.088) \times 10^{-3}. \tag{15.121}$$

因而

$$\xi = 2\mathrm{Re}\,\varepsilon = (3.242 \pm 0.176) \times 10^{-3}. \tag{15.122}$$

由(15.120)我们知道 x 与 0 一致,这支持了定则 $\Delta S = \Delta Q$. 令 $x = 0$, 我们注意到(15.116)和(15.117)的比值变成与轻子的螺旋性无关,因此我们有

$$\frac{\text{衰变率}(\mathrm{K}_\mathrm{L}^0 \to \pi^- \mathrm{l}^+ \nu_\mathrm{l})}{\text{衰变率}(\mathrm{K}_\mathrm{L}^0 \to \pi^+ \mathrm{l}^- \bar{\nu}_\mathrm{l})} \cong 1 + 4\mathrm{Re}\,\varepsilon$$

和 (15.123)

$$\frac{\text{衰变率}(\mathrm{K}_\mathrm{S}^0 \to \pi^- \mathrm{l}^+ \nu_\mathrm{l})}{\text{衰变率}(\mathrm{K}_\mathrm{S}^0 \to \pi^+ \mathrm{l}^- \bar{\nu}_\mathrm{l})} \cong 1 + 4\mathrm{Re}\,\varepsilon.$$

正如在第 9 章方程式(9.3)所强调过的,这两个比值不等于 1 这个事实,对 C 和 CP 的破坏是一个最直接的证明. 把(15.86)与(15.101)和(15.121)相比较,我们发现

$$\eta_{+-} \cong \eta_{00} \cong \varepsilon. \tag{15.124}$$

如果这三个参数实际上变为相等以及考虑到 $\xi = 2\mathrm{Re}\,\varepsilon$, 就表明所有这些 CP 不守恒的参数能够用一个数 ε 来表示. 因此,很重要的是,需要了解式(15.124)的近似是否足够地好.

15.7 对称破坏的互补性

考虑宇称不守恒的情况. 我们知道有很多实验的证明确立了物理定律的左右不对称. 在我们的讨论中,到现在为止,我们一直把强作用和电磁作用当作是宇称守恒的,而把弱作用当作宇称不守恒的. 在这一节中,

我们将提出一个问题:是否这样的一种归属真正是基本的,或者仅仅为了方便,或者是一种惯例?

首先,让我们分析一个逻辑观点,那是在大多数讨论对称破坏的文献中所含糊敷衍过去了的.通常对宇称不守恒的讨论,总是先引入一个宇称算符 P 和一个哈密顿算符 H,于是证明它们的对易子

$$[H,\ P] \neq 0, \tag{15.125}$$

由此达到这个结论,即宇称是不守恒的.重要的是要认识到在这个过程中有一个不自洽的地方.为了说明这一点,让我们回忆在量子场论中 P 是希尔伯特空间中的一个幺正算符.按定义,这个算符 P 应当代表坐标空间中的空间反射变换,

$$P: \boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r},\ t \to t.$$

根据海森伯方程(1.9),时间平移算符是

$$e^{-iH\tau}: \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} \quad t \to t+\tau.$$

数学上,我们可以定义庞加莱群是由所有时空平移,洛伦兹变换,空间反射和时间反演所组成.这些纯粹是几何变换;它们的存在与动力学无关.很明显,在庞加莱群中,空间反射元素,$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ 是与时间平移元素 $t \to t+\tau$ 相对易的.另一方面,如果在希尔伯特空间中相应的算符满足 $[H,\ P] \neq 0$,那将意味着时间平移算符 $e^{-iH\tau}$ 和指定的空间反射算符 P 不遵从由它们所表示的坐标变换的乘法律.这样,算符 P 首先就不能成为空间反射在希尔伯特空间的表示,宇称不守恒这一事实意味着在希尔伯特空间中不可能找到一个幺正算符 P,用它能表示几何学上的空间反射变换;换言之,P 算符**无法定义**.

但是,在对 H 取某种近似以后,就有可能给出 P 的定义来.譬如,我们可以用

$$H \cong H_{st} + H_{\gamma} \tag{15.126}$$

或

$$H \cong H_{wk}, \tag{15.127}$$

来代替总的哈密顿算符.因而在这样一种近似下,可以定义宇称算符 P,

它与近似的哈密顿算符相对易. 这样,选择不同的动力学近似导致不同的宇称算符.

为了表明宇称算符与相互作用相依赖的性质,让我们再一次考虑θ-τ之谜

$$\mathrm{K}^+ \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \pi^0 & (\theta\text{- 模式}) \\ \pi^+ \pi^0 \pi^0 & (\tau\text{- 模式}). \end{cases} \tag{15.128}$$

因为从达利兹图上我们知道在 τ 模式中的三个 π 介子主要是在 S 态,所以末态 θ 和 τ 模式的宇称满足

$$\text{宇称}(\tau) = \text{宇称}(\theta) \cdot \text{宇称}(\pi^0). \tag{15.129}$$

由强 πN 相互作用已经决定了 π 介子是赝标量;通过对 π^0 的电磁衰变

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \rightarrow 2\mathrm{e}^+ + 2\mathrm{e}^-$$

的研究也得到了同样的结论. 这样,利用 $H_{\mathrm{st}} + H_\gamma$ 我们发现

$$\text{宇称}(\pi^0) = -1. \tag{15.130}$$

因此,(15.129)和(15.130)包含了通常的结论

$$\text{宇称}(\tau) = -\text{宇称}(\theta).$$

由于 K$^+$的衰变是一个弱过程,这意味着 H_{wk}并不保持宇称不变;这里的宇称是由 $H_{\mathrm{st}} + H_\gamma$ 所定义的.

另一方面,让我们想像强和电磁相互作用两者都能被关掉. 于是我们可以试图通过弱过程来决定宇称. 弱作用是宇称守恒的这一要求在 K$^+$ 衰变的情况下就意味着

$$\text{宇称}(\tau) = \text{宇称}(\theta).$$

同此

$$\text{宇称}(\pi^0) = +1.$$

现在,再引入强和电磁相互作用,我们将得出结论说,在 π-N 散射中,强的 p 态相互作用和 π^0 的电磁衰变中光子的极化破坏了宇称守恒,这里的宇称现在是由 H_{wk}决定的,同样,如果没有强和电磁相互作用,在弱衰变

$\pi \to \mu\nu$ 中有两种中微子，一种右旋，另一种左旋，这一事实本身完全符合左右对称.

在真实情况下，自然不可能关掉任何一种相互作用，不管它是 $H_{st}+H_\gamma$ 或者是 H_{wk}，但是，由于 $H_{st}+H_\gamma$ 的矩阵元一般比 H_{wk} 的要大得多，采用近似 $H \cong H_{st}+H_\gamma$ 就更加方便些，只有这时我们才把 H_{wk} 当作是宇称破坏的. 对于本章中我们所讨论的 CP 和 T 破坏也有相同的含意.

15.8 CP 不守恒相互作用的唯象分析

常常可能把总的哈密顿 H 分解成两部分

$$H = H_+ + H_-, \tag{15.131}$$

这里

$$H_\pm = \frac{1}{2}[H \pm CPHP^\dagger C^\dagger]. \tag{15.132}$$

因此，在 CP 的作用下，H_+ 是偶的而 H_- 是奇的. 按照上面的讨论，利用强和电磁相互作用来定义 CP 算符是很方便的.

目前，所有我们已知的现象都符合这一观点，即弱相互作用中 CP 破坏的 H_- 要比通常 CP 守恒部分弱得多. 在唯象的分析中，H_- 是否应该或不应该属于 H_{wk} 的整体的一部分并不重要. 下面，为方便计，我们将把 H_- 从 H_{wk} 分出；因此，H_{wk} 只代表 CP 守恒部分. 关于 H_- 的强度有两种主要可能的分类：

1. *毫弱作用*　这是很显然的一种情况，典型的做法是假定

$$\frac{H_-}{H_{wk}} \sim |\varepsilon| \sim 10^{-3}, \tag{15.133}$$

这里 ε 是前面给出的 CP 破坏的参数，利用(15.47)，我们有

$$\frac{H_-}{H_{st}} \sim 10^{-7}|\varepsilon| \sim 10^{-10}. \tag{15.134}$$

由于(15.46)—(15.48),我们得到的结论是

$$\langle K^0 \mid H_- \mid \overline{K}^0 \rangle = 0; \tag{15.135}$$

否则,质量矩阵的对角化将导致质量差 $\Delta m = m_L - m_S \sim H_- \sim 10^{-10} H_{st} \sim 10^{-10} m_K$, 这与(15.46)不符.

为了保证(15.135),最简单的方法是假定 H_-,像 H_{wk}一样,满足选择规则 $\Delta S \neq \pm 2$.

2. *超弱作用* 在这个情况 * 下,人们假定

$$\frac{H_-}{H_{wk}} \sim 10^{-7} |\varepsilon| \sim 10^{-10}, \tag{15.136}$$

并且,代替(15.135)的是

$$\langle K^0 \mid H_- \mid \overline{K}^0 \rangle \neq 0; \tag{15.137}$$

即对于 H_-而言 $\Delta S = \pm 2$ 是容许的[当然,通常的 H_{wk}继续满足 $\Delta S \neq \pm 2$ 的规则.]因为根据(15.47),对于 $\Delta S = \pm 1$, $(H_{wk}/H_{st}) \sim 10^{-7}$,在超弱作用的情况下,我们有

$$\frac{H_-}{H_{st}} \sim 10^{-14} \mid \varepsilon \mid. \tag{15.138}$$

由于(15.137), CP 破坏参数$|\varepsilon| \sim 10^{-3}$进入到态矢$|L\rangle$和$|S\rangle$中去.

存在这两种完全不同的可能性的理由是由于在中性 K 介子的衰变中,衰变矩阵元是 H_{wk}的第一级,而态矢 K_L^0 和 K_S^0 依赖于弱相互作用的第二级. 因此,H_-既可能是$\sim \varepsilon H_{wk}$也可能是$\sim \varepsilon H_{wk}^2/H_{st}$;前者是毫弱作用,后者是超弱作用.

就中性 K 介子而言,主要的矩阵元是 $I = 0$ 道中 2π 的矩阵元;因为它由一个惟一的末态组成,衰变矩阵 Γ 实质上是实的,正如(15.100)所表明的一样. 而且,除了 2π 道之外,没有其他的衰变矩阵元曾经被测量到超过 10^{-3}的精确度. 这就说明为什么在中性 K 介子的衰变中,所有已知

---

* Wolfenstein L. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:562; Lee T D, Wolfenstein L. *Phys Rev*, 1965, **138 B**:1490.

的 CP 破坏现象能够用一个惟一的参数 ε 表征.

如果 H_- 是超弱作用,则任何 CP 破坏跃迁幅应当是 $\sim 10^{-10}$ 乘上相应的 CP 守恒的弱作用幅;在目前要探测到这样一种小的振幅几乎是不可能的. 另一方面,如果 H_- 是毫弱作用,则只需要测量 K 或 Λ^0,或……的某些合适的衰变幅精确到 $\sim 10^{-3}$,这还有几分希望. 一个有指望的可能性是去测量譬如说中子的电偶极矩 ed_n. 根据(15.136),在毫弱作用的情况下,由于 $H_- \sim 10^{-10} H_{st}$ 我们期望代表性的结果为

$$d_n \sim 10^{-10} m_n^{-1} \sim 10^{-24} \text{ cm}.$$

如果是超弱作用,则

$$d_n \sim 10^{-17} m_n^{-1} \sim 10^{-31} \text{ cm}.$$

目前的实验极限是 *

$$d_n < 3 \times 10^{-24} \text{ cm},$$

与两种可能性都相符.

习题 15.1. 在 $\mathrm{K} \to 3\pi$ 的衰变中

(i) 证明达利兹图的边界由下式给出

$$r \leqq r_0(\theta),$$

这里

$$r_0^2 = (1+\varepsilon)^{-1}(1 - \varepsilon r_0^3 \cos 3\theta),$$

$$\varepsilon = (2m_{\mathrm{K}} - Q)^{-2}(2Qm_{\mathrm{K}}).$$

(ii) 证明对于不同的电荷态,$\pi^\pm\pi^\pm\pi^\mp$, $\pi^\pm\pi^0\pi^0$, $\pi^0\pi^0\pi^0$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^0$,在 Δm_π 的一级近似下,它们各自的相空间之比由所对应的值之比所给出.

$$\Omega = (1+\varepsilon)^{-1} Q^2.$$

(iii) 假定 $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ 规则成立,证明在 $\mathrm{K}^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$, $\mathrm{K}^+ \to$

---

* Dress W B, Miller P D, Pendlebury J M, Perrin P, Ramsay N F. *Phys Rev*, 1977, **D 15**:9.

$\pi^0\pi^0\pi^+$, $K_L^0\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $K_L^0\to 3\pi^0$ 中,(宽度/Ω)的比是 4∶1∶2∶3,而相应的斜率 λ 之比 * 是 1∶−2∶−2∶0.

(iv) 把这些理论的预言和现在实验的结果加以比较.

[看一下 *Ann Rev Nucl Sci*, 1966, **16**:471, T. D. Lee(李政道)和 C. S. Wu(吴健雄)所写的评论文章和在那里提到的参考文献].

---

* Weinberg S. *Phys Rev Lett*, 1960, **4**:87.

第16章　真空作为不对称之源

16.1　什么是真空？

在上一个世纪，为了了解电磁力（后来是电磁波）怎样能够在空间传递，曾经把真空看成是一种介质，叫做以太. 法拉第在他的实验研究 3075 记录上写着*

> 就我自己来说，考虑到直空与磁力以及磁铁外部磁现象一般特性的关系，我更加倾向于这个概念，那就是在磁铁外部在力的传递上存在着这样一种作用，而不仅仅是超距的吸引和排斥效应. 这样一种作用可以是以太的一种功能；因为那不是完全不可能的，如果以太存在，它应该有另外一些功能而不只限于辐射的传播.

但是，由于在那时候，非相对论的牛顿力学是惟一可资利用的力学，真空被想像为提供了一个绝对的标架，通过对光速的测量可以把这个标架同其他运动的标架区分开来. 众所周知，这导致了以太的没落和相对论的兴起.

现在，我们知道真空是洛伦兹不变的，这就是说公转和参考系的变换不会改变真空. 但是洛伦兹不变性并不包括一切物理特征. 我们仍然可以问：这个真空态是什么？

在现代的处理中，我们定义真空为系统的最低能量状态. 它的 4 动量是零. 在多数的量子场理论中，真空只是被用来使我们能够在数学上建立一个希尔伯特空间. 我们从真空态造出单粒子态，接着双粒子态……；希

---

* Faraday M. Experimental Researches in Electricity. London R, Taylor J E. 1839.

望由此形成的希尔伯特空间最后像我们的宇宙. 根据这种逼近的方法,不同的真空意味着不同的希尔伯特空间,因而是不同的宇宙.

根据狄拉克的空穴理论,我们知道真空虽然是洛伦兹不变的,但实际上是很复杂的. 一般说来,我们可以期望真空复杂到像在 4 动量零极限的自旋为 0 的 $\phi(x)$ 场:

$$\text{真空} \sim \phi \quad \text{在 4 动量 } k_\mu = 0 \text{ 时} \tag{16.1}$$

可以想像真空态像一种自旋为 0 的场一样可以携带量子数,例如同位旋 $\boldsymbol{I}$,宇称 P,奇异数 S,等等. 在这里我们可以问:能够把真空看作一种物理介质吗? 如果在适当的条件下真空的性质像任何介质的性质一样,能够物理地加以改变,则答案是肯定的. 否则就会成为一句空话. 下面给出的分析将原始地基于近代物理学上两个最值得注意的现象:

(i) 逸失对称,

(ii) 夸克禁闭.

前者现在就将讨论,后者在下一章中讨论.

16.2 逸失对称

假如我们合计一下一切物质的对称量子数,例如 $\boldsymbol{I}$, S, P, C, …,我们发现这些数总要不断地改变

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{I} \\ S \\ P \\ C \\ CP \\ \vdots \end{matrix}\right\}_{\text{物质}} \neq 0. \tag{16.2}$$

从审美学上看,这令人困惑. 为什么自然要抛弃完美的对称性呢? 从物理学上看,这也似乎是神秘的. 这些逸失量子数是怎么回事? 它们到哪里去了? 难道物质不能单独构成一个闭合的系统吗? 如果我们把真空也包括进去,则对称也许可以得到恢复

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{I} \\ S \\ P \\ C \\ CP \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\text{物质+真空}} = 0. \tag{16.3}$$

作为一种记账的方式,这显然是可能的. 它也构成了由南部(Y. Nambu)和其他诸人 * 所发展的自发对称破缺这个重要题目的概念的基础. 在这样一个机构中,人们总是假定存在有某种唯象的自旋为 0 的场 ϕ,它能携带逸失量子数并且它的真空期望值不是零:

$$\phi_{\text{真空}} \equiv \langle \text{vac} \mid \phi \mid \text{vac} \rangle \neq 0. \tag{16.4}$$

因此,观测到的不对称能够完全被归于我们宇宙的态矢,而不是物理定律. [后面将举出一些例子]. 另一方面,除非我们有另外的链环连接着真空和物质,我们怎能相信这个概念是对的而不仅是一种同义反覆?

摆脱这一困境的一条出路是要认识到在(16.1)中,对真空态的限制 $k_\mu = 0$ 只是数学上的一种理想化. 归根到底,很可能宇宙的半径是有限的,因而 k_μ 决不是严格为零. 就粒子物理的微观体系而言,在 $k_\mu = 0$ 和 k_μ 近似为 0 之间有一点小的差别;后者对应于在一个大的时空范围内只有很慢变化的态. 这意味着如果由(16.4)所表达的概念是正确的,则在适当的条件下,我们必定能够在真空中产生激发,或畴结构. 在这样一种激发态中存在有一个体积 Ω. 它的大小≫相应的微观容积;在 Ω 之内,我们有期望值 $\langle\phi(x)\rangle \neq \phi_{\text{真空}}$,但在 Ω 之外 $\langle\phi(x)\rangle = \phi_{\text{真空}}$. 于是在 Ω 之内的对称性质能够和外面的有所不同.

16.3 真空激发

我们怎样才能产生 $\langle\phi(x)\rangle$ 的这样一种变化呢? 这个问题和在磁铁

---

* 对于这个问题的历史,可看 Nambu Y. *Fields and Quanta*, 1970, **1**:33.

中畴结构的形成问题相似. 我们可以抽出它们的共同点来：

$$\langle\phi(x)\rangle \leftrightarrow \text{磁自旋}$$

$$J = \text{物质源} \leftrightarrow \text{磁场}$$

如图 16.1 所示.

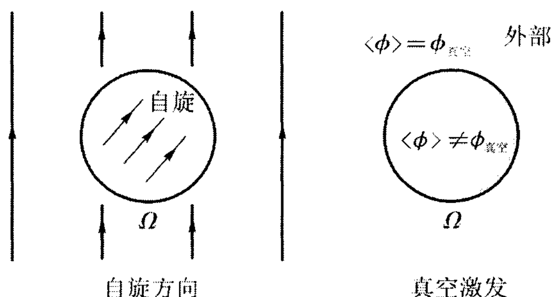


图 16.1　磁铁中的畴结构与真空中的相比较

在磁铁非常大的情况下，由于自旋与磁场的线性相互作用，畴结构能够通过在大范围内施加一个外磁场而建立起来. 而且，在磁畴一旦建立之后，我们可以撤去外场；依靠长程力，表面能和其他因素，甚至在外磁场撤除以后，磁畴依然能维持下来. 与此相似，在一个大的容积中施加任何一种与 $\phi(x)$ 有线性相互作用的物质源 J，我们可以希望能够建立 * 一种 $\langle\phi(x)\rangle$ 的畴结构. 依靠动力学理论，甚至在物质源撤除以后，这样的畴仍然可以作为物理上的实体而保存下来.

作为一个例子，我们可以考虑一个定域的标量场理论. 拉氏量密度是

$$\mathscr{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right) - U(\phi), \tag{16.5}$$

这里 U 的绝对极小是在 $\phi=\phi_{真空}$ 处并有 $U(\phi_{真空})=0$，因为我们感兴趣的是场的长波长极限，标量场 $\phi(x)$ 只用作唯象的描述，它的微观结构的详细情况，我们并不考虑.

现在，让我们引进外源 $J(x)$. 最简单的例子是假定 J 在一个大的体

---

* Lee T D, Wick G C. *Phys Rev*, 1974, **D9**:2291.

积Ω 内是常数,而在体外是零. 对于一个充分大的 Ω,我们可以略去表面能. 系统的能量变为

$$[U(\phi)+J\phi]\Omega. \tag{16.6}$$

它的极小决定了在 Ω 内 ϕ 的期望值. 图 16.2 表明新的期望值

$$\bar{\phi}=\langle\phi(x)\rangle$$

是怎样能够在 J 的影响下改变的.

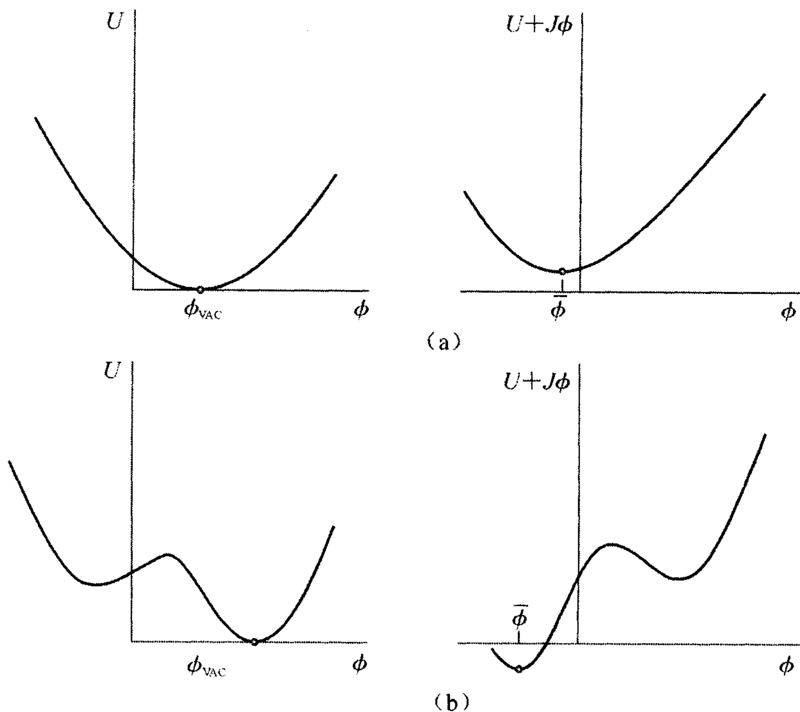


图 16.2 由一个外加的常数物质源 J 所引起的 $\bar{\phi}=\langle\phi(x)\rangle$ 的变化. 在情况(a) 中 $\bar{\phi}$ 随 J 连续改变. 在情况(b) 中,当 J 增加时,有一个临界值,在那个值上,$\bar{\phi}$ 产生跃变

如果逸失对称是由于 $\phi_{\text{真空}}\neq 0$, 则改变 $\bar{\phi}$ 就可以在 Ω 内部改变对称的动力学性质. 当然,要做一个真实的实验来恢复我们逸失的对称并不容易. 但理论家有特权去希望会有这样的一天.

16.4　*CP* 不守恒和自发对称破缺

在这里我们讨论一个最简单的例子,它表明了自发对称破缺现象.我们的目的是要给出一个理论*,其中

(i) 拉氏量具有 CP 和 T 的不变性,

但(ii) 它的 S 矩阵违反 CP 和 T 对称.

让我们假定系统是由一个自旋$\frac{1}{2}$的狄拉克场和一个自旋0的厄米场所组成.拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2 - U(\phi) - \psi^\dagger\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi - \mathrm{i}g\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5\psi\phi, \tag{16.7}$$

这里

$$U(\phi) = \frac{1}{8}\kappa^2(\phi^2 - \rho^2)^2. \tag{16.8}$$

由厄米性得出参数 m, g, ρ 和 κ 必须是实的.很容易证明 $\mathscr{L}$ 在 T, C 和 P 作用下不变,这里

$$T\phi(\boldsymbol{r}, t)T^{-1} = -\phi(\boldsymbol{r}, -t), \tag{16.9}$$

$$C\phi(\boldsymbol{r}, t)C^{-1} = \phi(\boldsymbol{r}, t), \tag{16.10}$$

和

$$P\phi(\boldsymbol{r}, t)P^{-1} = -\phi(-\boldsymbol{r}, t). \tag{16.11}$$

相应的 ψ 的变换由(10.5),(10.9)和(13.53)给出.由于 U 是 ϕ 的四次方多项式,这个理论是可以重正化的.

ϕ 的真空期望值是由 $U(\phi)$ 的极小值所决定.如图(16.3)所示,我们既可以有

---

* Lee T D. *Physics Reports*, 1974, **9C**:143.

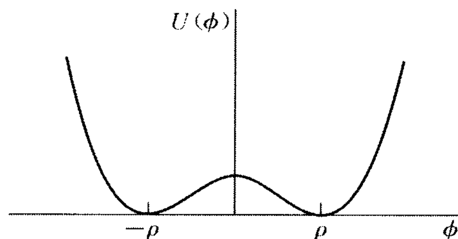


图 16.3 势能密度 $U(\phi)=\frac{1}{8}\kappa^2(\phi^2-\rho^2)^2$

$$\langle\phi\rangle_{\text{真空}}=\rho>0, \tag{16.12}$$

也可以有 $\langle\phi\rangle_{\text{真空}}=-\rho$. 无论是哪种情况,由于 ϕ 属于 $T=-1$, $CP=-1$ 和 $P=-1$, ϕ 的期望值不为零意味着真空态不是 T 的本征态(也不是 CP 和 P 的本征态). 拉氏量的 T 对称性要求如果 $\langle\phi\rangle_{\text{真空}}=\rho$ 是一个解,则 $\langle\phi\rangle_{\text{真空}}=-\rho$ 也必须是一个解. 在 T 的作用下这两个解互相变换,但它们本身在 T 的作用下不是不变的(在 CP 和 P 的作用下也不是不变的,虽然在 C 和 CPT 的作用下是不变的).

由于量子效应,ϕ 场在它真空期望值的附近起伏涨落. 我们可以选择 $\langle\phi\rangle_{\text{真空}}=\rho$, 并把 ϕ 写作

$$\phi=\rho+\delta\phi.$$

利用 $\delta\phi$,位势 U 变为

$$U=\frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi)^2+\frac{1}{2}\kappa^2\rho(\delta\phi)^3+\frac{1}{8}\kappa^2(\delta\phi)^4, \tag{16.13}$$

这里 $\mu=\kappa\rho$, 它是涨落场 $\delta\phi$ 的质量.

为了更清楚地表现这个解的 T 破坏的性质,我们可以作一个幺正变换,在这个变换下 ϕ 不变,但

$$\psi\rightarrow e^{-i\frac{1}{2}\gamma_5\alpha}\psi. \tag{16.14}$$

因此,二次式

$$\begin{aligned}\psi^\dagger\gamma_4\psi\rightarrow\psi^\dagger e^{\frac{1}{2}i\gamma_5\alpha}\gamma_4 e^{-\frac{1}{2}i\gamma_5\alpha}\psi&=\psi^\dagger\gamma_4 e^{-i\gamma_5\alpha}\psi\\&=\psi^\dagger\gamma_4(\cos\alpha-i\gamma_5\sin\alpha)\psi\end{aligned}$$

和

$$i\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5\psi \to i\psi^\dagger e^{i\frac{1}{2}\gamma_5\phi}\gamma_4\gamma_5 e^{-i\frac{1}{2}i\gamma_5\alpha}\psi$$
$$= i\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5 e^{-i\gamma_5\alpha}\psi$$
$$= \psi^\dagger\gamma_4(\sin\alpha + i\gamma_5\cos\alpha)\psi.$$

因而，通过选择

$$\tan\alpha = g_\rho/m, \tag{16.15}$$

我们有

$$\psi^\dagger\gamma_4(m + ig\rho\gamma_5)\psi \to \psi^\dagger\gamma_4 M\psi, \tag{16.16}$$

这里

$$M = (m^2 + g^2\rho^2)^{1/2}. \tag{16.17}$$

把(16.14)代入(16.7)，我们发现拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 变为

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi\right)^2 - U - \psi^\dagger\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\psi$$
$$- g\,\psi^\dagger\gamma_4(\sin\alpha + i\gamma_5\cos\alpha)\psi\delta\phi. \tag{16.18}$$

因为算符 $\psi^\dagger\gamma_4\psi$ 是属于 $P=1$, $C=1$ 和 $T=1$，而算符 $i\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5\psi$ 属于 $P=-1$, $C=1$ 和 $T=-1$，任何 $\delta\phi$ 量子的交换都将引起这两个算符的一个干涉项，它会破坏 T, P 和 CP；而乘积对称 CPT 仍然不变. 图 16.4 给出这样一个干涉项的例子，它的振幅是

$$A_- = g^2\sin\alpha\cos\alpha(k^2 + \mu^2)^{-1}, \tag{16.19}$$

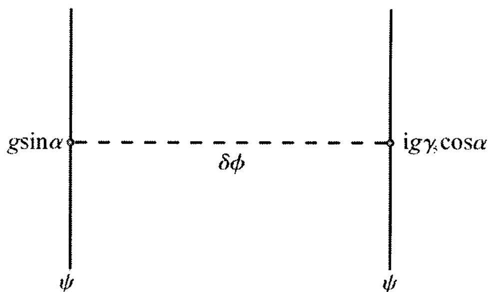


图 16.4　由于 $\delta\phi$ 的量子交换而产生的 T 破坏的散射图，这里 $\delta\phi \equiv \phi - \langle\phi\rangle_{真空}$

这里 k 表示 4 动量转移.

这一节所讨论的模型表明了一个自发 T 破坏的基本机理[同样的讨论可用于 CP 和 P]. 人们假定系统的基态(叫做真空)有一个不为零的期望值$\langle\phi\rangle_{真空}$,这里 ϕ 是一个 $T=-1$ 的唯象的自旋 0 的场; 这样,在 T 变换下,真空不是不变的,虽然拉氏量满足 T 不变性.

拉氏量的 T 不变性意味着真空有一个二度的简并. 考察一下图 16.3 中这两个简并解: $\langle\phi\rangle_{真空}=\rho$ 和 $-\rho$ 之间位垒的穿透是很有趣的. 把整个系统用一个周期性的边界条件在一个有限的体积内封闭起来,我们可以将 ϕ 用通常的傅氏级数展开

$$\phi = q + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\phi_k e^{\cdot ik\cdot r}, \tag{16.20}$$

这里 q 与 $\boldsymbol{r}$ 无关. 把这个式子代入(16.7),我们发现

$$L = \int \mathscr{L} d^3 r = \frac{1}{2}\dot{q}^2\Omega - U(q)\Omega + \cdots$$

这里…依赖于 ϕ_k 和费米场 ψ. 位垒穿透幅可以粗略地只考虑 q 自由度来加以估计. 我们可以令 $\phi_k=0$ 和 $\psi=0$. 于是哈密顿变为

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}}p^2 + U(q)\Omega, \tag{16.21}$$

这里 $p=\Omega\dot{q}$. 根据量子力学中的 W. K. B. 近似方法,位垒穿透幅是

$$\sim \exp\left\{-\Omega\int_{-\rho}^{\rho}[2U(q)]^{1/2}dq\right\}, \tag{16.22}$$

它在系统的体积趋向于无穷大时,指数性地趋近于零.

由(16.17)我们知道,当 ϕ 的期望值从 0 变到 $\langle\phi\rangle_{真空}=\rho$, 费米子的质量从 m 变到 M. 同样,CP 破坏幅 A_-也与$\langle\phi\rangle_{真空}$有关. 因此,如果我们按照 16.3 中的讨论用一个物质源 J 作用在一个大的体积 Ω 内,我们可以在 Ω 内部改变$\langle\phi\rangle$,从而改变了粒子的质量和对称破坏幅.

说明. 上面的例子表明了自发对称破缺机理的要点. 拉氏量在某一群 $\mathscr{G}$ 的对称变换下不变. 但真空态则不,那就产生了对称破坏现象. 把 $\mathscr{G}$ 作用于真空态,必然会生成另一个与真空成简并的态. 在一个真实的宇宙

模型中,可以期望宇宙的体积 Ω 是有限的. 一般说来,这些不同的“真空”之间将会有不为零的,但是很小的,位垒穿透幅. 它能解除简并. 虽然这些效应在演化到我们现阶段是能够保证可以被忽略的,但在非常早的时期当 Ω 还在微观大小的时候,它们可能是很重要的.

在第 22 章中,我们将进一步讨论把自发对称破缺机理应用于不同的连续对称群.

第17章 夸克禁闭

目前有大量的支持证据表明,强相互作用的基础理论是量子色动力学(QCD),而弱和电磁相互作用是通过一个适当的具有自发对称破缺机理的非阿贝尔规范理论统一起来的.对于这两种情况还缺乏决定性的实验证明.因此主要的动机仍然停留在审美学上.虽然如此,我们将会看到,QCD和弱-电磁相互作用统一的理论模型已经能够把一大批不同的现象加以说明和联系起来,这足够说服人们相信它们是基本正确的.

17.1 问题

在第12章中我们提到过,根据强子谱,有很好的理由相信所有的强子是由夸克组成的,它们的味是上(u),下(d),奇(s),粲(c)和底(b),而且,每种味夸克有三种不同的颜色.它们被假定的质量和电荷是

	u	d	s	c	b
质量	∼0	∼0	∼100 MeV	∼2 GeV	∼5 GeV
电荷/e	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$.

考虑到没有一种夸克曾经以自由的形式被观测到,这些指定值是很令人惊讶的.一个达到这些结论的较为直接的方法,就是现在我们将要讨论的通过 e^+e^- 碰撞中 R-值的测量.让我们考虑 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 和 $q\bar{q}$的图,如图17.1所示.这两种反应的阈能分别是 $2m_\mu$ 和 $2m_q$.当质心能量 E_{cm} 比阈能大很多,并且若我们略去 $q\bar{q}$对之间的强相互作用,这两种反应的截面之比是

$$\frac{\sigma(e^+e^-\to q\bar{q})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)}=3Q_q^2 \tag{17.1}$$

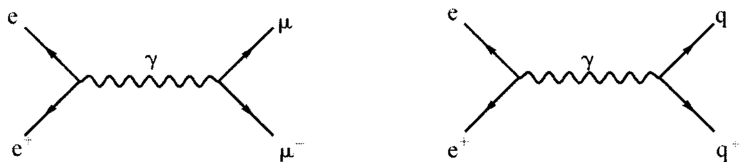


图 17.1 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 或 $q\bar{q}$ 的图

这里 q 代表夸克的味，它可以是 u, d, s, …, Q_q 是与它相应的以 e 为单位的电荷，而因子 3 是由于每一种味的三种颜色. 我们定义

$$R \equiv \frac{\sum_q \sigma(e^+e^- \to q\bar{q} \to \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

这里求和遍及那些质量 $m_q < \frac{1}{2}E_{cm}$ 的所有夸克. 利用(17.1)，我们有

$$R \cong 3\sum_q Q_q^2. \tag{17.2}$$

实验结果* 在图 17.2 中纲要性地画出，它与理论的期望相符. 当 $E_{cm} < 2m_c$，但 > 1 GeV，后者是假定比 $2m_u$、$2m_d$ 和 $2m_s$ 大得多的值，我们有

$$R \cong 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2,$$

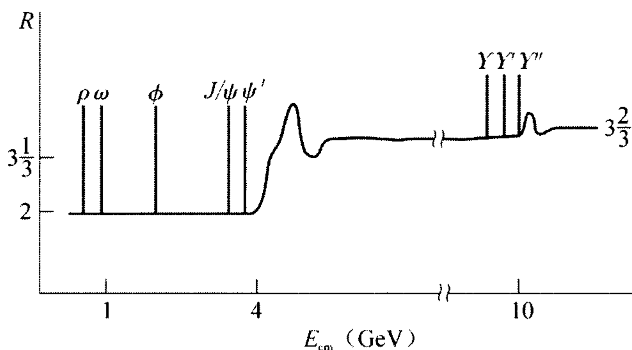


图 17.2 R 的示意图

* 见 Proceedings of the 1979 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies. ed. Kirk T B W, Abarbane H D I. Fermilab, Batavia, Illinois.

这是由于 u, d, s 的电荷分别为$\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$的缘故. 当 E_{cm}的值在 $2m_c$ 和 $2m_b$ 之间时,我们可以把 R 写成 $R = 2 + \Delta R$. 这里 $\Delta R \cong 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ 因为 c 夸克的电荷是$\frac{2}{3}$. 当 E_{cm}增加到超过 $2m_b$,则 R 的值应当再增加一个数 $\Delta R \cong 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$. 这些理论预期的实验证实,强烈地支持了如下的结论:

(i) 夸克具有分数电荷: $Q_q = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$,分别对应于 q = u, d, s, c 和 b 夸克.

(ii) 每一种味有三种颜色,末态对于三种颜色的排列而言是对称的;即,观测到的最后的强子态是颜色单态.

(iii) 夸克的质量很小(即,很好地位于我们现有的加速器能量范围之内).

(iv) 除了在共振的附近,夸克之间和反夸克之间的强相互作用可以略去(至少在总截面的计算中).

如果真是夸克的行为近似地像自由粒子并且它们的质量颇小,那么一个尖锐的问题就是为什么我们没有见到自由夸克在末态中出现? 这就是著名的夸克禁闭问题.

17.2 色介电常量*

QCD 的详细内容将在下一章中研究,因此,这里我们将只扼要地提到它的某些一般的特征. QCD 是这样一个理论,它描述了色 SU_3- 对称相互作用. 系统由夸克和胶子组成. 夸克用自旋 1/2 的狄拉克场 ψ_q^a 表示,q 代表味 u, d, s, …而 a 代表色 1, 2, 3;胶子由矢量规范场 V_μ^l 表示,这里

---

* 17.2—17.4 节中的讨论直接根据 T. D. Lee(李政道)在 *A Festschrift for Maurice Goldhaber* 中的文章. 编辑 G. Feinberg, A. W. Sunyar 和 J. Weneser(New York: New York Academy of Science, 1980).

μ 是通常的四维时空指标，而 $l=1, 2, \cdots 8$ 代表胶子色指标. 这是一个可以重正化的理论，因此，对于紫外区的发散不会有什么困难. 但是在红外区就很复杂. 为了要给 QCD 一个定义明确的含义，我们可以把整个系统先包含在一个大小为 L^3 的容积之内. 令 g_L 为长波长极限下的重正化耦合常数，动量 $k \sim L^{-1}$. 能够证明在很一般的假定下并准确到(耦合常数)^2 的所有各级

$$g_L > g_l \text{ 若 } L > l. \tag{17.3}$$

这个证明将在 18.6 节中给出. 正像我们在那里将要讨论的，上述关系与理论的"渐近自由"性质密切相关，它断言当 $l \to 0$，g_l 减少到 0. 因为一个纯粹的 QCD 拉格朗日量并不包含任何质量标度，渐近自由意味着当 l 增加时，g_l 必须也增加，这导致(17.3).

困难在于红外极限. 当 $L \to \infty$ 时，似乎是 g_L 可能会$\to \infty$，或至少 $\gg 1$. 由于真实的物理系统是一个 $L=\infty$ 的系统，我们会总是处在超强耦合的极限下. 在这一章中我们将看到这个困难将怎样通过把真空当作一个色介质而获得解决，至少是唯象地解决.

让我们引入 κ_L，它叫做在容积 L^3 中真空的色介电常量. 作为一个约定，我们将采用一个标准的重正化耦合常数 g，它由下式定义

$$g = g_l \tag{17.4}$$

当

$l=$ 某个任意选定的长度，譬如质子半径.

于是常数 κ_L 被定义为

$$g_L^2 = \frac{g^2}{\kappa_L}. \tag{17.5}$$

因此，按照(17.4)

$$\kappa_l = 1 \text{ 当 } l = \text{质子半径}. \tag{17.6}$$

方程式(17.3)现在表示

$$\kappa_L < \kappa_l \text{ 若 } L > l \tag{17.7}$$

有了(17.6)的约定，上面的关系意味着对于在一个无穷大容积中($L=$

∞)的真空

$$\kappa_\infty < 1. \tag{17.8}$$

正像(17.3)一样,不等式(17.7)—(17.8)是对 g^2 的所有各级成立的.在下一章中,我们将给出最低级的微扰计算.其结果是(18.133)式,根据它我们得到

$$\frac{\kappa_L}{\kappa_l} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi}\frac{g^2}{4\pi}\left(11 - \frac{2}{3}n\right)\ln\frac{L}{l} + O(g^4)}, \tag{17.9}$$

这里 n 是夸克味的种类数(假定 < 17).当然,这个公式符合于一般的不等式(17.3).

前面提到的超强耦合的困难相当于

$$\kappa_\infty = 0 \tag{17.10}$$

或

$$\kappa_\infty \ll 1. \tag{17.11}$$

在前一种情况下,我们把 QCD 中的真空叫做完全的抗色电介质,在后一种情况下叫做近完全抗色电介质.

17.3 经典电磁学上一个假想的问题

在量子电动力学中,通常的惯例是令真空态的介电常量 $\kappa_{真空} = 1$.于是可以证明所有物理介质的介电常量 $\kappa \geqslant 1$.这可以很容易地利用熟知的公式

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} \tag{17.12}$$

来看出.这里 $\boldsymbol{D}$ 是位移矢量,$\boldsymbol{E}$ 是电场强度,$\boldsymbol{P}$ 是极化矢量.由于在 $\boldsymbol{E}$ 的作用下,所有原子的极化都沿着与 $\boldsymbol{E}$ 相同的方向,以致产生一个屏蔽效应,所以我们有 $\kappa > 1$.

在这一节中,我们将考虑一个假想的问题.让我们想像在经典电磁学中,没有原子的量子理论,有一种介质它的介电常量

$$\kappa \equiv \kappa_{介质} \ll 1, 或 \cong 0 \qquad (17.13)$$

即,假想的介质是反屏蔽的.现在,假定我们放一个小的电荷分布 ε 在介质中.我们将证明,不管 ε 是多么的小,介质将爆裂发展成一个围绕电荷的洞.在洞内是真空,所以 $\kappa = 1$,但在洞外 $\kappa = \kappa_{介质}$,如图 17.3 所示.为了明了这一点,让我们假定这样一个洞已经形成.由于介质的反屏蔽性质,洞的内表面的感应电荷和 ε 同号.因此,如果要减小洞的体积,我们必须做功来克服 ε 和感应电荷之间的斥力.如果要把洞完全消除,这个功是无穷大.因此,洞是不会消失的.

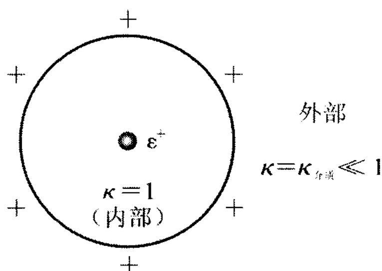


图 17.3 经典电磁中在假想的反电性介质内一个电荷的效应

对于一种正常的介质它的介电常量 >1,情况就完全不同了.想像生成一个类似的洞.相应的感应电荷将与 ε 的符号相反.洞将自动地收缩到0,如果 ε 足够小,最后会形成一个均匀的背景介质;在电荷的周围产生通常的库仑场分布.

无论如何,对于一种抗电性的介质,只要有外电荷,一定会有洞(爆裂).我们可以估计一下这样一个洞的半径 R.令 $D_{外}$ 和 $E_{外}$ 分别为洞外的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的法向分量,这时的径向坐标为 $r = R_+$.同样,令 $D_{内}$ 和 $E_{内}$ 是内部 $r = R_-$ 时相应的分量.对于一个球形的洞.我们有

$$D_{内} = E_{内} = D_{外} = \varepsilon/R^2$$

和

$$E_{外} = \varepsilon/R^2\kappa_{介质},$$

这里 ε 是这个小的电荷分布的总电荷.洞内的电能与 $\kappa_{介质}$ 无关,洞外的电能由 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$ 的体积积分给出,它是 $\infty\kappa_{介质}^{-1}$.减去电荷分布的自能(即,没有介质时的能量)比较方便,由介质所引起电能的改变为

$$U_{电} = \frac{1}{2}\varepsilon^2(\kappa_{介质}^{-1} - 1)/R. \qquad (17.14)$$

另外,为了生成这样一个洞,需要能量 $U_{洞}$. $U_{洞}$ 的大小是 R 的函数. 当 R 大时,$U_{洞}$ 应当与体积成正比并加上与表面积成正比的项,等等,我们可以写作

$$U_{洞} = \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s + \cdots \tag{17.15}$$

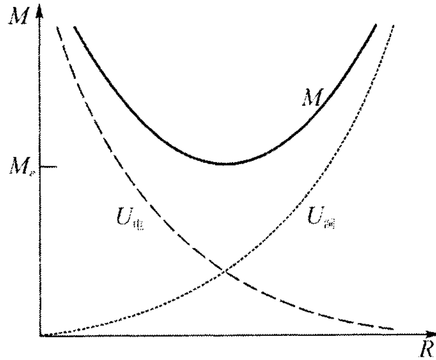


图 17.4 17.3 图中系统的能量 $M = U_{电} + U_{洞}$,这里 $\kappa_{介质} < 1$

这里 p, s, …是正的常数. 在 $\kappa_{介质} < 1$ 的情况下,总和 $M \equiv U_{电} + U_{洞}$ 示意性地在图 17.4 中画出. 当 $\kappa_{介质} \to 0$ 和 $U_{洞} \cong \frac{4\pi}{3}R^3 p$ 时, 曲线 M 的极小是

$$M \equiv M_\varepsilon \sim \frac{4}{3}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\kappa_{介质}}\right)^{3/4}(4\pi p)^{1/4}. \tag{17.16}$$

由此我们得出已经达到了的结论,即如果总电荷 $\varepsilon \neq 0$,则 $R \neq 0$. 而且

$$M_\varepsilon \to \infty \text{ 当 } \kappa_{介质} \to 0. \tag{17.17}$$

很容易看出,不用近似 $U_{洞} \cong \frac{4\pi}{3}R^2 p$ 也能达到相同的结论.

其次,我们用一个偶极分布,即两个小的,但是分离的,总电荷为 ε^+ 和 ε^- 的分布来代替单一的电荷分布. 很容易看出当 $\kappa_{介质}$ 足够小时,最小的能量状态仍然要求形成一个洞来包围这两个电荷. 和以前一样,洞内 $\kappa = 1$,而洞外 $\kappa = \kappa_{介质}$. 当 $\kappa_{介质} \to 0$ 时, 不难证明内部电场在洞的表面上

应当与表面平行，因此洞外的 $\boldsymbol{D}$ 是 0，如图 17.5 所示. 这样，$U_{电}$ 保持有限，能量总和 $M_{\varepsilon^+\varepsilon^-} = U_{电} + U_{洞}$ 也如此：

$$M_{\varepsilon^+\varepsilon^-} = 有限 \quad 当\ \kappa_{介质} \to 0 \tag{17.18}$$

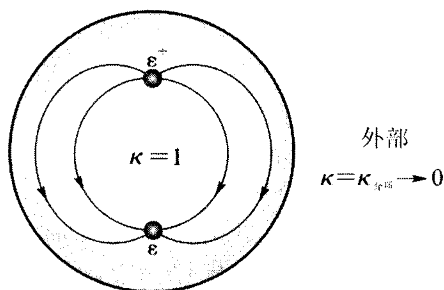


图 17.5　在假想的抗电介质中，一个偶极子的电场分布

如果我们试图把两个电荷 ε^+ 和 ε^- 分开到无穷远的距离，则由于(17.17)，需要的功也必须是无穷大. 这就是在我们假想的问题中和"夸克禁闭"的相似之处.

17.4　一个唯象的说明

1. *QCD 真空作为一种完全的抗色电介质*　现在我们回到在 17.1 和 17.2 节中讨论过的夸克禁闭问题中来. 我们将假定 QCD 中的真空是一种完全的(或近完全的)抗色电介质. 根据前述相同的理由，我们知道只要有夸克或反夸克存在，必然在粒子周围的空间引起不均匀性. 我们可以把这叫做袋*，或称域结构，或孤立子. 在袋内，色介电常数 κ 是 1. 但在袋外，$\kappa = \kappa_\infty$ 这是 0 或 $\ll 1$. 如果总的颜色不为零，这样一个袋的质量当 $\kappa_\infty \to 0$ 时将是无限大，这和(17.17)相似. 但是，正如在(17.18)式中所示，如果在袋内有一个颜色单态，则当 $\kappa_\infty \to 0$ 时袋的质量保持有限. 这样，假定所有的强子是颜色单态，我们得到

$$介子：\bar{q}^a q^a \qquad 和 \qquad 重子：\varepsilon_{abc} q^a q^b q^c$$

质量有限，这里 a, b, c 是颜色指标，它可以从 1 变到 3. [见图 17.6]. 由此我们可以推出把夸克分开到一个大的距离 r 所需要的功近似地正比于

---

* MIT 袋：Chodos A, Jaffe R L, Johnson K, Thorn C B, Weisskopf V F. *Phys Rev*, 1974, **D9**: 3471.

SLAC 袋：Bardeen W A, Chanowitz M S, Drell S D, Weinstein M, Yan T-M. *Phys Rev*, 1975, **D11**: 1094.

r. 于是假定 QCD 中的真空是一种完全(或近完全)的抗色电介质"解释"了夸克禁闭.

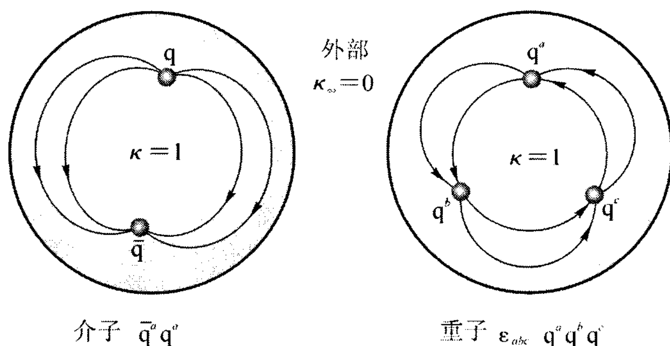


图 17.6 强子内部的色场

当然,目前还不知道是否一个真正自由的夸克质量 M_q 真是无限大. 但是至今在任何高能碰撞的末态中尚未观测到自由夸克这一事实,建立了一个下限 $M_q > 5$ GeV,这里 $q = \mathrm{u}$, d 和 s. 能够证明这个下限表示 *

$$\kappa_\infty < 0.013\left(\frac{g^2}{4\pi}\right) \tag{17.19}$$

这里 g 由(17.4)所定义.

我们可能觉得奇怪,我们是在怎样的意义下绕过 17.2 节中所提到的超强耦合的困难呢. 为了了解这一点,让我们考虑另一个物理学中的问题,在那里相互作用也是超强的,但不存在数学上的困难. 一个好的例子是两个 He 原子之间的相互作用位势 $V(r)$. 如果 17.7 所示,对于 $r < a$, 位势 V 是≃无穷大;对于 $r > a$, V 很小. 由于强的位势是排斥的,两个 He 原子自动地躲开了强相互作用区,从而避

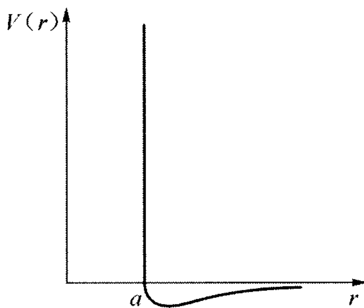


图 17.7 两个氦原子之间的位势

* Lee T D. *Phys Rev*, 1979, **D19**:1802.

免了任何困难. 通常的技术是用一个硬球位势代替 V 的强排斥部分. 这样我们只需要研究一个新的边界值问题:两个 He 原子之间的距离 r 被限制在区域 $r \geqslant a$ 之中, 在那里位势 $V(r)$是小的,因而可以被当作一种微扰.

由图 17.6 我们知道当 $\kappa_\infty \to 0$ 时,即 $g_\infty^2 = g^2/\kappa_\infty \to \infty$ 时, 夸克被禁闭在一个域内,在那里 $\kappa = 1$ 而耦合 $= g$. 这样,$g_\infty \to \infty$ 的超强区对夸克和反夸克施加一种排斥作用. 正像上面的 He-He 相互作用一样,粒子自动地离开超强作用区. 由于洛伦兹不变性,在目前情况下相应的边界值问题要求有相对论的孤立子解,它的详细情况将在第 20 章中讨论. 我们将看到,当我们依这些孤立子解来展开时,只有孤立子内部的耦合 g 是有关的参数,这就解决了这个困难. [只有当人们企图在一个均匀的背景上做笨拙的平面波展开时,才必须用 g_∞ 作展开的参数. 如果有人勉强要在前面提到过的 He-He 问题中做相似的平面波展开,将会遇到完全相同的困难.]我们还将看到,由于 QCD 是渐近自由的,在袋内的夸克行动近似的像自由粒子,并且它们的质量能够相对地小.

由于我们的理论是相对论不变的,在真空中的光速 $c/(\kappa\mu)^{\frac{1}{2}}$ 必须保持为 c. 因此

$$\kappa\mu = 1 \tag{17.20}$$

这里 κ 是色介电常量,μ 是相应的"磁"化率. 当 $\kappa = \kappa_\infty \to 0$ 时,必须有 $\mu = \mu_\infty \to \infty$.

有了(17.20)式,我们可以把 κ 当作一个洛伦兹不变量;它和第 16 章中讨论过的 ϕ 场扮演相同的角色,引入

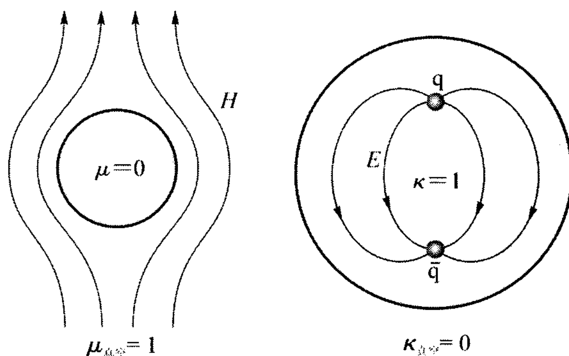


图 17.8　QED 中的超导性与 QCD 中的夸克禁闭对比

$$\phi \propto 1-\kappa, \tag{17.21}$$

可能是方便的. 这样在强子内部 $\kappa=1$,因而 $\phi=0$, 而在外部 $\kappa=\kappa_\infty$ 且有 $\phi=\phi_{真空}$. 如此,所有的强子都能被看成是物理真空中的孤立子结构. 进一步的详细情况将在第 20 章中给出.

2. **与超导的类似** 如前所述. 在 QED 中不存在任何零频率下的抗电介质;但是,有的色散定律在某些不为零的频率下表现出抗电性质. 它能导致某些类似于上面讨论过的物理效应*.

另外一种相似是把 QED 中的超导和我们对 QCD 中夸克禁闭的唯象解释加以比较. 当我们从 QED 转到 QCD 时,我们把磁场 $\boldsymbol{H}$ 换以色电场 $\boldsymbol{E}$,把超导体换以 QCD 的真空,并把 QED 的真空换成强子的内部;因此,在图 17.8 中就是把一个内部换成一个外部,同时把一个外部换成一个内部. 在前一种情况下,磁场从超导体内部被挤了出去,而在后一情况下,色场被挤进袋内,这就导致夸克(或色)禁闭. 这一情况可总括如下:

QED 超　导		QCD 真空作为完全抗色电介质
$\boldsymbol{H}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{E}$
$\mu_{内}=0$	$\longleftrightarrow$	$\kappa_{真空}=0$
$\mu_{真空}=1$	$\longleftrightarrow$	$\kappa_{内}=1$
内	$\longleftrightarrow$	外
外	$\longleftrightarrow$	内

3. **说明** 夸克禁闭是一个大尺度现象. 因此,至少在唯象的水平上,它应当可以通过一种类经典的宏观理论来理解,正像伦敦-朗道理论对于超流一样. 我们建议的真空的色介电常量就是为这一目的而提出来的. 对我们的解释来说,关键的一点就是 QCD 真空的反屏蔽性质. 基于最低级微扰计算的一个简单的示例将在下一章(18.5 节)给出,它可能对这个基本问题提供某些深入的物理观点.

---

* Happer W, Tam A C. Laser Spectroscopy III[M]//Hall J L, Carlsten J L. Berlin: Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1977:333.

第18章 量子色动力学和规范理论*

量子色动力学处理夸克和胶子之间色 SU_3 对称相互作用. 它是场论中广泛的一类即所谓非阿贝尔规范理论** 中的一支,我们将从分析这个类开始.

18.1 非阿贝尔规范场理论

一个 SU_N 群是这样一个群,它由所有 $N\times N$ 的幺正矩阵 U 所组成,它们的行列式为 1. 在这本书里,我们感兴趣的是 $N=2$ 和 3 这些特殊情况在物理上的应用. 如前所述,SU_2 群 $\{U\}$ 的生成元是(3.1)式所给出的三个泡利矩阵 τ^l,对于 SU_3 而言则是由(12.22)式所给出的 8 个盖尔曼矩阵 λ^l. 在本章中,所有群的指标都由上标表示,而不用以前各章中的下标. 引进一个能应用于所有 N 的一致性的符号是有用的. 我们定义

$$T^l=\frac{1}{2}\tau^l \text{ 对于 } SU_2 \text{ 和 } T^l=\frac{1}{2}\lambda^l \text{ 对于 } SU_3.$$

对于一般的 SU_N 群,有 $M=N^2-1$ 个这样的 T^l,它们满足

$$T^l=T^{l\dagger},\ \mathrm{trace}(T^lT^m)=\frac{1}{2}\delta^{lm}$$

---

* 读者如对于 QCD 的数学详情不感兴趣,可跳过这章和下一章.

** Yang C N, Mills F. *Phys Rev*, 1954, **96**: 191. Klein O. New Theories in Physics. International Institute of Intellectual Cooperation, League of Nations, 1938: 77—93.

和

$$[T^l, T^m] = \mathrm{i} f^{lmn} T^n. \tag{18.1}$$

f^{lmn}是群代数的反对称结构常数;对于 SU_2, $f^{lmn} = \varepsilon^{lmn}$ 由(3.4)式给出,对于 SU_3 则由(12.24)式给出,在无穷小变换下,矩阵 U 可以被写作

$$U = 1 - \mathrm{i}\theta^l T^l \tag{18.2}$$

这里的 θ^l 是实的,并且是无穷小.

让我们考虑一个 SU_N 规范理论,它由一种自旋 1/2 的费米场 ψ^a 和一种矢量规范场 V_μ^l 所组成,这些分别属于 N 和 $M = N^2 - 1$ 维的群表示. 因此,上标 a 从 1 变到 N, l 从 1 变到 M. 拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} V_{\mu\nu}^l V_{\mu\nu}^l - \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi \tag{18.3}$$

这里

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix},$$

其中每一个 ψ^a 是一个 4-分量的狄拉克旋量,

$$V_{\mu\nu}^l = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu^l - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_\mu^l + g f^{lmn} V_\mu^m V_\nu^n$$

和

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i} g T^l V_\mu^l. \tag{18.4}$$

像通常一样, $x_\mu = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}t)$, γ_μ 由(3.11)式给出并且所有重复的指标都要求和. 与 QED 相似,"电"和"磁"场 E_i^l 和 B_i^l 是

$$E_i^l \equiv \mathrm{i} V_{i4}^l = -\dot{V}_i^l - \nabla_i V_0^l + g f^{lmn} V_0^m V_i^n$$

和

$$\varepsilon_{ijk} B_k^l \equiv V_{ij}^l = \nabla_i V_j^l - \nabla_j V_i^l + g f^{lmn} V_i^m V_j^n \tag{18.5}$$

这里 $V_0^l = -\mathrm{i} V_4^l$, 下标 i, j, k 表示空间指标从 1 变到 3. 利用变分原理(2.10)和拉格朗日密度(18.3),我们知道运动方程是

$$(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi = 0 \tag{18.6a}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} V^l_{\mu\nu} + g f^{lmn} V^m_\mu V^n_{\mu\nu} + g I^n_\nu = 0 \tag{18.6b}$$

这里

$$I^l_\nu = \mathrm{i}\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\nu T^l \psi. \tag{18.6c}$$

引入下面的 $N \times N$ 矩阵很有用处

$$V_\mu \equiv T^l V^l_\mu \quad 和 \quad V_{\mu\nu} \equiv T^l V^l_{\mu\nu}. \tag{18.7}$$

这样,(18.4)变为

$$V_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_\mu - \mathrm{i}g[V_\mu, V_\nu] \tag{18.8}$$

和

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}g V_\mu.$$

因此,拉格朗日密度(18.3)能够被写作

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{trace}(V_{\mu\nu} V_{\mu\nu}) - \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m)\psi.$$

定理 1. 在定域的 SU_N 变换下,拉格朗日密度不变.

$$V_\nu \to V'_\nu = U V_\nu U^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g} U \frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\nu}$$

和

$$\psi \to \psi' = U\psi \tag{18.9}$$

这里 $U = U(x)$ 是任何一个 x 的 $N \times N$ 幺正矩阵函数,满足

$$\det U = 1.$$

证明 根据 $U^\dagger U = 1$, 随即得到

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\mu} U + U^\dagger \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = 0. \tag{18.10}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V'_\nu}{\partial x_\mu} &= U\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\mu}U^\dagger + \frac{\partial U}{\partial x_\mu}V_\nu U^\dagger + UV_\nu\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\mu} \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{g}\frac{\partial U}{\partial x_\mu}\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\nu} + \frac{\mathrm{i}}{g}U\frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \\
&= U\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\mu}U^\dagger - \left[U\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\mu},\ UV_\nu U^\dagger\right] \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{g}U\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\mu}U\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\nu} + \frac{\mathrm{i}}{g}U\frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.
\end{aligned}
$$

把上式代入

$$
V'_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}V'_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}V'_\mu - \mathrm{i}g[V'_\mu,\ V'_\nu],
$$

并利用(18.8)的上式,我们得到

$$
V'_{\mu\nu} = UV_{\mu\nu}U^\dagger. \tag{18.11}
$$

由(18.9)和(18.10),我们发现

$$
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi' = U\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U}{\partial x_\mu}\psi = U\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U^\dagger}{\partial x_\mu}U\psi\right),
$$

因此

$$
D'_\mu\psi' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}gV'_\mu\right)\psi' = UD_\mu\psi.
$$

根据这些就得出 $\psi'^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D'_\mu\psi' = \psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu\psi$ 和迹 $V'_{\mu\nu}V'_{\mu\nu} =$ 迹 $V_{\mu\nu}V_{\mu\nu}$,这证明 $\mathscr{L}$ 的不变性成立.

说明. QCD 是指色 SU_3 规范理论这一特殊情况. 在(18.3)中,对于味 f 的夸克场,我们令 $\psi = \psi_f$ 和 $m = m_f$,并从而对 f 指标求和.

练习. 证明对于无穷小 SU_N 变换(18.2),(18.9)变为

$$
V^l_\nu \to V^l_\nu + \delta V^l_\nu \quad 和 \quad \psi \to \psi + \delta\psi
$$

这里

$$
\delta V^l_\nu = f^{lmn}\theta^m V^n_\nu - \frac{1}{g}\frac{\partial\theta^l}{\partial x_\nu}
$$

和

$$
\delta\psi = -\mathrm{i}T^l\theta^l\psi. \tag{18.12}
$$

直接证明 $\mathscr{L}$ 在这样一种无穷小变换下是不变的.

定理 2.　可以选定 $U(x)$ 以使变换(18.9)能够把 V_μ 从任意组态 $V_\mu = F_\mu(x)$ 变到

(i) $V_0 = 0$, 这叫时间轴规范,在这个规范下,新的 V_μ 满足

$$V_4(x) = \mathrm{i}V_0(x) = 0 \quad 处处成立;$$

(ii) 空间轴规范,在这个规范下,空间分量中的一个,例如

$$V_1(x) = 0 \quad 处处成立;$$

(iii) 库仑规范,在这里

$$\nabla_i V_i(x) = 0 \quad 处处成立.$$

证明.　(i) 对于任意的组态 $V_\mu = F_\mu(\boldsymbol{r},\ t)$, 我们可以选定 $U^\dagger$ 是如下的时序函数

$$U^\dagger(\boldsymbol{r},\ t) = T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_0^t gF_0(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{d}t'}$$

这里 $F_0 = -\mathrm{i}F_4$, T 是由(5.38)所定义的时序算符. 因此, $U^\dagger$ 满足

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -\mathrm{i}gF_0U^\dagger,$$

或

$$UF_4U^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}U\frac{\partial U^\dagger}{\partial x_4} = 0.$$

这样,(18.9)把 V_μ 从组态 $F_\mu(x)$ 变到时间轴或 $V_0 = 0$ 的规范.

(ii) 在上面的公式中把 x_4 和 F_4 换以 x_1 和 F_1,就建立了空间轴的规范.

(iii) 由任意给定的组态 $V_\mu = F_\mu(\boldsymbol{r},\ t)$, 我们可以定义

$$A_i \equiv UF_iU^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}U\,\nabla_i U^\dagger \equiv T^l A_i^l$$

和

$$I(A_i) \equiv \int \mathrm{trace}(A_iA_i)\mathrm{d}^3r = \frac{1}{2}\int A_i^lA_i^l\mathrm{d}^3r.$$

保持 t 和 F_μ 固定,由上面两个方程我们得到 A_i 和 $I(A_i)$ 二者作为 $U(\boldsymbol{r})$ 的泛函. 因为根据定义, $I(A_i) \geqslant 0$, 它应有一个极小值. 现在我们改变

$U(\boldsymbol{r})$以求得这个极小. 根据(18.2),我们知道,对于 $\delta U=-\mathrm{i}\theta^l T^l$

$$\delta A_i^l = f^{lmn}\theta^m A_i^n - \frac{1}{g}\nabla_i\theta^l.$$

由于 f^{lmn}是反对称的,我们有

$$A_i^l\delta A_i^l = -\frac{1}{g}A_i^l\nabla_i\theta^l.$$

因此,利用上面 $I(A_i)$的表式并通过分部积分,我们得到

$$\delta I = \int A_i^l\delta A_i^l \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{g}\int\theta^l(\boldsymbol{r})\nabla_i A_i^l(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3 r.$$

由于 $\theta^l(\boldsymbol{r})$可以是 $\boldsymbol{r}$ 的一个任意的无穷小的函数,I 的极小发生在当

$$\nabla_i A_i^l = 0$$

时,这就是库仑规范.

为了保证在上面的分部积分中没有表面项,我们可以把系统封闭在一个体积为 L^3 的盒中,并加上周期性的边界条件. 在 QCD 中,由于红外问题,有限体积盒的逼近提供了一定程度的数学保证.

说明. 不同的规范在应用上互相补充. 为了建立幺正性,直接的路子就是哈密顿算符和正则方法. 我们将看到,这在时间轴规范中最容易实现,由此我们又可以转移到其他规范上去. 在实际的计算上,时间轴规范特别复杂,因为在这个规范中,要有无穷多的约束加在态矢上. 在大多数应用问题中,用库仑和协变规范比较方便. 为了表明洛伦兹不变性,我们需要协变规范(19.6 节). 但是,协变规范本身没有厄米的哈密顿量,因而需要其他的规范来证明幺正性.

练习. 给定(经典的)能量动量张量密度 $T_{\mu\nu}$为

$$T_{\mu\nu} = V_{\mu\sigma}^l\frac{\partial V_\sigma^l}{\partial x_\nu} + \psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + L\delta_{\mu\nu}.$$

(i) 证明 $T_{\mu\nu}$满足

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{\mu\nu} = 0.$$

因而由下式给出的能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$

$$E=-\int T_{44}\mathrm{d}^3r \quad 和 \quad P_k=-\mathrm{i}\int T_{4k}\mathrm{d}^3r$$

是守恒的.

(ii) 证明 E 和 $\boldsymbol{p}$ 是规范不变量,即使 $T_{\mu\nu}$ 不是.

18.2　一个例子

作为动力学系统,QED 和 QCD 二者都属于这一类拉氏理论,其中广义坐标可以分为两种:q_α 等和 ξ_n 等. 拉格朗日量 L 是 q_α, $\dot{q}_\alpha$, ξ_n 的但不是 $\dot{\xi}_n$ 的函数:

$$L = L(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha,\ \xi_n). \tag{18.13}$$

还有,L 在一个群的变换下不变,而这个群的元素 U 包含某种**任意的**时间的函数(例如在(18.9)中).

定义　我们把一个拉氏系统叫做"规范不变"的,只要它的对称群包含有任意的时间函数.

显然,规范不变的可能性不仅限于场论.

拉格朗日运动方程可以通过变分原理(2.10)导出,由(18.13)我们发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \tag{18.14}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_n}=0.$$

在经典力学中,通常拉格朗日运动方程式的解能够用广义坐标和它们的一阶时间导数的初值惟一的确定. 对于一个具有规范不变性的理论就不再是如此了,这是由于有像(18.9)那样任意的时间相关的规范变换. 对于一个量子系统,我们将看到,这一特征还会产生其他的复杂问题.

在没有规范不变性的情况下,(18.13)本身在实现量子化过程中不会给我们带来任何问题. 我们可以利用 $\partial L/\partial \xi_n = 0$ 解出 ξ_n 用 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 表示:

$$\xi_n = \xi_n(q_\alpha, \dot{q}_\alpha),$$

把它代入(18.13)式，得出

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \xi_n(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)) \equiv \overline{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha).$$

广义动量 p_α 由下式给出

$$p_\alpha = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

这里，在微分$\partial\overline{L}/\partial\dot{q}_\alpha$ 中我们使 q_α 固定，而在$\partial L/\partial\dot{q}_\alpha$ 中我们还使 ξ_n 也固定. 很容易看出标准的量子化方法(1.5)—(1.9)能够直截了当的完成.

有了规范不变性，情况就很不同了. 正如将要表明的，U 的时间依存性质一般地将在 p_α，q_α 和$\partial L/\partial\xi_n$ 之间加上一个泛函关系. 这将使得同时满足 $\partial L/\partial\xi_n = 0$ 和量子化规则

$$[p_\alpha, q_\beta] = -\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}. \tag{18.15}$$

成为不可能. 这就是为什么我们需要选择一个特定的规范来实现量子化方法的根本理由.

1. **一个简单的力学模型** 让我们考虑三维空间中位置为 $\boldsymbol{r}$ 的点粒子. 它的拉格朗日量是

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r})^2 - V(r)$$

这里 $r = |\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{\xi}$ 是另一坐标矢量，但在 L 中没有 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. 很容易证明这个拉格朗日量在下述变换下不变

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$$

和

$$\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\xi} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{18.16}$$

这里 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ 可以是时间 t 的任意无穷小矢量函数. 除去 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r})^2$ 项，这就是一个非相对论性的带电粒子在一个有心位势 $V(r)$中并受到外磁场影响的运动问题.

我们可以加上下面的约束来使这个问题更加简化，即 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$

位于(x_1, x_2)平面且 $\boldsymbol{\xi} = \hat{e}\xi$，这里 $\hat{e}$ 是沿 x_3-轴的单位矢量. 于是上述的拉格朗日量变为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - (x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\xi^2 r^2 - V(r) \tag{18.17}$$

这里 x_1 和 x_2 是 $\boldsymbol{r}$ 的**笛卡儿**坐标，现在，$\boldsymbol{r}$ 是二维矢量. 应用极坐标 $x_1 = r\cos\theta$ 和 $x_2 = r\sin\theta$，L 能够被写作

$$L = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2] - V(r) \tag{18.18}$$

而(18.16)就是阿贝尔变换群

$$\theta \to \theta + \alpha(t) \tag{18.19}$$

和

$$\xi \to \xi + \dot{\alpha}(t)$$

这里 $\alpha(t)$现在能够是 t 的任意有限函数. 这个简单例子的不变群和 QCD 或 QED 的规范群有共同的特征，那就是它们的元素包含有 t 的任意函数，就像(18.9)中的 U 一样.

利用(18.14)，并令 $\xi_n = \xi$，我们发现

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -r^2(\dot{\theta} - \xi) = 0. \tag{18.20}$$

因为 θ 的共轭动量是

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2(\dot{\theta} - \xi),$$

我们看出对易关系

$$[p_\theta, \theta] = -\mathrm{i} \tag{18.21}$$

与(18.20)相矛盾，证实了在量子化时选择规范的必要性.

但是，写下拉格朗日的运动方程(18.14)并无困难. 在这个例子中，用极坐标它们是

$$\ddot{r}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=0$$

和
$$\dot{\theta}-\xi=0. \tag{18.22}$$

2. $\xi=0$ *规范* 由于规范变换(18.19),任何轨道 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\xi=\xi(t)$ 都能变到在全部时间内 $\xi=0$ 的轨道上去. 在这个规范下,令(18.18)中的 $\xi=0$ 我们发现

$$L=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(r).$$

共轭动量 $\boldsymbol{p}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}=\dot{\boldsymbol{r}},$$

并且哈密顿量 H 是 $\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2+V(r)$. 这样,在量子力学上

$$\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}$$

和
$$H=-\frac{1}{2}\nabla^2+V(r). \tag{18.23}$$

角动量算符

$$p_\theta=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}=-\mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

与 H 对易. 为了与(18.22)式所给出的运动方程 $r^2(\dot{\theta}-\xi)=0$ 相一致,只容许 H 的这样的本征态$|\rangle$,它满足

$$p_\theta\,|\rangle=0 \tag{18.24}$$

因此,这些本征态都与 θ 无关,这导致

$$H=-\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)+V(r). \tag{18.25}$$

这样,在 $\xi=0$ 的规范中,我们保持量子化定则(18.15)

$$[p_1,x_1]=[p_2,x_2]=-\mathrm{i}$$

和

$$[p_1,p_2]=[x_1,x_2]=0$$

不变，而用对态矢的约束(18.24)代替 $\partial L/\partial\xi = 0$，从而解决了(18.20)和(18.21)之间的矛盾.

3. $x_2 = 0$ 规范　由(18.19)式，我们知道任何轨道 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 和 $\xi = \xi(t)$ 都能被变到在一切时刻都是 $x_2 = 0$ 的轨道，虽然这时有两个分支：x_1 可以 >0 或 <0，其中 $x_1 = 0$ 是变换的雅可比行列式等于 0 的点. [在文献中还相当于所谓格里波夫(Gribov)不定性]. 在 $x_2 = 0$ 的规范中，$r^2 = x_1^2$，而拉格朗日量(18.17)变为

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\xi^2 x_1^2 - V(x_1)$$

这里，为确定起见，我们选择 x_1 为正的一支. 因为上面的 L 不包含 $\dot{\xi}$，我们可以按标准的方法通过 $\partial L/\partial\xi = 0$ 以消去 ξ，现在这个例子中那就是 $x_1^2\xi = 0$. 因此，拉格朗日量变为

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 - V(x_1).$$

共轭动量 P_1 是 $\dot{x}_1$，而经典的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + V(x_1).$$

在过渡到量子力学时，为了使这个哈密顿量的谱与(18.25)的相同，重要的是**不要**把 $x_2 = 0$ 规范中的 x_1 当作笛卡儿坐标；在上述的哈密顿量中 P_1^2 是算符 $-\frac{1}{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(x_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\right)$ 而不是 $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2}$. 这样在 $x_2 = 0$ 的规范中，通过修改量子化定则(18.15)，但保持 $\partial L/\partial\xi = 0$ 作为一个真实的算符方程，我们解决了(18.20)和(18.21)之间的矛盾.

说明.　(i) 拉格朗日量(18.18)与下述情况下的表式形式上相同，即在一个以角速度 ξ 旋转的坐标系中观察一个在有心位势 $V(r)$ 中运动的二维粒子. 如果 ξ 被当作一个动力学变量，则这个问题获得了一种规范不变性，并且化为上面讨论过的例子.

(ii) 我们将看到，$\xi = 0$ 规范类似于 QED 或 QCD 中的 $\boldsymbol{V}_0 = 0$ 规范；$x_2 = 0$ 规范相当于通常的库仑规范. 在这个简单的例子中选择哪一个坐标在什么规范中当作笛卡儿坐标能够由问题的提出者来决定；像在

(18.23)所做的那样,在 $\xi=0$ 的规范中,假定坐标 x_1 和 x_2 是笛卡儿坐标似乎是合理的. 但是,在非阿贝尔规范场理论中要根据相对论不变性的要求来决定. 我们将看到那是与选择 $V_0=0$ 规范作为出发点相符合的.

(iii) 这个简单例子中的群(18.19)是阿贝尔群. 即使如此,仍然有由于曲线坐标所带来的复杂性. 在 QED 中的规范变换不仅是阿贝尔群,还是一个直线坐标中的平移,那就是它为什么简单的原因.

(iv) 在结束这个例子的讨论之前,我们注意到如果愿意,我们可以选择一个更加一般的规范 $\chi(x_1, x_2, \xi)=0$, 在这里 $\chi(x_1, x_2, \xi)$是一个任意的函数只要通过规范变换(18.19)能够把空间(x_1, x_2, ξ)中的任一点映照到面 $\chi(x_1, x_2, \xi)=0$ 上. 在下一章 19.33 节中,当讨论路径积分的形式时,我们将回到这个简单的模型. 这里,我们只说明常用到的一点,那就是把一个 $r^{1/2}$ 的因子吸收到态矢中去,因而由(18.25)式给出的 H 变为

$$\bar{H}\equiv r^{1/2}Hr^{-1/2}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+V(r)-\frac{1}{8r^2}, \tag{18.26}$$

它使体积元中的 $r\mathrm{d}r$ 变为 $\mathrm{d}r$,并使位势 $V(r)$加上新的一项$-(8r^2)^{-1}$.

18.3 量子化: $V_0=0$ 规范

现在我们回到 18.1 节中讨论的非阿贝尔规范场理论. 根据前一节的定理 2(i),我们知道通过规范变换(18.9),任何 V_μ 的组态能够被变到时间轴规范;即

$$V_0^l=0 \quad 处处成立.$$

在时间轴规范中,令(18.5)式中的 $V_0^l=0$, 我们发现

$$E_i^l=-\dot{V}_i^l$$

而(18.3)变为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\dot{V}_i^l\dot{V}_i^l-B_i^lB_i^l)-\psi^\dagger\gamma_4(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi. \tag{18.27}$$

V_i^l 的共轭动量就是

$$\Pi_i^l = \dot{V}_i^l = -E_i^l, \tag{18.28}$$

并且像在(3.17)中一样,ψ 的共轭动量是 $\mathrm{i}\psi^\dagger$. 这样,哈密顿密度 $\Pi_i^l \dot{V}_i^l + \mathrm{i}\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathscr{L}$ 是

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\Pi_i^l \Pi_i^l + B_i^l B_i^l) - gI_i^l V_i^l$$
$$+ \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m)\psi, \tag{18.29}$$

这里 I_i^l 表示由(18.6c)所给出的流算符的空间分量. 通常的正则量子化方法导致

$$[V_i^l(\boldsymbol{r}, t), \Pi_j^m(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}\delta^{lm}\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$
$$\{\psi(\boldsymbol{r}, t), \psi^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{18.30}$$

那些 V_i 之间和 Π_i 之间的等时对易子是零;同样,那些 ψ 之间和 $\psi^\dagger$ 之间的等时反对易子也是零.

原来的规范变换(18.9)的其余部分仍然是重要的. 按照(18.7),我们令

$$V_i = T^l V_i^l \tag{18.31}$$

和

$$\Pi_i = T^l \Pi_i^l.$$

很容易证明哈密顿量密度 $\mathscr{H}$ 和对易关系在一个与时间无关的 SU_N 变换下是不变的

$$V_i \rightarrow UV_iU^\dagger - \frac{\mathrm{i}}{g}(\boldsymbol{\nabla}_i U)U^\dagger,$$
$$\Pi_i \rightarrow U\Pi_j U^\dagger$$

和

$$\psi \rightarrow U\psi, \tag{18.32}$$

这里 $U = U(\boldsymbol{r})$ 可以是 $\boldsymbol{r}$ 的任意 $N \times N$ 幺正矩阵函数,其 $\det U = 1$. 因为那些 $U(\boldsymbol{r})$ 是时间无关的,不变群 $\{U(\boldsymbol{r})\}$ 由依赖 $\boldsymbol{r}$ 的算符 $\mathscr{G}^l$ 所生成,它是守恒的:

$$\mathscr{G}^l \equiv J^l + \psi^\dagger T^l \psi,$$

这里

$$J^l \equiv \frac{1}{g} D_i^{lm} \Pi_i^m \tag{18.33}$$

和

$$D_i^{lm} = \delta^{lm} \nabla_i - g f^{lmn} V_i^n.$$

可以直接证明

$$[J^l(\boldsymbol{r}, t), J^m(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i} f^{lmn} \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') J^n(\boldsymbol{r}, t),$$

$$[\mathscr{G}^l(\boldsymbol{r}, t), \mathscr{G}^m(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i} f^{lmn} \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathscr{G}^n(\boldsymbol{r}, t),$$

$$[\mathscr{G}^l(\boldsymbol{r}, t), \psi(\boldsymbol{r}', t)] = -\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') T^l \psi(\boldsymbol{r}, t),$$

$$[\mathscr{G}^l(\boldsymbol{r}, t), \Pi_i^m(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i} f^{lmn} \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \Pi_i^n(\boldsymbol{r}, t) \tag{18.34}$$

和

$$[\mathscr{G}^l(\boldsymbol{r}, t), V_i^m(\boldsymbol{r}', t)] = \mathrm{i} f^{lmn} \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') V_i^n(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\mathrm{i}}{g} \delta^{lm} \nabla_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$

这里∇_i 是对于 $\boldsymbol{r}$ 的微分算符. 因此 $\mathscr{G}^l$ 与哈密顿量 $H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}^3 r$ 对易,并且

$$\dot{\mathscr{G}}^l(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}[H, \mathscr{G}^l(\boldsymbol{r}, t)] = 0.$$

把 H 与 ψ 对易,我们得到 ψ 的运动方程. 同样,把 H 与 V_i^l 和 Π_i^l 对易,我们导出(18.6b)式中 $\nu = i$ 的结果,这里 i 可以是 1, 2, 3,但不能是 4.

我们注意到 $\mathrm{i}g\mathscr{G}^l$ 就是 $\nu = 4$ 时(18.6b)式的左边. 因此,为了与所有的拉格朗日运动方程相一致,在 $V_0 = 0$ 规范中,我们要求所有的态矢满足

$$\mathscr{G}^l \mid \rangle = 0. \tag{18.35}$$

在薛定谔表象中,算符 $V_i^l = V_i^l(\boldsymbol{r})$ 和 $\Pi_i^l = \Pi_i^l(\boldsymbol{r})$ 都是与 t 无关的. 态矢在 V_i^l 表示中是泛函

$$\psi(V_i) \equiv \langle V_i^l \mid \rangle. \tag{18.36}$$

在这一表示中

$$\Pi_i^l(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta V_i^l(\boldsymbol{r})}. \tag{18.37}$$

因此，哈密顿量 H 是

$$H = K + V, \tag{18.38}$$

这里

$$K = -\frac{1}{2}\int \frac{\delta}{\delta V_i^l(\boldsymbol{r})}\frac{\delta}{\delta V_i^l(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}^3 r \tag{18.39}$$

和

$$V = \int\left[\frac{1}{2}B_i^l B_i^l - gI_i^l V_i^l + \psi^\dagger \gamma_4(\gamma_i \nabla_i + m)\psi\right]\mathrm{d}^3 r.$$

由(18.28)得出(18.39)的算符 K 就是电场能量的积分

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r E_i^l E_i^l.$$

利用(18.33)，我们知道

$$g\mathscr{G}^l = -\nabla_i E_i^l + gf^{lmn}E_i^m V_i^n + g\psi^\dagger T^l \psi.$$

因此，约束(18.35)表示态矢 $|\rangle$ 满足高斯定律，它可以写作

$$(\nabla_i E_i^l - g\rho^l)\,|\rangle = 0$$

或

$$((D_i E_i)^l - g\rho_F^l)\,|\rangle = 0, \tag{18.40}$$

这里 D_i 是协变导数，它满足

$$(D_i E_i)^l \equiv \nabla_i E_i^l + gf^{lmn}V_i^m E_i^n,$$

ρ^l 是总的“荷”密度. 我们可以把 ρ^l 分解成二项

$$\rho^l = \rho_V^l + \rho_F^l$$

其中 ρ_V^l 是由规范场的非阿贝尔性质所带来的荷

$$\rho_V^l = f^{lmn}E_i^m V_i^n \tag{18.41}$$

而 ρ_F^l 系由于费米场

$$\rho_F^l = \psi^\dagger T^l \psi. \tag{18.42}$$

我们可以把 $V_i^l(\boldsymbol{r})$用傅里叶级数展开：

$$V_i^l(\boldsymbol{r}) = \sum{}' \sqrt{2/L^3}[x_i^l(\boldsymbol{k})\cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + y_i^l(\boldsymbol{k})\sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]$$

这里求和号 $\sum{}'$ 在半个 $\boldsymbol{k}$ 空间中进行，而 L^3 是系统的体积. 显然，$x_i^l(\boldsymbol{k})$ 在 $\boldsymbol{k}=0$ 和 $\boldsymbol{k}\neq 0$ 时都存在，而 $y_i^l(\boldsymbol{k})$只是在 $\boldsymbol{k}\neq 0$ 时存在. 对于每一不为零的波数对 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$，有 $3M$ 个 $x_i^l(\boldsymbol{k})$和 $3M$ 个 $y_i^l(\boldsymbol{k})$，因为 SU_N 群的 i 可以从 1 变到 3，而 l 从 1 变到 $M=N^2-1$. V_i^l 的厄米性意味着 $x_i^l(\boldsymbol{k})$和 $y_i^l(\boldsymbol{k})$也是厄米的

$$x_i^l(\boldsymbol{k})^\dagger = x_i^l(\boldsymbol{k}) \quad 和 \quad y_i^l(\boldsymbol{k})^\dagger = y_i^l(\boldsymbol{k}).$$

用这些变量，(18.39)式的 K 能够被写作

$$K = \frac{1}{2}\int d^3 r E_i^l E_i^l = -\frac{1}{2}\sum{}'\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_i^l(\boldsymbol{k})}\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y_i^l(\boldsymbol{k})}\right]^2\right\},$$

而哈密顿量(18.38)变为

$$H = -\frac{1}{2}\sum{}'\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_i^l(\boldsymbol{k})}\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y_i^l(\boldsymbol{k})}\right]^2\right\} + V. \tag{18.43}$$

把上面的讨论和 18.2 节中对于简单例子的 $\xi=0$ 规范的讨论相比较，我们看出简单例子中的 ξ 与 V_0 相似；同样，$\boldsymbol{P}=-\mathrm{i}\nabla$ 与 $\Pi_i^l=-\mathrm{i}\delta/\delta V_i^l$ 相似，而 $P_\theta|\rangle = 0$ 与 $\mathscr{G}|\rangle=0$ 相似. 正如在简单模型中一样，已知哈密顿算符在一种规范下的形式，就惟一地决定了它在其他规范下的形式，我们将看到，通过曲线坐标的引入可以消去约束(18.35)，这和由(18.23)过渡到(18.25)完全相似. 更进一步，在 19.6 节中将讨论到，对于协变规范，这一方法会导致一组相对论协变的费恩曼规则.

有用的是，并行地去考察上述哈密顿量和 7.6 节中讨论的量子孤立子. 我们注意到这两个哈密顿量(7.81)和(18.43)有非常相似的数学结构；两者都包含用一组笛卡儿坐标表示的拉普拉斯算符. 回忆一下当我们把任何一组笛卡儿坐标 x_1，x_2，…变到一组曲线坐标 q_1，q_2，…时

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}\dot{x} - U$$

变为

$$L = \frac{1}{2}\,\tilde{\dot{q}}M\dot{q} - U$$

这里 U 只依赖于 $x = x(q)$，M 的矩阵元由下式给出

$$M_{ab} = \frac{\partial x_c}{\partial q_a}\frac{\partial x_c}{\partial q_b}. \tag{18.44}$$

q_a 的共轭动量是 $p_a = \partial L/\partial\dot{q}_a = M_{ab}\dot{q}_b$. 从经典上看，哈密顿量是

$$H_{\mathrm{cl}} \equiv p_a\dot{q}_a - L = \frac{1}{2}\tilde{p}M^{-1}p + U \tag{18.45}$$

这里 p 是列矩阵，它的矩阵元是 p_a.

在量子力学中，哈密顿算符用笛卡儿坐标 x_1，x_2，…表示是

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_a} + U. \tag{18.46}$$

利用(7.113)，我们知道用曲线坐标表示它变为

$$H = \frac{1}{2\mathscr{J}}\,\tilde{p}M^{-1}\mathscr{J}p + U = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathscr{J}}\,\frac{\partial}{\partial q_a}\left(M_{ab}^{-1}\mathscr{J}\,\frac{\partial}{\partial q_b}\right) + U \tag{18.47}$$

这里 $\mathscr{J}$ 是由下式给出的雅可比

$$\mathscr{J} = \sqrt{\det M}. \tag{18.48}$$

[见下面的练习 3].

一旦已知哈密顿算符存在有一个笛卡儿形式(18.46)，则它在任何曲线坐标下的形式就惟一地决定了. 在经典的哈密顿量(18.45)中代入

$$P_a = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial q_a},$$

并加上雅可比因子,我们得到量子算符(18.47).在第7章中,这个方法使我们能够导出量子孤立子的哈密顿量(7.99).这里,同样的步骤也给我们提供一个通向其他规范的直接道路.

练习 1. 证明(18.34)中给出的等时对易子.

练习 2. 把希尔伯特空间限于满足(18.35)式的态矢内.证明运动方程(18.6a)—(18.6c)能够用海森伯方程(1.9)导出.

练习 3. 变换 $x_1, x_2, \cdots \rightarrow q_1, q_2 \cdots$ 的雅可比行列式是

$$\mathscr{J} = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots)}{\partial(q_1, q_2 \cdots)}.$$

证明它满足(18.48).

18.4 库仑规范

1. **坐标变换** 让我们从 $V_0 = 0$ 规范开始并考虑任意的组态 $V_i^l(x)$. 根据18.1节定理2,总存在一个规范变换矩阵 $U(x)$,它能把 $V_i^l(x)$ 变到库仑规范,反之亦然.为清楚起见,在库仑规范下的规范场用 $A_\mu^l(x)$ 表示,而在 $V_0 = 0$ 的规范下的场用 $V_i^l(x)$ 表示.这样,我们可以写出

$$V_i = UA_iU^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}U\,\nabla_i U^\dagger \tag{18.49}$$

这里正像在(18.7)中一样

$$V_i = T^l V_i^l,\ A_i = T^l A_i^l \tag{18.50}$$

并且因为在库仑规范下适合

$$\nabla_i A_i = 0.$$

根据(18.9)我们知道,由于 $V_0 = 0$, A_μ 的第四个分量满足

$$0 = UA_4U^\dagger + \frac{1}{g}U\dot{U}^\dagger. \tag{18.51}$$

对于 SU_2,由于有三个生成算子 $\frac{1}{2}\tau^l$,如在(11.33)中所示,任何

$\det U = 1$ 的 2×2 幺正矩阵 U 能够用三个角变量 θ_1、θ_2 和 θ_3 所表征，通常把这些叫做群参数. 对于 SU_3，有八个生成算子 $\frac{1}{2}\lambda^l$. 这样，任何一个行列式为 1 的 3×3 幺正矩阵 U 依赖于八个群参数 $\theta_1, \cdots, \theta_8$. 一般说来，对于 SU_N，我们需要 $M = N^2 - 1$ 个参数来确定 U 矩阵. 在场论中，这些 θ_α 是 x 的函数，通过它们 $U(\theta_\alpha)$ 也变成与 x 有关；因此我们有

$$U(x) = U(\theta_\alpha(x)). \tag{18.52}$$

在任何固定的时空点 x 上，全部有 $3M$ 个 $V_i^l(x)$，因为 i 从 1 变到 3 而 l 从 1 变到 M. 在库仑规范中，有 M 个约束由下式给出

$$\nabla_i A_i^l = 0.$$

因此，只有 $2M$ 个独立的 $A_i^l(x)$. 于是方程式(18.49)可以被看作把 $3M$ 个笛卡儿坐标 $V_i^l(\boldsymbol{r})$和 $2M$ 个曲线坐标 A_i^l 以及 M 个 θ_α 相联系的变换

$$V_i^l(x) \rightarrow A_i^l(x) \text{ 和 } \theta_\alpha. \tag{18.53}$$

2. **刚体转动**　对于 SU_2，三个群参数 θ_α 有熟悉的物理解释. 我们可以把它们选作欧拉角 a, b 和 c. 这样，(18.49)的 U 矩阵能够写作

$$U = e^{-\frac{i}{2}\tau_z b} e^{-\frac{i}{2}\tau_y a} e^{-\frac{i}{2}\tau_z c} \tag{18.54}$$

这里 τ_x, τ_y, τ_z 是通常的泡利矩阵.

我们记得欧拉角 a, b, c 起源于对刚体转动的描述. 如图 18.1 所示，

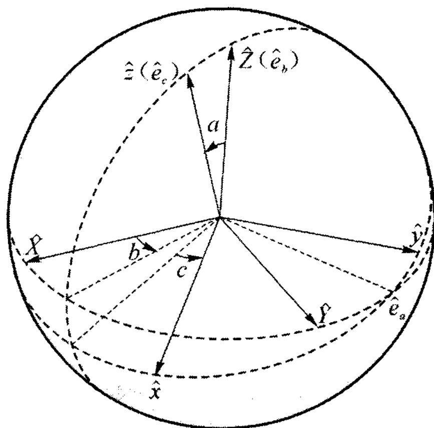


图 18.1　Σ_{lab}的基矢是 $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$，而 Σ_{body}的基矢是 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

有两个参考系,实验室坐标系 Σ_{lab} 和刚体坐标系 Σ_{body}. 每一个坐标系由一组三个正交的单位矢量的基所构成:对于 Σ_{lab} 它们是 $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ 而对于 Σ_{body} 是 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. 由 Σ_{lab} 变到 Σ_{body},我们按照"cab"的次序:首先绕轴

$$\hat{Z} \equiv \hat{e}_b,$$

转动一个角度 b,它把 y 轴从 $\hat{Y}$ 转到 $\hat{e}_a$,随后绕 $\hat{e}_a$ 转一个角 a,它把 z 轴从 $\hat{Z}$ 转到 $\hat{z}$,最后绕

$$\hat{z} \equiv \hat{e}_c.$$

转一个角度 c,相反的顺序"bac"就把 Σ_{body} 变到 Σ_{lab}.

现在考虑空间一点 P,它的坐标在 Σ_{lab} 中和 Σ_{body} 中分别为 X, Y, Z 和 x, y, z. 让我们定义

$$R \equiv \frac{1}{2}(\tau_x X + \tau_y Y + \tau_z Z)$$

和

$$r \equiv \frac{1}{2}(\tau_x x + \tau_y y + \tau_z z).$$

根据欧拉角的定义得出

$$R = U r U^{\dagger}$$

这里 U 由(18.54)给出. [我们将看到,R 相当于规范场情况下 V_i 的角色,而 r 相当于 A_i].

我们保持 Σ_{lab} 固定,而考虑改变 a, b 和 c 使 Σ_{body} 转动. 角速度矢量是

$$\dot{a}\hat{e}_a + \dot{b}\hat{e}_b + \dot{c}\hat{e}_c \tag{18.55}$$

这里,像通常一样,点表示时间导数. 让我们把 ω^l 和 Ω^l 分别代表上述矢量在 Σ_{body} 和 Σ_{lab} 中的分量. 下面的定义很有用

$$\mathrm{i}U^{\dagger}\dot{U} \equiv \omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{18.56}$$

和

$$\mathrm{i}\dot{U}U^{\dagger} \equiv \Omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Omega}.$$

于是,矩阵 ω 和 Ω 依下式相关

$$\Omega = U\omega U^{\dagger},$$

并且 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量就是前面提到过的 ω^l 和 Ω^l，它们按下式相关

$$\Omega^l = U^{lm}\omega^m \tag{18.57}$$

这里 U^{lm} 满足

$$U^{\dagger}\tau^l U = U^{lm}\tau^m, \tag{18.58}$$

τ^l 的分量就是(18.54)式中用过的泡利矩阵 τ_x，τ_y 和 τ_z. 方程式(18.58)表示联系 Σ_{body} 和 Σ_{lab} 的变换矩阵是

$$U = (U^{lm});$$

因此 U 是实的并且是正交的.

没有外力时一个刚体的拉格朗日量 L 仅仅是 ω^1，ω^2 和 ω^3 的函数：

$$L = L(\omega^l).$$

通过(18.55)，或者下面更明显地(18.66)式，L 也是 a，b，c 和 $\dot{a}$，$\dot{b}$，$\dot{c}$ 的函数. a，b 和 c 的共轭动量由下式给出

$$p_a = \frac{\partial\omega^l}{\partial\dot{a}}\frac{\partial L}{\partial\omega^l},\quad p_b = \frac{\partial\omega^l}{\partial\dot{b}}\frac{\partial L}{\partial\omega^l}$$

和

$$p_c = \frac{\partial\omega^l}{\partial\dot{c}}\frac{\partial L}{\partial\omega^l}. \tag{18.59}$$

众所周知，L 对 ω^l 的导数就是角动量矢量 j^l 在 Σ_{body} 中的分量：

$$j^l = \frac{\partial L}{\partial\omega^l}. \tag{18.60}$$

这同一个矢量在 Σ_{lab} 中看起来分量是 J^l. 因此我们有

$$\hat{x}j^1 + \hat{y}j^2 + \hat{z}j^3 = \hat{X}j^1 + \hat{Y}j^2 + \hat{Z}j^3 \equiv \boldsymbol{J} \tag{18.61}$$

或

$$J^l = U^{lm}j^m, \tag{18.62}$$

这和(18.57)类似.

在量子理论中，$\boldsymbol{J}$ 是转动算符；a，b，c 的共轭动量是导数算符

$$p_a = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a},\ p_b = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial b} \quad 和 \quad p_c = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial c}.$$

在 Σ_{lab}坐标系中,角动量的分量满足通常的对易关系

$$[J^l,\ J^m] = \mathrm{i}\varepsilon^{lmn}J^n. \tag{18.63}$$

我们现在将证明 *

$$[J^l,\ j^m] = 0$$

和

$$[j^l,\ j^m] = -\mathrm{i}\varepsilon^{lmn}j^n. \tag{18.64}$$

证明. 由(18.61)我们有

$$j^1 = \hat{x}\cdot\boldsymbol{J} = \hat{x}^lJ^l,$$

$$j^2 = \hat{y}\cdot\boldsymbol{J} = \hat{y}^lJ^l$$

和

$$j^3 = \hat{z}\cdot\boldsymbol{J} = \hat{z}^lJ^l,$$

这里,$\hat{x}^l$, $\hat{y}^l$ 和$\hat{z}^l$ 是$\hat{x}$, $\hat{y}$和$\hat{z}$在 Σ_{lab}坐标系中的分量.因为$\hat{x}$, $\hat{y}$和$\hat{z}$是固定在刚体坐标系中的单位矢量,在转动下,它们像 $\boldsymbol{J}$ 一样变换;都像矢量那样转动.因此,标量积$\hat{x}\cdot\boldsymbol{J}$, $\hat{y}\cdot\boldsymbol{J}$ 和$\hat{z}\cdot\boldsymbol{J}$ 是不变量,这就给出(18.64)的上面方程.

同样的性质也可以解析地表示出来;我们有

$$[J^l,\ \hat{x}^m] = \mathrm{i}\varepsilon^{lmn}\hat{x}^n.$$

联合(18.63),就得出

$$\begin{aligned}[J^l,\ \hat{x}^mJ^m] &= [J^l,\ \hat{x}^m]J^m + \hat{x}^m[J^l,\ J^m] \\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{lmn}(\hat{x}^nJ^m + \hat{x}^mJ^n) = 0,\end{aligned} \tag{18.65}$$

因此得出 $[J^l,\ j^1]=0$,并类似地有$[J^l,\ j^2]=[J^l,\ j^3]=0$. j^1 和j^2 之间的对易子是

$$\begin{aligned}[j^1,\ j^2] &= [\hat{x}^mJ^m,\ \hat{y}^lJ^l] \\ &= [\hat{x}^mJ^m,\ \hat{y}^l]J^l + \hat{y}^l[J^l,\ \hat{x}^mJ^m],\end{aligned}$$

---

* 注意(18.64)中的负号.

由于(18.65)它变为

$$[\hat{x}^m J^m,\ \hat{y}^l]J^l = \hat{x}^m[J^m,\ \hat{y}^l]J^l$$
$$= \mathrm{i}\hat{x}^m \varepsilon^{mln}\hat{y}^n J^l = -\mathrm{i}\hat{z}^l J^l = -\mathrm{i}j^3,$$

这就建立了(18.64)中的下方程. 在下一节中,我们将把这些基本性质运用于非阿贝尔规范场,并证明怎样可以消去在(18.53)中对这些角变量 θ_a 的依赖关系.

练习 1.　用欧拉角 $a,\ b,\ c$ 和它们的时间导数,证明 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量由下式给出

$$\omega^1 = \dot{a}\sin c - \dot{b}\sin a\cos c,$$
$$\omega^2 = \dot{a}\cos c + \dot{b}\sin a\sin c,$$
$$\omega^3 = \dot{b}\cos a + \dot{c} \tag{18.66}$$

和

$$\Omega^1 = -\dot{a}\sin b + \dot{c}\sin a\cos b,$$
$$\Omega^2 = \dot{a}\cos b + \dot{c}\sin a\sin b,$$
$$\Omega^3 = \dot{b} + \dot{c}\cos a.$$

练习 2.　矩阵 $U = (U^{lm})$ 由(18.58)式定义,它把任意矢量在刚体坐标系中的分量 r^m 和同一矢量在实验室坐标系中的分量 R^l 联系起来. 证明用欧拉角 $a,\ b,\ c$ 表示的矩阵 U 是

$$U=\begin{pmatrix} \cos a\cos b\cos c-\sin b\sin c & -\cos a\cos b\sin c-\sin b\cos c & \sin a\cos b \\ \cos a\sin b\cos c+\cos b\sin c & -\cos a\sin b\sin c+\cos b\cos c & \sin a\sin b \\ -\sin a\cos c & \sin a\sin c & \cos a \end{pmatrix}. \tag{18.67}$$

练习 3.　证明

$$j^1 = \sin c\,p_a - \frac{\cos c}{\sin a}p_b + \cos c\,\frac{\cos a}{\sin a}p_c,$$
$$j^2 = \cos c\,p_a + \frac{\sin c}{\sin a}p_b - \sin c\,\frac{\cos a}{\sin a}p_c,$$
$$j^3 = p_c, \tag{18.68}$$

和

$$J^1 = -\sin b p_a - \cos b \frac{\cos a}{\sin a} p_b + \frac{\cos b}{\sin a} p_c,$$

$$J^2 = \cos b p_a - \sin b \frac{\cos a}{\sin a} p_b + \frac{\sin b}{\sin a} p_c,$$

$$J^3 = p_b,$$

这里

$$p_a = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a}, \quad p_b = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial b} \quad 和 \quad p_c = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial c}.$$

练习 4. 直接利用练习 3 给出的角动量算符的表示式证明(18.63)—(18.64)的对易关系.

3. *SU_2 规范场(经典)* 让我们回到非阿贝尔规范场理论,并首先考虑 SU_2 群,因此(18.53)中的 θ_α 就是欧拉角 a, b 和 c;即

$$\theta_1(x) = a(x), \ \theta_2(x) = b(x) \quad 和 \quad \theta_3(x) = c(x)$$

这里,在场论的情况下,这些角都是时空位置 x 的函数. 通过(18.54),矩阵 $U(a, b, c)$ 也变为与 x 有关的. 现在,我们将遵照(18.45)—(18.48)中一般方法的轮廓. 因为(18.43)给出了在笛卡儿坐标下的 $V_0 = 0$ 规范的哈密顿量. 库仑规范的哈密顿算符就能用如下的方法导出,首先写下它的经典的表式,随后令所有动量 p_a 为 $-i\partial/\partial q_a$ 并按照(18.47)的顺序排列这些算符,加上雅可比行列式(18.48). 最后,用约束(18.40)消去那些角坐标 $a(x)$, $b(x)$ 和 $c(x)$. 结果就是库仑规范下的量子理论. 这一节,我们要导出经典的库仑哈密顿量(下面(18.95));量子算符将在下一节中给出(下面(18.97)).

以下,SU_2 变换将被称作“同位旋”转动,而同位旋矢量将用箭头表示. 生成算符 T^l 是泡利矩阵,用同位旋矢量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}$ 表示;于是(18.50)变为

$$V_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_i \quad 和 \quad A_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_i,$$

$\mathbf{A}_i$ 满足横波条件

$$\nabla_i \mathbf{A}_i = 0.$$

矩阵 V_i 和 A_i 通过(18.49)式相关

$$V_i = UA_iU^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}U\nabla_iU^\dagger.$$

第四个分量，$A_4 = \mathrm{i}A_0$，由(18.51)给出

$$A_4 = -\frac{1}{g}\dot{U}^\dagger U = \frac{1}{g}U^\dagger\dot{U},$$

这用了(18.56)给出的矩阵 ω，就是 $A_4 = -\mathrm{i}\omega/g$，或 $A_0 = -\omega/g$. 因此，用同位旋矢量的形式，我们写出

$$\boldsymbol{A}_0 = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{g}. \tag{18.69}$$

下面的表概括了库仑规范下用到的一些概念与时间轴(即 $V_0 = 0$)规范相比较. 如表所示，令时间轴规范下的电场和磁场为 $\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$，库仑规范下为 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_i$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}_i$. 根据(18.11)，电场和磁场在(18.9)的规范变换下，像同位旋矢量那样齐次变换；因此，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{E}_i = U\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}_i\right)U^\dagger$$

表 18.1

	时间轴规范	库仑规范
规范场	$\boldsymbol{V}_i$(no condition)	$\boldsymbol{A}_i(\nabla_i\boldsymbol{A}_i = 0)$
	$\boldsymbol{V}_0 = 0$	$\boldsymbol{A}_0 = -\boldsymbol{\omega}/g$
协变导数	$D_i = \nabla_i + g\boldsymbol{V}_i\times$	$\mathscr{D}_i = \nabla_i + g\boldsymbol{A}_i\times$
电场	$\boldsymbol{E}_i = -\dot{\boldsymbol{V}}_i$	$\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = -\dot{\boldsymbol{A}}_i + \frac{1}{g}\mathscr{D}_i\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}} - \nabla_i\boldsymbol{\phi}$
磁场(i,j,k 循环)	$\boldsymbol{B}_i = \nabla_j\boldsymbol{V}_k - \nabla_k\boldsymbol{V}_j + g\boldsymbol{V}_j\times\boldsymbol{V}_k$	$\mathscr{B}_i = \nabla_j\boldsymbol{A}_k - \nabla_k\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{\mathscr{E}}\boldsymbol{A}_j\times\boldsymbol{A}_k$
共轭动量	$\Pi_i = -\boldsymbol{E}_i$	$\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} = -\boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}}$
费米场	ψ	ψ_c
电荷密度	$\boldsymbol{\rho}_V + \boldsymbol{\rho}_F$	$\boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_F$
这里	$\boldsymbol{\rho}_F = \psi^\dagger\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi$	$\boldsymbol{\sigma}_F = \psi_c^\dagger\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi_c$
和	$\boldsymbol{\rho}_V = \boldsymbol{V}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i$	$\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}$
高斯定律	$D_i\boldsymbol{E}_i = g\boldsymbol{\rho}_F$	$\mathscr{D}_i\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = g\boldsymbol{\sigma}_F$
即	$\nabla_i\boldsymbol{E}_i = g(\boldsymbol{\rho}_V + \boldsymbol{\rho}_F)$	$-\mathscr{D}_i\nabla_i\boldsymbol{\phi} = g(\boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_F)$

和

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_i = U\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}_i\right)U^\dagger.$$

由(18.58)我们还有

$$U^\dagger \tau^l U = U^{lm}\tau^m,$$

因此,$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\mathscr{E}}$, $\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{\mathscr{B}}$的分量满足

$$E_i^l = U^{lm}\mathscr{E}_i^m \quad 和 \quad B_i^l = U^{lm}\mathscr{B}_i^m. \tag{18.70}$$

用欧拉角表示的 U^{lm} 由(18.67)式给出,它满足

$$U^{lm}U^{ln} = U^{ml}U^{nl} = \delta^{mn}$$

用刚体转动这一相似问题的语言,我们可以把 $V_0=0$ 规范作为"实验室"坐标系,而库仑规范作为"刚体"坐标系. 于是上述的 E_i^l 和 $\mathscr{E}^l$ 代表同一个同位旋矢量的分量在不同的坐标系中的表现对于 B_i^l 和 $\mathscr{B}_i^l$ 也同样可以这样看.

(i) 为简单计,让我们假定没有费米场 ψ. [下面(ii)中将推广到包含 ψ]. 拉格朗日量和哈密顿量二者都是规范不变的. 将(18.70)代入(18.27)和(18.29),并令 $\psi=0$, 我们看到

$$H = \int \mathscr{H}\mathrm{d}^3r = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\mathscr{E}}_i\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}_i+\boldsymbol{\mathscr{B}}_i\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}_i)\mathrm{d}^3r \tag{18.71}$$

和

$$L = \int \mathscr{L}\mathrm{d}^3r = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\mathscr{E}}_i\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}_i-\boldsymbol{\mathscr{B}}_i\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}_i)\mathrm{d}^3r.$$

由(18.69)和表(18.1),或(18.5),我们知道

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = -\dot{\boldsymbol{A}}_i - (\boldsymbol{\nabla}_i + g\boldsymbol{A}_i\times)\boldsymbol{A}_0 = -\dot{\boldsymbol{A}}_i + \frac{1}{g}\mathscr{D}_i\boldsymbol{\omega} \tag{18.72}$$

这里

$$\mathscr{D}_i \equiv \boldsymbol{\nabla}_i + g\boldsymbol{A}_i\times \tag{18.73}$$

是库仑规范下的协变导数,因此

$$\mathscr{D}_i\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\omega}$$

其中叉号代表通常的同位旋矢量积.

我们的工作是要把 H 表示为适当的广义坐标和它们的共轭动量的函数. 在库仑规范中,广义坐标是横场 A_i^l 和欧拉角 a , b 和 c. 将(18.72)代入(18.71)所给出的拉格朗日量 L,我们注意到 L 中对 $\dot{a}$, $\dot{b}$ 和 $\dot{c}$ 的依赖关系完全是通过电场对 $\boldsymbol{\omega}$ 的依赖关系来的. 这样,对刚体转动所导出的(18.59)—(18.68)可直接应用于这里. 根据(18.68),欧拉角的共轭动量 p_a , p_b 和 p_c 是同位旋矢量 $\boldsymbol{j} \equiv \delta L/\delta\boldsymbol{\omega}$ 的线性函数. 把 L 对 $\boldsymbol{\omega}$ 微分并利用(18.72),我们发现

$$\boldsymbol{j} = \frac{\delta \mathscr{E}_i^l}{\delta \boldsymbol{\omega}} \frac{\partial L}{\partial \mathscr{E}_i^l} = -\frac{1}{g}\mathscr{D}_i \boldsymbol{\mathscr{E}}_i. \tag{18.74}$$

根据表 18.1,在 $V_0 = 0$ 规范中,相应的协变导数是

$$D_i \equiv \nabla_i + g\boldsymbol{V}_i \times.$$

由(18.28)和(18.33)得出

$$J^l = -\frac{1}{g}(D_i\boldsymbol{E}_i)^l.$$

因为 $\mathscr{D}_i\boldsymbol{\mathscr{E}}_i$ 和 $D_i\boldsymbol{E}_i$ 是协变表式,很容易证明和(18.70)相似

$$J^l = U^{lm} j^m, \tag{18.75}$$

这和刚体转动问题中的(18.62)完全相似[见下面的练习].

为了导出 $\boldsymbol{A}_i$ 的共轭动量,我们可以在约束 $\nabla_i \dot{\boldsymbol{A}}_i = 0$ 的条件下把拉格朗日量 L 对 $\dot{\boldsymbol{A}}_i$ 微分. 我们将看到结果是 *

---

* 用矩阵表示

$$\langle \boldsymbol{r} \mid \nabla_i \mid \boldsymbol{r}' \rangle = \frac{\partial}{\partial r_i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{\partial}{\partial r_i'}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\langle \boldsymbol{r} \mid \nabla^2 \mid \boldsymbol{r}' \rangle = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\langle \boldsymbol{r} \mid \nabla^{-2} \mid \boldsymbol{r}' \rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\frac{1}{8\pi^3}\int \frac{1}{\boldsymbol{q}^2} e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} d^3 q, \tag{18.76a}$$

所以

$$\int \langle \boldsymbol{r} \mid \nabla^2 \mid \boldsymbol{r}'' \rangle \langle \boldsymbol{r}'' \mid \nabla^{-2} \mid \boldsymbol{r}' \rangle d^3 r'' = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{18.76b}$$

紧凑形式 $F = \nabla^{-2}G$ 的意义是

$$F(\boldsymbol{r}) = \int \langle \boldsymbol{r} \mid \nabla^{-2} \mid \boldsymbol{r}' \rangle G(\boldsymbol{r}) d^3 \boldsymbol{r}'.$$

$$-\mathscr{E}_i^{\text{tr}} \equiv \dot{\boldsymbol{A}}_i - (\delta_{ij} - \nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)(\boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{\omega}), \tag{18.76}$$

它显然满足

$$\nabla_i \mathscr{E}_i^{\text{tr}} = 0.$$

为了导出(18.76),我们注意到(18.72)与(18.76)之和是一个全梯度

$$\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^{\text{tr}} = \nabla_i \left[\frac{1}{g}\boldsymbol{\omega} + \nabla^{-2}\nabla_j(\boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{\omega}) \right] \equiv -\nabla_i \boldsymbol{\phi}.$$

因此,正如在(6.17)—(6.19)中一样,电场 $\mathscr{E}_i$ 能够被分解成两项

$$\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_i^{\text{tr}} - \nabla_i \boldsymbol{\phi} \tag{18.77}$$

这里,因为 $\nabla_j \boldsymbol{A}_j = 0$ 和 $\boldsymbol{A}_0 = -\boldsymbol{\omega}/g$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= -\frac{1}{g}\boldsymbol{\omega} - \nabla^{-2}(\boldsymbol{A}_j \times \nabla_j \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{A}_0 + g\nabla^{-2}(\boldsymbol{A}_j \times \nabla_j \boldsymbol{A}_0). \end{aligned} \tag{18.78}$$

通过分部积分,(18.71)变为

$$H = \frac{1}{2}\int [(\mathscr{E}_i^{\text{tr}})^2 + (\nabla_i \boldsymbol{\phi})^2 + (\mathscr{B}_i)^2] \mathrm{d}^3 r$$

和

$$L = \frac{1}{2}\int [(\mathscr{E}_i^{\text{tr}})^2 + (\nabla_i \boldsymbol{\phi})^2 - (\mathscr{B}_i)^2] \mathrm{d}^3 r. \tag{18.79}$$

保持 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i$ 固定,但改变 $\dot{\boldsymbol{A}}_i$ 以使 L 发生变化,我们发现

$$\delta L = -\int \mathscr{E}_i^{\text{tr}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{A}}_i \mathrm{d}^3 r,$$

这里,因为 $\nabla_i \mathscr{E}_i^{\text{tr}} = 0$,积分只和 $\delta \dot{\boldsymbol{A}}_i$ 的非散度部分有关.这样,正像在(6.21)中,$\boldsymbol{A}_i$ 的共轭动量就是(18.76)所给出的

$$\boldsymbol{\Pi}_i^{\text{tr}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{A}}_i} = -\mathscr{E}_i^{\text{tr}} \tag{18.80}$$

在这里约束 $\nabla_i \delta \dot{\boldsymbol{A}}_i = 0$ 已经自动地考虑在内了.把(18.77)代入(18.74),我们发现

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= -\frac{1}{g}(\nabla_i + g\boldsymbol{A}_i \times)(\mathscr{E}_i^{\text{tr}} - \nabla_i \boldsymbol{\phi}) \\ &= -\boldsymbol{A}_i \times \mathscr{E}_i^{\text{tr}} + \frac{1}{g}\nabla_i \mathscr{D}_i \boldsymbol{\phi}. \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\Pi}_i^{tr}=-\boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{tr}$，上述表式能够被写作 *

$$\boldsymbol{\phi}=g(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i^{tr}). \tag{18.81}$$

算符 $(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}$ 是 $\nabla_i\mathscr{D}_i$ 的逆算符. 定义如下的 λ 很有用

$$\nabla^2+g\lambda=\nabla_i\mathscr{D}_i=\mathscr{D}_i\nabla_i, \tag{18.82}$$

这里**，由于(18.73)

$$\lambda=\nabla_i(\boldsymbol{A}_i\times)=\boldsymbol{A}_i\times\nabla_i, \tag{18.83}$$

和前面一样，$\times$ 表示同位旋空间的矢量积. 按 g 的幂级数展开，我们有

$$(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}=(\nabla^2+g\lambda)^{-1}=\nabla^{-2}-g\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}$$
$$+g^2\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}-\cdots$$

和

$$(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}(-\nabla^2)(\nabla_j\mathscr{D}_j)^{-1}$$
$$=-\nabla^{-2}+2g\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}-3g^2\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}+\cdots \tag{18.84}$$

这在以后要用到.

在没有费米场时，根据(18.33)，生成算子 $\mathscr{G}^l$ 和 J^l 是相等的. 就经典理论而言，约束(18.35)就是

$$J^l=0; \tag{18.85}$$

考虑到(18.75)，因此 $j^l=0$. 在(18.81)式中令 $\boldsymbol{j}=0$，我们得到

$$\boldsymbol{\phi}=-g(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}\boldsymbol{\sigma}_A \tag{18.86}$$

---

* 方程式(18.81)是下述方程的紧凑形式

$$\phi^l(\boldsymbol{r})=g\int\langle l,\boldsymbol{r}\mid(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}\mid l',\boldsymbol{r}'\rangle[j^{l'}(\boldsymbol{r}')-\varepsilon^{l'mn}A_i^m(\boldsymbol{r}')\Pi_i^{tr}(\boldsymbol{r}')^n]\mathrm{d}^3r'$$

这里：

$$\langle l,\boldsymbol{r}\mid\mathscr{D}_i\mid l',\boldsymbol{r}\rangle=[\delta^{ll'}\nabla_i-g\varepsilon^{ll'm}A_i^m(\boldsymbol{r})]\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\langle l,\boldsymbol{r}\mid\nabla_i\mathscr{D}_i\mid l',\boldsymbol{r}'\rangle=[\delta^{ll'}\nabla^2-g\varepsilon^{ll'm}A_i^m(\boldsymbol{r})\nabla_i]\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

并且 $(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}$ 满足

$$\int\langle l,\boldsymbol{r}\mid\nabla_i\mathscr{D}_i\mid l'',\boldsymbol{r}''\rangle\langle l'',\boldsymbol{r}''\mid(\nabla_j\mathscr{D}_j)^{-1}\mid l',\boldsymbol{r}'\rangle\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}''=\delta^{ll'}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

** 即

$$\langle l,\boldsymbol{r}\mid\lambda\mid l',\boldsymbol{r}'\rangle=\varepsilon^{lml'}A_j^m\,\nabla_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{18.83a}$$

这里

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{A}_i \times \boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} \tag{18.87}$$

是 $\boldsymbol{A}_i$ 所携带的“荷”. 代(18.87)入(18.79)所给出的 H,我们导出没有费米场的经典库仑规范哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\int[\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r})^2 + \mathscr{B}_i(\boldsymbol{r})^2]\mathrm{d}^3 r + \frac{1}{2}g^2\int \sigma_A^l(\boldsymbol{r})$$
$$\cdot \langle l, \boldsymbol{r} \mid (\boldsymbol{\nabla}_i\mathscr{D}_i)^{-1}(-\boldsymbol{\nabla}^2)(\boldsymbol{\nabla}_j\mathscr{D}_j)^{-1} \mid l', \boldsymbol{r}'\rangle$$
$$\cdot \sigma_A^{l'}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r'. \tag{18.88}$$

(ii) 其次,我们把上述讨论推广到包含费米子. 像在表 18.1 中一样,令 ψ 为 $V_0 = 0$ 规范下的费米场,ψ_c 属于库仑规范;它们的关系是

$$\psi = U\psi_c,$$

这里 U 由(18.49)规定. 根据(18.58),我们有

$$\psi^\dagger \tau^l \gamma_4 \gamma_\mu \psi = U^{lm}\psi_c^\dagger \tau^m \gamma_4 \gamma_\mu \psi_c. \tag{18.89}$$

利用(18.27)—(18.29),并考虑到

$$\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_i\left(\boldsymbol{\nabla}_i - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V}_i\right)\psi = \psi_c^\dagger \gamma_4 \gamma_i\left(\boldsymbol{\nabla}_i - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_i\right)\psi_c,$$

$$\boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{\mathscr{E}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}_i \quad \text{和} \quad \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{\mathscr{B}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}_i,$$

我们看到在包含了费米子以后,(18.71)由下式代替

$$H = \int\Big\{\frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathscr{E}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}_i + \boldsymbol{\mathscr{B}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}_i]$$
$$+ \psi_c^\dagger \gamma_4\left[\gamma_j\left(\boldsymbol{\nabla}_j - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_j\right) + m\right]\psi_c\Big\}\mathrm{d}^3 r \tag{18.90}$$

和

$$L = \int\Big\{\frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathscr{E}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}_i - \boldsymbol{\mathscr{B}}_i \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}_i]$$
$$- \psi_c^\dagger \gamma_4\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu\right) + m\right]\psi_c\Big\}\mathrm{d}^3 r.$$

我们必须把 H 转换成广义坐标和它们的共轭动量的函数. 像以前一

样,由于 L 对广义速度 $\dot{\boldsymbol{A}}_i$, $\dot{a}$, $\dot{b}$ 和 $\dot{c}$ 的依赖完全包括在 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_i\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}_i$ 中,因此,$\boldsymbol{A}_i$ 的共轭动量仍然是由(18.80)所给出的 $\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}$,而欧拉角 a, b 和 c 的共轭动量是 P_a, P_b 和 P_c,它们通过(18.68)与(18.74)的 $\boldsymbol{j}$ 相联. 这样,(18.72)—(18.78)和(18.80)—(18.84)仍然不变;即同以前一样,由(18.77),(18.80)和(18.81)我们有

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = \boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}} - \nabla_i\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}} = -\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}$$

和

$$-\nabla_i\mathscr{D}_i\boldsymbol{\phi} = g(-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}). \tag{18.91}$$

但是,(18.85)必须代以

$$\mathscr{G}^l = J^l + \psi^\dagger\frac{1}{2}\tau^l\psi = 0,$$

它是约束(18.35)的经典表式. 利用(18.75)和(18.89),我们可以把它重写作

$$j^m + \psi_c^\dagger\frac{1}{2}\tau^m\psi_c = 0.$$

代入(18.91),我们发现,(18.86)式由下式代替

$$\boldsymbol{\phi} = -g(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{18.92}$$

这里,像在表 18.1 中一样

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_F$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}$ 是规范场所携带的荷,和以前一样,而 $\boldsymbol{\sigma}_F$ 是费米子携带的

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \psi_c^\dagger\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi_c. \tag{18.93}$$

因为 $\mathscr{D}_i\nabla_i = \nabla_i\mathscr{D}_i$ 和

$$\mathscr{D}_i\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = \mathscr{D}_i\boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}} - \mathscr{D}_i\nabla_i\boldsymbol{\phi} = g\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}} - \nabla_i\mathscr{D}_i\boldsymbol{\phi},$$

利用(18.91)—(18.93),我们得到

$$\mathscr{D}_i\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = g\boldsymbol{\sigma}_F, \tag{18.94}$$

它就是高斯定律.

经典的哈密顿函数可以通过代(18.92)和 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_i = -\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} - \nabla_i \boldsymbol{\phi}$ 入(18.90)中的 H 而得到:

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r})^2 + \boldsymbol{\mathscr{B}}_i(\boldsymbol{r})^2] + \psi_c^\dagger \gamma_4 \left[r_i \left(\nabla_i - \mathrm{i} \frac{1}{2} g \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_i \right) + m \right] \psi_c \right\} \mathrm{d}^3 r + \frac{1}{2} g^2 \int \sigma^l(\boldsymbol{r}) \langle l, \boldsymbol{r} \mid (\nabla_i \mathscr{D}_i)^{-1} (-\nabla^2) \cdot (\nabla_j \mathscr{D}_j)^{-1} \mid l', \boldsymbol{r}' \rangle \sigma^{l'}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}'. \tag{18.95}$$

练习. 利用

$$-gj = \mathscr{D}_i \boldsymbol{\mathscr{E}}_i = (\nabla_i + g\boldsymbol{A}_i \times) \boldsymbol{\mathscr{E}}_i,$$

$$-g\boldsymbol{J} = D_i \boldsymbol{E}_i = (\nabla_i + g\boldsymbol{V}_i \times) \boldsymbol{E}_i$$

和(18.70),证明(18.75)成立.

4. **量子哈密顿量** 在库仑规范下费米场之间的反对易关系就是通常的那一种

$$\{\psi_c(\boldsymbol{r}, t), \psi_c^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r})$$

和

$$\{\psi_c(\boldsymbol{r}, t), \psi_c(\boldsymbol{r}', t)\} = \{\psi_c^\dagger(\boldsymbol{r}, t), \psi_c^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = 0.$$

由于横向条件

$$\nabla_i \boldsymbol{A}_i = \nabla_i \boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} = 0,$$

像在(6.29)中一样,对于规范场我们有

$$[A_i(\boldsymbol{r}, t)^l, \Pi_j^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r}', t)^m] = \mathrm{i}\delta^{lm}(\delta_{ij} - \nabla^{-2} \nabla_i \nabla_j) \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{18.96}$$

和

$$[A_i(\boldsymbol{r}, t)^l, A_j(\boldsymbol{r}', t)^m] = [\Pi_i^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r}, t)^l, \Pi_j^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r}', t)^m] = 0.$$

在 ψ_c 和 $\boldsymbol{A}_i$(或 $\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}$)之间的等时对易子等于零. 把(18.47)—(18.48)应用于经典哈密顿量(18.95)上,我们导出**库仑规范量子哈密顿量:**

$$
\begin{aligned}
H = \int\Big\{ & \frac{1}{2}\mathscr{J}^{-1}\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} \cdot \mathscr{J}\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} + \frac{1}{2}\mathscr{B}_i^2 \\
& + \psi_c^\dagger\gamma_4\Big[\gamma_i\Big(\nabla_i - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}g_0\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_i\Big) + m\Big]\psi_c\Big\}\,\mathrm{d}^3 r \\
& + \frac{1}{2}g_0^2\int\mathscr{J}^{-1}\sigma^l(\boldsymbol{r}) \\
& \cdot\langle l,\ \boldsymbol{r}\mid(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}(-\nabla^2)(\nabla_j\mathscr{D}_j)^{-1}\mid l',\ \boldsymbol{r}'\rangle \\
& \cdot\mathscr{J}\sigma^{l'}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3 r\,\mathrm{d}^3 r'
\end{aligned}
\tag{18.97}
$$

这里，为了符号清楚起见，我们把经典哈密顿量中的耦合常数 g 用 g_0 来代替，后者在量子理论中表示未重正化的耦合常数，除了这一点变化之外，所有其他符号都和以前一样；即，我们有

$$
\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} = -\boldsymbol{\mathscr{E}}_i^{\mathrm{tr}},\quad \mathscr{D}_i = \nabla_i + g_0\boldsymbol{A}_i\times,
$$

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}} + \psi_c^\dagger\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi_c = -\boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{tr}}\times\boldsymbol{A}_i + \psi_c^\dagger\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\psi_c = \boldsymbol{\sigma}^\dagger \tag{18.98}
$$

和

$$
\mathscr{B}_i = \nabla_j\boldsymbol{A}_k - \nabla_k\boldsymbol{A}_j + g_0\boldsymbol{A}_j\times\boldsymbol{A}_k
$$

其中 $i,\ j,\ k$ 是循环的. 像在(18.48)中一样，$\mathscr{J}$ 是雅可比行列式. [对于非阿贝尔规范场理论，文献上常把它称作法捷耶夫-波波夫行列式]. 对雅可比行列式求值是直接的但颇为冗长；结果 * 就是在(18.97)中我们可以写作

$$
\mathscr{J} = \det\nabla_i\mathscr{D}_i, \tag{18.99}
$$

这里$\nabla_i\mathscr{D}_i$ 代表矩阵，它的矩阵元是

$$
\langle l,\ \boldsymbol{r}|\nabla_i\mathscr{D}_i|l',\ \boldsymbol{r}'\rangle.
$$

重要的是要保持上述哈密顿量中给出算符的顺序. 由 SU_2 推广到 N 为任意时的 SU_N 是很简单的. 我们只需要在上面的讨论中，用 T^l 代替 $\frac{1}{2}\tau^l$ 和用 f^{lmn} 代替 ϵ^{lmn}.

---

* 详细情况见 *Phys Rev*, 1980, **D22**:939.

18.5 真空的抗色电(反屏蔽)性质

现在,我们到了要研究 QCD 真空的抗色电(即反屏蔽)性质的时候了,这在第 17 章中已经强调过. 在这一节中,我们只考察最低级的微扰计算. 高级效应将在下一节中讨论.

1. SU_2 **规范理论** 考虑两个外部荷分布$\underset{\sim}{\sigma}_1(\boldsymbol{r})$和$\underset{\sim}{\sigma}_2(\boldsymbol{r})$的特殊情况,它们分别位于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$,如图 18.2 所示. 举例来说,这些荷分布可能是由某些重的费米子所组成. 为了符号清楚,在这一节中,同位旋矢量将用波动线表示,而空间矢量用黑体表示. 令 $E(r_{12})$表示把这两个荷分布从∞移到很大但是有限的距离 r_{12}时所要作的功. 我们假定

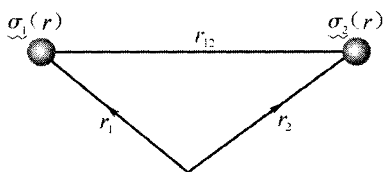


图 18.2 两个外部"荷"分布,$\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{r})$它们离开一个很大的距离 r_{12}

$$r_{12} = |\, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \,| >>> m^{-1} \text{ 或 } d,$$

这里 m 是费米子质量,d 是每一个荷分布的延伸范围. 在极限 $m\to\infty$ 的情况下,$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 可以当作 c 数. 我们将先略去费米子的自由度,只留下那些需要用来表征荷分布$\underset{\sim}{\sigma}_1$ 和$\underset{\sim}{\sigma}_2$ 的量,即,它们的位置 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 和它们的荷

$$\underset{\sim}{q}_1 = \int \underset{\sim}{\sigma}_1 \mathrm{d}^3 r \quad 和 \quad \underset{\sim}{q}_2 = \int \underset{\sim}{\sigma}_2 \mathrm{d}^3 r. \tag{18.100}$$

由于它们的非阿贝尔性质,q_1 和 q_2 是厄米矩阵;它们满足对易关系

$$[q_1^l,\ q_1^m] = \mathrm{i}\varepsilon^{lmn} q_1^n,$$

$$[q_2^l,\ q_2^m] = \mathrm{i}\varepsilon^{lmn} q_2^n$$

并且对于非重叠的分布(即 r_{12}足够大)

$$[q_1^l,\ q_2^m] = 0.$$

让我们取库仑规范*. 这时哈密顿量(18.97)变为

$$H = \int \left(\frac{1}{2} \mathscr{I}^{-1} \underset{\sim}{\Pi}_i^{\text{tr}} \mathscr{I} \underset{\sim}{\Pi}_i^{\text{tr}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathscr{B}}_i^2 \right) \mathrm{d}^3 r + H_{\text{Coul}} \tag{18.101}$$

这里

$$\begin{aligned} H_{\text{Coul}} = & \frac{1}{2} g_0^2 \int \mathscr{I}^{-1} \sigma^l (\boldsymbol{r}) \\ & \cdot \langle l, \boldsymbol{r} \mid (\boldsymbol{\nabla}_i \mathscr{D}_i)^{-1} (-\boldsymbol{\nabla}^2) (\boldsymbol{\nabla}_j \mathscr{D}_j)^{-1} \mid l', \boldsymbol{r}' \rangle \\ & \cdot \mathscr{I} \sigma^{l'} (\boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r', \end{aligned} \tag{18.102}$$

它相当于 QED 中库仑相互作用(6.27),又

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{A}_i \times \underset{\sim}{\Pi}_i^{\text{tr}} + \underset{\sim}{\sigma}_{\text{ext}} \tag{18.103}$$

其中

$$\underset{\sim}{\sigma}_{\text{ext}} (\boldsymbol{r}) \equiv \underset{\sim}{\sigma}_1 (\boldsymbol{r}) + \underset{\sim}{\sigma}_2 (\boldsymbol{r}).$$

2. *微扰计算* 为了得到包含 g_0^2 的最低一级近似,我们可以在(18.102)中令 $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_{\text{ext}}$, $\mathscr{I} = 1$ 和 $\mathscr{D}_i = \boldsymbol{\nabla}_i$; 结果就是熟知的库仑定律

$$E(r_{12}) = (4\pi r_{12})^{-1} g_0^2 \underset{\sim}{q}_1 \cdot \underset{\sim}{q}_2 + O(g_0^4) \tag{18.104}$$

这里像以前一样,g_0 是未重正化的耦合常数. 让我们用下式来定义重正化的耦合常数 g

$$E(r_{12}) = (4\pi r_{12})^{-1} g^2 \underset{\sim}{q}_1 \cdot \underset{\sim}{q}_2; \tag{18.105}$$

即,g^2 直接关系到把这两个荷$\underset{\sim}{q}_1$ 和$\underset{\sim}{q}_2$ 从∞移到 r_{12}所要作的物理功. 我们将看到,对于 QCD, $g^2 > g_0^2$, 这表现了真空的反屏蔽性质.

定理 3. 在不计费米子圈图的情况下

$$\frac{g^2}{g_0^2} = 1 + \frac{11 g_0^2}{48\pi^2} C_2 \ln(\Lambda L)^2 + O(g_0^4) \tag{18.106}$$

---

* 功 $E(r_{12})$是规范不变的. 它能够被写作

$$q_1^m \left(P\exp \int_1^2 - \mathrm{i} g T^l A_i^l \mathrm{d} x_i \right)_{mn} q_2^n$$

乘上一个 r_{12}的标量函数,这里 $T_{mn}^l = -\mathrm{i}\epsilon^{lmn}$, 而 P 表示积分是按路径编序的. 在库仑规范和静态源的情况下, $A_i^l = 0$; 因此,对于大的 r_{12},(18.105)成立.

这里 Λ 和 L^{-1} 是适当的紫外和红外的切断值，C_2 是二次的卡齐米尔和，对于 SU_2：

$$C_2\delta^{lm} \equiv f^{lnn'}f^{mnn'} = 2 \text{ 对于 } SU_2,$$

而对于 SU_N 它等于 N. 如果存在有 n 种零质量费米子的味，则

$$\frac{g^2}{g_0^2} = 1 + (11C_2 - 2n)\frac{g_0^2}{48\pi^2}\ln(\Lambda L)^2 + O(g_0^4). \tag{18.107}$$

证明.* 我们首先把 H 按 g_0 的幂级数展开

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \tag{18.108}$$

这里 H_0 是与 g_0 无关的，而

$$H_{\text{int}} = g_0H_1 + g_0^2H_2 + g_0^3H_3 + g_0^4H_4 + \cdots. \tag{18.109}$$

在任意给定的时刻 t，场$\underset{\sim}{A_i}(\boldsymbol{r}, t)$和$\underset{\sim}{\Pi_i^{\text{tr}}}(\boldsymbol{r}, t)$能够用它们的傅里叶分量写出，像在(6.32)—(6.33)中一样，

$$A_i(\boldsymbol{r}, t)^l = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_kL^3}}[\alpha_i^l(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \text{h. c.}]$$

和

$$\Pi_i^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}, t)^l = \sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2L^3}}[-i\alpha_i^l(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \text{h. c.}],$$

这里 L^3 是体积

$$\omega_k = |\boldsymbol{k}|,$$

$a_i^l(\boldsymbol{k})$是与时间 t 有关的，并且像在(6.34)中一样，存在横波条件

$$k_i\alpha_i^l(\boldsymbol{k}) = 0.$$

我们可以像在(6.36)—(6.37)中一样引入一组三个右手单位基矢

---

* 方程式(18.106)—(18.107)首先由 Gross D J, Wilczek F. *Phys Rev Lett*, 1973, **30**:1343，以及 Politzer H D, **同上** 1346，等人所得到. 也可看 V. N. Gribov 的 Lecture at the 12th Winter School of the Leningrad Nuclear Physics Institute (1977)，和 S. D. Drell 的文章，发表于 A Festschrift for Maurice Goldhaber，编辑 G. Feinberg, A. W. Sunyar 和 J. Weneser. New York: New York Academy of Sciences, 1980.

$\hat{e}_1(\boldsymbol{k})$, $\hat{e}_2(\boldsymbol{k})$ 和 $\hat{k}=\boldsymbol{k}/\omega_k$ (如图 18.3 所示),并定义

$$\alpha^l_{\boldsymbol{k},\,s=\pm1}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\,\hat{e}_1(\boldsymbol{k})\mp\mathrm{i}\hat{e}_2(\boldsymbol{k})\,]_i\alpha^l_i(\boldsymbol{k})$$

和

$$\alpha^{l\dagger}_{\boldsymbol{k},\,s=\pm1}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\,\hat{e}_1(\boldsymbol{k})\pm\mathrm{i}\hat{e}_2(\boldsymbol{k})\,]_i\alpha^l_i(\boldsymbol{k})^{\dagger}.$$

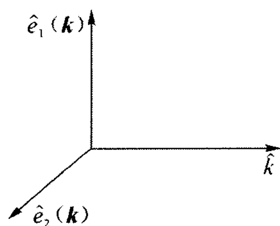


图 18.3　一组右手单位基矢

像在(6.38)和(6.39)中一样,由(18.96)我们导出

$$[\alpha^l_{\boldsymbol{k},\,s},\alpha^{l'\dagger}_{\boldsymbol{k}',\,s'}]=\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{ss'}\delta^{ll'},$$

$$[\alpha^l_{\boldsymbol{k},\,s},\alpha^{l'}_{\boldsymbol{k}',\,s'}]=0.$$

利用这些湮没和产生算符,除了一个可以定为零的相加性常数外,(18.108)中的零级哈密顿量 H_0 变为

$$H_0=\sum_{\boldsymbol{k},\,s,\,l}\alpha^{l\dagger}_{\boldsymbol{k},\,s}\alpha^l_{\boldsymbol{k},\,s}\omega_k.$$

令 H_0 的本征态为 $|N\rangle$:

$$H_0\mid N\rangle=E^0_N\mid N\rangle,$$

这里

$$E^0_N=\Sigma N^l_{\boldsymbol{k},\,s}\omega,\tag{18.110}$$

而 $N^l_{\boldsymbol{k},\,s}$ 是占有数算符 $a^{l\dagger}_{\boldsymbol{k},\,s}a^l_{\boldsymbol{k},\,s}$ 的本征值,它可以是 0, 1, 2, …. 对于基态 $|0\rangle$,我们有

$$E^0_0=0.$$

由(18.101)—(18.102),我们知道相互作用哈密顿量 $H_{\rm int}=H-H_0$ 包含了外部荷;因此,它依赖于 r_{12}. 在包括了 $H_{\rm int}(r_{12})$ 以后,基态能量从 $E^0_0=0$ 移动到 $E_0(r_{12})$,由熟知的微扰式给出

$$E_0(r_{12})=\langle 0\mid H_{\rm int}(r_{12})\mid 0\rangle+\sum_{N\neq0}\frac{|\langle 0\mid H_{\rm int}(r_{12})\mid N\rangle|^2}{-E^0_N}+O(H^3_{\rm int}).\tag{18.111}$$

我们所感兴趣的量 $E(r_{12})$ 是差

$$E(r_{12}) = E_0(r_{12}) - E_0(\infty)$$
$$= E^{(i)}(r_{12}) + E^{(ii)}(r_{12}) + \cdots \qquad (18.112)$$

在这里,我们已经把 $E(r_{12})$按照它所包含 H_{int}的方次分成许多项,其中 $E^{(i)} = O(H_{int})$, $E^{(ii)} = O(H_{int}^2)$, 由此类推.

(i) H_{int}的一级项

一级项决定于

$$\langle 0 \mid H_{int}(r_{12}) \mid 0 \rangle, \qquad (18.113)$$

它又可以通过(18.109)展开成 g_0 的幂级数. 因为所有 g_0 的奇次幂项都带有奇数个规范场算符,它们的真空期望值是零,结果就是 g_0 的偶函数. [如果我们是在讨论 QED,则相应的$\langle 0|H_{int}(r_{12})|0\rangle$项将只有最低级的库仑能;我们将看到,这就是 QCD 和 QED 之间关键性的差别. 见本节末说明 2.]

因为 $E(r_{12})$正比于$\underset{\sim}{\sigma}_1 \cdot \underset{\sim}{\sigma}_2$,我们可以令 $H_{int} = H_{Coul}$, 以及在(18.102)式中,令$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_{ext} = \underset{\sim}{\sigma}_1 + \underset{\sim}{\sigma}_2$. 由于$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{ext}$和雅可比$\mathscr{J}$相对易,我们可以令$\mathscr{J} = 1$. 将(18.84)代入(18.102),略去 $O(g_0^6)$,我们发现

$$E_{Coul}(r_{12}) \equiv \langle 0 \mid H_{Coul}(r_{12}) \mid 0 \rangle = -\frac{1}{2} g_0^2 \int \sigma_{ext}^l(\boldsymbol{r})$$
$$\cdot \langle l, \boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{\nabla}^{-2} + 3g_0^2 \boldsymbol{\nabla}^{-2} \lambda \boldsymbol{\nabla}^{-2} \lambda \boldsymbol{\nabla}^{-2} \mid l', \boldsymbol{r}' \rangle$$
$$\cdot \sigma_{ext}^{l'}(\boldsymbol{r}') d^3 r d^3 r' \qquad (18.114)$$

这里 λ 由(18.83)给出. 到 $O(H_{int})$这一级,把这两个外部荷从∞移至距离为 r_{12}时所作的功是

$$E^{(i)}(r_{12}) = E_{Coul}(r_{12}) - E_{Coul}(\infty). \qquad (18.115)$$

对于剩余部分,我们注意到利用傅里叶分量

$$\underset{\sim}{\sigma}_{\boldsymbol{p}}(a) \equiv \int \underset{\sim}{\sigma}_a(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d^3 r \quad (a = 1, 2) \qquad (18.116)$$

精确到 $O(g^2)$,上述 $E^{(i)}(r_{12})$的表式就是

$$E^{(i)}(r_{12}) = g_0^2 \int \sigma_1^l(\boldsymbol{r}) \sigma_2^l(\boldsymbol{r}') \frac{d^3 r d^3 r'}{4\pi \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid} + O(g_0^4)$$
$$= g_0^2 \int \sigma_{-\boldsymbol{p}}^l(1) \sigma_{\boldsymbol{p}}^l(2) \frac{1}{\boldsymbol{p}^2} \frac{d^3 p}{8\pi^3} + O(g_0^4). \qquad (18.117)$$

根据(18.114)，$O(g_0^4)$项是

$$-3g_0^4\int \sigma_1^l(\boldsymbol{r})\langle l,\ \boldsymbol{r}\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}\lambda\,\nabla^{-2}\mid l',\ \boldsymbol{r}'\rangle \cdot \sigma_2^{l'}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3 r\mathrm{d}^3 r'. \tag{18.118}$$

由(18.83)或(18.83a),我们知道它和 $A_i^m(\boldsymbol{r},\ t)A_{i'}^{m'}(\boldsymbol{r}',\ t)$的期望值有关.由于横波条件,我们有

$$\langle 0\mid \alpha_j^m(\boldsymbol{k})\cdot \alpha_{j'}^{m'}(\boldsymbol{k}')^{\dagger}\mid 0\rangle = \delta^{mm'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\left(\delta_{jj'}-\frac{k_j k_{j'}}{\boldsymbol{k}^2}\right), \tag{18.119}$$

因而

$$\langle 0\mid A_j^m(\boldsymbol{r},\ t)A_{j'}^{m'}(\boldsymbol{r}',\ t)\mid 0\rangle = \delta^{mm'}\int \frac{1}{2\omega_k}\left(\delta_{jj'}-\frac{k_j k_{j'}}{\boldsymbol{k}^2}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\mathrm{d}^3 k}{8\pi^3}. \tag{18.120}$$

利用(18.83)，(18.76a)，(18.116)，(18.120)和图 18.4(a)我们发现(18.118)是

$$-3g_0^4\int \sigma_{-\boldsymbol{p}}^l(1)\varepsilon^{lnm}\varepsilon^{nl'm'}\sigma_{\boldsymbol{p}'}^{l'}(2)\delta^{mm'}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \cdot \frac{-1}{\boldsymbol{p}^2}\frac{-1}{\boldsymbol{q}^2}\frac{-1}{\boldsymbol{p}'^2}\mathrm{i}p_j\mathrm{i}p'_j\cdot\left(\delta_{jj'}-\frac{k_j k_{j'}}{\boldsymbol{k}^2}\right)\frac{1}{2\omega_k} \cdot\left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^4 \mathrm{d}^3 p\mathrm{d}^3 p'\mathrm{d}^3 k\mathrm{d}^3 q\mathrm{d}^3 r\mathrm{d}^3 r'.$$

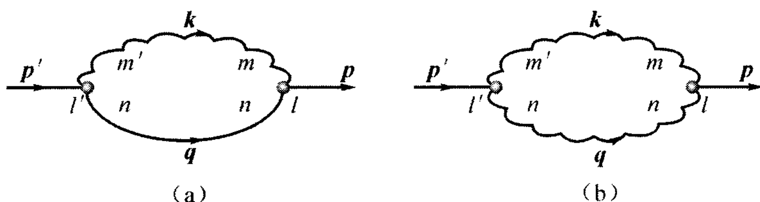


图 18.4　对于库仑相互作用辐射修正的图表示;(a)H_{int}的一级效应和(b)二级效应[这些不是费恩曼图]

由于规范不变性，(18.118)中两个 λ 因子的∇_i 算符可以写作 $\mathrm{i}p_j\mathrm{i}p'_{j'}$ 或 $\mathrm{i}q_j\mathrm{i}q'_{j'}=\mathrm{i}(p+k)_j\cdot\mathrm{i}(p'+k)_{j'}$. 对 $\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'/(2\pi)^6$ 的积分给出

$$\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}),$$

这导致 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$ 并且，加上 $\epsilon^{lnm}\epsilon^{nl'm'}\delta^{mm'}=-2\delta^{ll'}$，产生

$$(18.118)=\frac{3g_0^4}{(8\pi^3)^2}\int\sigma_{-p}^l(1)\sigma_p^l(2)\cdot\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}\frac{1}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|^2}(1-\cos^2\theta)\cdot\frac{1}{\omega_k}\cdot\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3k$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 之间的角. 对于很大的 r_{12}，只有$|\boldsymbol{p}|\sim O(r_{12}^{-1})\to 0$ 的区是重要的，这样我们可以用近似

$$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|\cong|\boldsymbol{k}|=\omega_k,$$

它给出

$$(18.118)=g_0^4\int\sigma_{-p}^l(1)\sigma_p^l(2)\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}\frac{\mathrm{d}^3p}{8\pi^3}\delta$$

这里

$$\delta\cong\frac{3}{8\pi^3}\int\frac{1}{\omega_k^3}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}^3k=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}k}{\omega_k}.$$

由于系统被包含在一个有限的体积 L^3 之内，k 积分从下限 L^{-1} 开始；为了对紫外发散给出一个数学意义，我们引入一个上限 Λ. 这样，

$$\delta=\pi^{-2}\ln(\Lambda L).\tag{18.121}$$

把上面的 $O(g_0^4)$项包括进去，(18.117)变为

$$E^{(i)}(r_{12})=(4\pi r_{12})^{-1}g_0^2\,\underset{\sim}{q}_1\cdot\underset{\sim}{q}_2(1+g_0^2\delta).\tag{18.122}$$

(ii) H_{int}的二级项

由(18.111)，我们得知 H_{int}的二级微扰项是

$$E^{(ii)}(r_{12})=\sum_{N\neq 0}\frac{|\langle 0|H_{\text{int}}(r_{12})|N\rangle|^2}{-E_N^0}$$
$$-\text{同一表式在 } r_{12}=\infty \text{ 的值}\tag{18.123}$$

在这里有关的态$|N\rangle$是那些具有两个规范量子的态

$$|N\rangle = \alpha_{k,s}^{m\dagger}\alpha_{q,s'}^{n\dagger}|0\rangle, \tag{18.124}$$

而 H_{int}中有关的部分也就是(18.102)中的 H_{Coul}.

为了使 $E^{(ii)}(r_{12})$精确到 $O(g_0^4)$,我们只需要$\langle N|H_{\text{Coul}}(r_{12})|0\rangle$精确到 $O(g_0^2)$. 因此,在(18.102)中我们可以令 $\mathscr{J}\cong 1$ 和 $(\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}\nabla^2(\nabla_j\mathscr{D}_j)^{-1}\cong\nabla^{-2}$. 由于(18.124)以及 $E^{(ii)}(r_{12})$与$\underset{\sim}{\sigma_1}\cdot\underset{\sim}{\sigma_2}$ 有关这一事实,每一个$\langle N|H_{\text{Coul}}|0\rangle$必定与$\underset{\sim}{\sigma_{\text{ext}}}$线性相关. 利用 $\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\sigma_A}+\underset{\sim}{\sigma_{\text{ext}}}$, 我们可以因此写下 H_{Coul} 的有关部分:

$$H_{\text{Coul}}\cong g_0^2\int\sigma_A^l(\boldsymbol{r})\sigma_{\text{ext}}^l(\boldsymbol{r}')\langle\boldsymbol{r}|-\nabla^{-2}|\boldsymbol{r}'\rangle\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r' \tag{18.125}$$

这里,像在(18.87)中一样

$$\sigma_A^l=\varepsilon^{ll'l''}A_i^{l'}(\Pi_i^{\text{tr}})^{l''}. \tag{18.126}$$

利用 $A_i^{l'}$ 和$(\Pi_i^{\text{tr}})^{l''}$的傅里叶展开,我们得到在双量子态$|N\rangle$和真空态$|0\rangle$之间 σ_A^l 的矩阵元

$$\langle N|\sigma_A^l(\boldsymbol{r}')|0\rangle=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}'}}{2\sqrt{\omega_k\omega_q}L^3}\varepsilon^{ll'l''}\mathrm{i}(\omega_q-\omega_k)$$
$$\cdot\langle 0|\alpha_{k,s}^m\alpha_{q,s'}^n\alpha_i^\dagger(\boldsymbol{k})^{l'}\alpha_i^\dagger(\boldsymbol{q})^{l''}|0\rangle, \tag{18.127}$$

在这里我们可以从 $A_i^{l'}(\Pi_i^{\text{tr}})^{l''}$ 或$-(\Pi_i^{\text{tr}})^{l'}A_i^{l''}$ 中抽出一个因子 $\alpha_i^\dagger(\boldsymbol{k})^{l'}\alpha_i^\dagger(\boldsymbol{q})^{l''}$来;这说明了为什么会有 $\mathrm{i}(\omega_q-\omega_k)$ 这个因子. 这样,由(18.116),(18.126)—(18.127)和图 18.4(b),我们导出

$$\sum_{N\neq 0}|\langle 0|H_{\text{Coul}}|N\rangle|^2/(-E_N^0)$$
$$=\frac{1}{2}g_0^4\int\left(\frac{1}{2\sqrt{\omega_k\omega_q}}\right)^2\left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^4\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'$$
$$\cdot\sigma_{-p}^l\varepsilon^{lmn}\varepsilon^{l'mn}\sigma_{p'}^{l'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$
$$\cdot\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}\frac{1}{\boldsymbol{p}'^2}\frac{(\omega_q-\omega_k)^2}{-(\omega_q+\omega_k)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2}\right) \tag{18.128}$$

这里第一个$\frac{1}{2}$因子是源于玻色统计(即,在(18.128)中交换 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 得到同

一个态),乘积$\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}\frac{1}{\boldsymbol{p}'^2}$中的每一个因子是源于(18.125)中的$-\boldsymbol{\nabla}^{-2}$,分母$-(\omega_q+\omega_k)$是$-E_N^0$,$\sigma_{\boldsymbol{p}}^l=\sigma_{\boldsymbol{p}}^l(1)+\sigma_{\boldsymbol{p}}^l(2)$并且最后两个因子和(18.119)的来源相同.对$\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'/(2\pi)^6$的积分再一次给出$\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$,它导致$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$.像以前一样,对于很大的$r_{12}$,只有$|\boldsymbol{p}|\sim O(r_{12}^{-1})\to 0$的区域是重要的.因为$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$,我们有

$$\boldsymbol{q}^2=\boldsymbol{k}^2-2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^2,$$

并且由于$\omega_q=|\boldsymbol{q}|$,$\omega_k=|\boldsymbol{k}|$

$$(\omega_q-\omega_k)^2=\boldsymbol{p}^2\cos^2\theta+O(\boldsymbol{p}^3)\cong\boldsymbol{p}^2\cos^2\theta$$

这里θ是$\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{p}$之间的角.在同样的近似下,我们可以令

$$(2\sqrt{\omega_k\omega_q})^{-2}=(4\omega_k^2)^{-1}\text{ 和 }-(\omega_q+\omega_k)=-2\omega_k.$$

利用$\epsilon^{lmn}\epsilon^{l'mn}=2\delta^{ll'}$和

$$\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2}\right)=2,$$

在把(18.128)代入(18.123)以后,我们导出

$$E^{(ii)}(r_{12})=g_0^4\int\sigma_{-\boldsymbol{p}}^l(1)\sigma_{\boldsymbol{p}}^l(2)\,\frac{1}{\boldsymbol{p}^2}\,\frac{\mathrm{d}^3p}{8\pi^3}\delta' \tag{18.129}$$

这里

$$\delta'=-\frac{1}{8\pi^3}\int\frac{\cos^2\theta}{2\omega_k^3}\mathrm{d}^3k=-(12\pi^2)^{-1}\ln(\Lambda L)=-\frac{\delta}{12} \tag{18.130}$$

其中对k的积分是从L^{-1}到Λ,这和在(18.121)中对δ的情况一样.用r_{12}表示,(18.129)能够被写作

$$E^{(ii)}(r_{12})=(4\pi r_{12})^{-1}g_0^4\,\underset{\sim}{q}_1\cdot\underset{\sim}{q}_2\delta'. \tag{18.131}$$

因为库仑相互作用的$O(g_0^4)$修正是(18.122)和(18.131)之和,利用重正化g的定义式(18.105),我们发现

$$\frac{g^2}{g_0^2}=1+g_0^2(\delta+\delta')=1+\frac{11g_0^2}{24\pi^2}\ln(\Lambda L)^2, \tag{18.132}$$

这就是 SU_2 的(18.106)式,我们注意到 $g_0^2\delta'<0$,这是基态二级微扰能量总是**负**这一点的直接结果.这件事本身相当于我们通常的概念,即真空极化总是“屏蔽”原来的荷以使 g 小于 g_0.但是,由于 QCD 中高斯定律的非线性性质,

$$-(\nabla^2+g_0\,\underset{\sim}{A}_i\times\nabla_i)\,\underset{\sim}{\phi}=g_0\,\underset{\sim}{\sigma},$$

现在还有一个 g_0^4 项存在于

$$\frac{1}{2}\int(\nabla_i\underset{\sim}{\phi})^2\,\mathrm{d}^3r$$

的对角元素上,它总是**正的**;这给出 $g_0^2\delta>0$. 由于 δ 的大小是 δ' 的 12 倍.其纯效果就是使 $g^2>g_0^2$,这就产生了真空的反屏蔽性质.

很容易直截了当的把上述考虑推广到 SU_N.用 f^{lmn} 代替 ε^{lmn},我们得到(18.106)给出的结果.夸克给出了一个附加的真空极化项,它是屏蔽性的.这种计算和在 QED 中用费米子圈图计算的方法相同*,这里将略去.其结果就是(18.107),这就完成了我们对定理 3 的证明.

说明. 1. 能量移动分数 $\Delta E/E$ 分解成 $g_0^2\delta>0$ 和 $g_0^2\delta'<0$ 是规范有关的.和 $g_0^2(\delta+\delta')$ 是规范无关的.

2. 在 QED 中,相应的 δ 是 0,因此 $\Delta E\propto\delta'<0$,这符合(18.123)的符号.由此得出对于任何物理介质有 $\kappa>1$ 以及 $|e_0/e|>1$,这里 e_0 是未重正化的荷,而 e 是重正化了的.

18.6 渐近自由**

QCD 由色 SU_3 规范理论所描述,根据定理 3 我们知道重正化的耦合常数是未重正化的耦合常数 g_0,紫外动量截止 Λ 和容积 L^3(它用作红外

* 例如,看 Bjorken J D, Drell S D. Relativistic Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1964.

** Politze H D. *Phys Rev Lett*, 1973, **30**: 1346; Gross D, Wilczek F, *ibid*, 1343. 't Hooft G. talk at the Marseilles meeting, 1972(unpublished).

截止参数)的函数.保持 g_0 和 Λ 固定,我们在这一节将研究重正化耦合常数,标作 g_L,对 L 的依赖关系.

(18.107)式的微扰结果告诉我们,对于两个不同的体积 l^3 和 L^3,在 QCD 中它们的重正化耦合常数之比,略去 $O(g_0^4)$ 后是

$$\frac{g_l^2}{g_L^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2\pi}\frac{g_0^2}{4\pi}\left(11-\frac{2}{3}n\right)\ln\frac{L}{l}},\tag{18.133}$$

它表明在夸克的味数 $n<17$ 的情况下,如果 $L>l$ 则 $g_L>g_l$. 现在这个结论将被推广到超出微扰计算之外.

以下,将在很一般的假定下(在后面的说明 2 中给出)并且精确到耦合常数的一切级建立如下的结论

$$g_L>g_l \text{ 若 } L>l\tag{18.134}$$

和

$$g_l\to 0 \text{ 若 } l\to 0.\tag{18.135}$$

为简单计,我们将令所有的夸克质量 $=0$, 因此,在这个理论中没有自然的能量标度.从量纲上考虑,g_L 应当只和 g_0 以及乘积 $L\Lambda$ 有关;即

$$g_L=G(L\Lambda,\ g_0).\tag{18.136}$$

像在(18.133)中一样,让我们考虑两个不同的体积 l^3 和 L^3,但 g_0 和 Λ 相同.把 L 变到 l,我们还有

$$g_l=G(l\Lambda,\ g_0),\tag{18.137}$$

或者它的逆 $g_0=g_0(l\Lambda,\ g_l)$. 消去(18.136)和(18.137)中的 g_0,我们可以用 $L\Lambda$, $l\Lambda$ 和 g_l 来表示 g_L:

$$g_L=G(L\Lambda,\ g_0(l\Lambda,\ g_l)).\tag{18.138}$$

因为这是一个可以重正化的理论,(18.138)在 $\Lambda\to\infty$时的极限应该存在;在这个极限下,Λ 不再出现;因此 g_L 是 g_l,l 和 L 的一个函数.从量纲考虑得出这个极限函数必须是如下的形式

$$g_L=g\left(\frac{l}{L},\ g_l\right)\equiv\lim_{\Lambda\to\infty}G(L\Lambda,\ g_0(l\Lambda,\ g_l)).\tag{18.139}$$

让我们引入

$$\lambda \equiv l/L. \tag{18.140}$$

方程式(18.139)可以被写作

$$g_L = g(\lambda,\ g_l); \tag{18.141}$$

当 $\lambda = 1$,即 $L = l$ 时,(18.139)变为

$$g_l = g(1,\ g_l). \tag{18.142}$$

因为 $g_L = G(L\Lambda,\ g_0)$ 是与 l 无关的,我们有

$$\left(\frac{\partial g_L}{\partial \ln l}\right)_{g_0,\ \Lambda,\ L} = 0. \tag{18.143}$$

因此,由于(18.141), $g(\lambda,\ g_l)$满足如下的"重正化群"方程 *

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \ln \lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g_l}\right) g(\lambda,\ g_l) = 0, \tag{18.144}$$

这里

$$\beta \equiv -\frac{\partial g_l}{\partial \ln l}. \tag{18.145}$$

从(18.107)我们知道对于 QCD

$$g_l^2 = g_0^2\left[1 + \frac{g_0^2}{8\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}n\right)\ln(\Lambda l)\right] + O(g_0^6).$$

为了确定 β 的值,我们把这个表式代入(18.145)并记住在微分时, g_0 和 Λ 应当保持固定以与(18.143)式相符. 用 g_l 来展开 β 而不用 g_0,我们得出

$$\beta = -\frac{g_l^3}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}n\right) + O(g_l^5). \tag{18.146}$$

像在(18.133)中一样,夸克的味数 n 被假定<17 因此当 g_l 小时 $\beta < 0$. [若 n 变为≥17,看下面说明 3].

(18.144)的解具有标准形式

---

* Gell-Mann M, Low F E. *Phys Rev*, 1954, **95**:1300; Callan C G. *Phys Pev* 1970, **D2**:1541; Syrnanzik K. *Commun Math Phys*, 1970, **18**:227.

$$g(\lambda,\ g_l) = f(z) \tag{18.147}$$

这里

$$z = \ln\lambda + \int_{g_1}^{g_l} \frac{\mathrm{d}g'}{\beta(g')} \tag{18.148}$$

g_1 是一个任意常数,它要选得足够小,所以

$$0 < g_1 \ll 1$$

并且,由于(18.146),

$$\beta(g') < 0 \text{ 当 } 0 < g' \leqslant g_1. \tag{18.149}$$

[通过把积分常数 g_1 选得足够小,我们就不言而喻的已经作了这样的假定,即物理区包含了 $g_l = 0_+$. 这与高能实验结果相符,下面说明 2 中将进一步对此进行讨论.]

令 $f^{-1}(z)$是 $f(z)$的反函数;即

$$f^{-1}(f(z)) = z. \tag{18.150}$$

这样,从(18.147)我们有

$$z = f^{-1}(g(\lambda,\ g_l)),$$

由于(18.142),这给出

$$z = f^{-1}(g_l) \text{ 当 } \lambda = 1.$$

使这个表式与 $\lambda = 1$ 时的(18.148)式相等,我们导出

$$f^{-1}(g_l) = \int_{g_1}^{g_l} \frac{\mathrm{d}g'}{\beta(g')}. \tag{18.151}$$

因为 $g(\lambda,\ g_l)$是 g_l 的奇函数,只需要考虑 g_l 的正值就可以了. 我们要区别在图 18.5(a)和(b)中的两种不同的情况:

(a) 只有在 $g_l = 0$ 的时候 $\beta(g_l) = 0$.

(b) $\beta(g_l) = 0$ 有多于一个的根. 除了 $g_l = 0$ 之外,至少还有另一个根 $g_l = \overline{g}$, 选这个根为 $\beta(g_l) = 0$ 的不为零的最小的正值解.

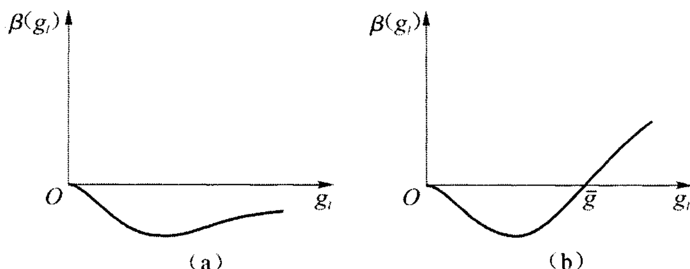


图 18.5　$\beta(g_l)$对 g_l 的两种可能性，这里 g_l 是定义在一个长度 l 或者动量 l^{-1} 下的重正化耦合常数，$\beta(g_l) = -\partial g_l/\partial \ln l$

在图 18.5(a)中，g_l 的物理值可以从 0 变到∞，而在图 18.5(b)中，g_l 只能在 0 和$\bar{g}$之间变化. 这是因为当 $g_l = \bar{g}$ 时，(18.151)中的积分对数性地发散. 在每一种情况下，令 $g_l = x$，利用(18.151)，在物理区中我们有

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\beta(x)} < 0;$$

因此反函数 $f(z)$满足

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} < 0. \tag{18.152}$$

根据(18.147)—(18.148)，保持 g_l 固定，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}g(\lambda,\ g_l) &= \frac{\partial f(z)}{\partial\lambda} = \frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\\ &= \lambda^{-1}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} < 0.\end{aligned} \tag{18.153}$$

因为 $\lambda = l/L$ 和 $g_L = g(\lambda,\ g_l)$，这意味着当 $L > l$ 时，$g_L > g_l$，这证明(18.134)成立. 这样，当 l 逐渐减小时，g_l 也减小.

当 g_l 足够小时，(18.146)中的 $O(g_l^5)$项可以略去. 因此，利用(18.151)我们发现

$$f^{-1}(g_l) \cong \left(11 - \frac{2}{3}n\right)^{-1} 8\pi^2 (g_l^{-2} - g_1^{-2}); \tag{18.154}$$

根据定义(18.150)，它的反函数是

$$f(z) \cong \left[(8\pi^2)^{-1}\left(11 - \frac{2}{3}n\right)z + g_1^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

因此

$$g(\lambda,\ g_l)\cong\left[\frac{\left(11-\frac{2}{3}n\right)^{-1}8\pi^2g_l^2}{g_l^2\ln\lambda+\left(11-\frac{2}{3}n\right)^{-1}8\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{18.155}$$

现在保持 l 和 g_l 固定并取极限 $L\to 0$,我们得出

$$\lim_{L\to 0} g_L = 0,$$

即(18.135)式,这叫做渐近自由[参考(23.120)].

说明.

1. 因为夸克质量为 0 的 QCD 没有自然的能量标度,体积尺寸 l 等价于引进了一个能量标度 l^{-1},在这个尺寸下我们可以定义重正化耦合常数 g_l. 当 $l\to 0$ 时极限 $g_l\to 0$ 意味着在充分高能量和高动量转移区,夸克和规范场量子(叫做胶子)的行为像自由粒子,这就是“渐近自由”这个名字的起源.

2. 假定在 QCD 中夸克的味数<17. 如果 $\beta(g_l)=0$ 只有一个根在 $g_l=0$ 处,像在图 18.5(a)中一样,则渐近自由(18.135)成立不需要任何进一步的假定. 但是,如果 $\beta(g_l)=0$ 有多于一个的根,像在 18.5(b)中一样,则从**推理**上讲,物理区既可以在 $0<g_l<\bar{g}$ 之内,也可以是 $g_l>\bar{g}$. 只有通过高能实验我们才能知道哪一个区对应于我们的宇宙. 正如在 17.1 节中我们已经提到过的,实验结果确实支持了在高能下的自由夸克模型;物理区应当位于 $0<g_l<\bar{g}$. 这就是为什么在(18.148)中选择积分常数 g_1 满足(18.149),因而对于足够小的 g_l,微扰公式(18.155)成立.

3. 至此,我们一直假定了夸克味的总数 n 是<17. 目前已知的味只有 5 种(u, d, s, c 和 b). 如果在某种非常高的质量标度 $M\gg 1\,\text{GeV}$ 的情况下,n 增加到≥17,事情会变得怎样呢?

这意味着由这些非常重的费米子对所产生的真空极化将在 $\sim(2M)^{-1}\ll 10^{-14}\,\text{cm}$ 的长度标度内把 QCD 真空变为顺电性的而不是抗电性的了(即,屏蔽的而不是反屏蔽的). 在 $10^{-14}\sim 10^{-15}\,\text{cm}$ 区内,人们可以略去这样的超重粒子. 因此,在现有的能量范围内,有渐近自由的 QCD 的应用仍然是一个好的近似. 当然,当能量增加,最后将达到这一标度,这时出现了大量数目的超重夸克;于是渐近自由的破坏发生.

4. 在第 17 章中已经讨论过,夸克禁闭可以唯象地通过假定 QCD 真空是一个完全的抗色介质来解释. 这一节我们所导出的结果(18.134)—(18.135)支持了这一假定,但不是它的证明. 最近,克罗伊茨*(M. Creutz)通过把蒙特卡罗方法应用于威尔逊**(K. Wilson)所发展的 QCD 格点理论形式已经取得某些重要的进展. 对于非阿贝尔规范理论中色禁闭和渐近自由的并存,克罗伊茨的数值结果给了另外一个强有力的支持.

参 考 文 献

Abers E S, Lee B W. *Physics Reports*, 1973, **9C**:1.

Marciano W, Pagels H. *Physics Reports*, 1978, **36C**:3.

又可看第 19 章末的参考文献.

---

* Creutz M. *Phys Rev*, 1980, **D21**:2308.

** Wilson K G. *Phys Rev*, 1974, **D10**:2445.

第19章 路径积分

在本章中，我们发展路径积分方法，它对于导出 QCD 中的费恩曼规则特别有用. 这也是费恩曼当年发明他的图解法所循的历史性路线.

19.1 笛卡儿坐标

1. **一维问题** 考虑一个点粒子沿一直线运动，x 是它的坐标. 令 $-\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为动量算符，它的本征态是 $|k\rangle$. 在 x-表象中，我们有

$$\langle x \mid k \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

这里，像以前一样，我们先假定系统被包含在一个长度 L 内并具有周期性的边界条件，随后取极限 $L \to \infty$. 在坐标空间中动量算符的任意函数 f 的矩阵元是 *

$$\left\langle x' \left| f\left(-\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \right| x \right\rangle = \langle x' \mid k' \rangle \left\langle k' \left| f\left(-\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \right| k \right\rangle \langle k \mid x \rangle$$

$$= \sum_k \frac{1}{L} f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x'-x)}$$

这里，由于(2.29)—(2.30)，当 $L \to \infty$ 时

$$\to \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x'-x)}, \tag{19.1}$$

积分是从 $-\infty$ 到 ∞. 作为这个基本公式的一种应用，我们可以考虑一个非

---

* 像通常一样，重复指标 k, k' 是求和的.

相对论的粒子,质量为1,动能算符是

$$K=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

在坐标空间中,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)K}$的矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle x' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)K} \mid x\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}k^2(t'-t)+\mathrm{i}k(x'-x)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}z}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}z^2(t'-t)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(x'-x)^2/(t'-t)} \qquad (19.2)\end{aligned}$$

这里 $z=k-(x'-x)/(t'-t)$. 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}z^2\tau}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{i}\tau}}=\sqrt{\frac{\pi}{\mid\tau\mid}}\cdot\begin{cases}1-\mathrm{i} & \text{如果 } \tau>0\\ 1+\mathrm{i} & \text{如果 } \tau<0,\end{cases} \qquad (19.3)$$

我们得到

$$\langle x' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)K} \mid x\rangle = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(x'-x)^2/\tau} \qquad (19.4)$$

这里 $\tau=t'-t$. 这个函数叫做“赝高斯”函数,因为它在指数上和一个标准的高斯分布函数差一个因子 i;它的宽度是

$$\mid x'-x\mid_{\text{average}}=O(\sqrt{\mid\tau\mid}). \qquad (19.5)$$

当 $\tau\to 0$ 时

$$(19.4)\to\delta(x'-x).$$

对于一个在位势 $V(x)$中运动的粒子,哈密顿算符是

$$H=K+V(x)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x). \qquad (19.6)$$

在 x 表象中,与时间有关的薛定谔方程

$$H\mid t\rangle=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\mid t\rangle$$

的格林函数是$\langle x'\mid\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H}\mid x\rangle$;它联系着从时刻 t 的态矢到时刻 t'的态矢:

$$\langle x' \mid t'\rangle=\int\mathrm{d}x\langle x' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid x\rangle\langle x\mid t\rangle. \qquad (19.7)$$

利用 H 的本征矢量

$$H \mid a\rangle = E_a \mid a\rangle$$

和正交归一化条件

$$\langle a' \mid a\rangle = \delta_{a'a},$$

这个格林函数也可以写作

$$\langle x' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid x\rangle = \sum_a \psi_a(x')\psi_a^*(x) e^{-i(t'-t)E_a} \tag{19.8}$$

这里

$$\psi_a(x) = \langle x \mid a\rangle.$$

2. **从哈密顿算符到路径积分** 像费恩曼那样,我们把时间 $t'-t$ 分成 s 个间隔,每份间隔为 ε

$$t'-t = s\varepsilon$$

因此,当 $\varepsilon \to 0$ 时,我们有

$$s = (t'-t)/\varepsilon \to \infty.$$

定理 1. 对于任一态矢$|\rangle$,

$$\langle x' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} dx_n \left(\frac{1}{2i\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\varepsilon L_n} \langle x_1 \mid \rangle \tag{19.9}$$

这里

$$L_n = \frac{1}{2}\dot{x}_n^2 - V(\bar{x}_n) \tag{19.10}$$

其中

$$\dot{x}_n \equiv \frac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon},\quad \bar{x}_n \equiv \frac{x_{n+1}+x_n}{2} \quad 和 \quad x_{s+1} = x'.$$

证明. 由于 $e^{-i(t'-t)H} = e^{-i\varepsilon sH}$,我们有

$$\begin{aligned}\langle x' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid x\rangle = \int & \langle x' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x_s\rangle dx_s \\ & \cdot \langle x_s \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x_{s-1}\rangle dx_{s-1} \\ & \cdots \langle x_3 \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x_2\rangle dx_2 \\ & \cdot \langle x_2 \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x\rangle.\end{aligned} \tag{19.11}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$e^{-i\varepsilon H} = 1 - i\varepsilon H + O(\varepsilon^2) = 1 - i\varepsilon K - i\varepsilon V + O(\varepsilon^2)$$
$$= e^{-i\varepsilon K} e^{-i\varepsilon V} + O(\varepsilon^2);$$

略去 $O(\varepsilon^2)$，它的矩阵元是

$$\langle x_{n+1} \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x_n \rangle = \int dy \langle x_{n+1} \mid e^{-i\varepsilon K} \mid y \rangle \langle y \mid e^{-i\varepsilon V} \mid x_n \rangle. \quad (19.12)$$

利用(19.4)式和

$$\langle y \mid e^{-i\varepsilon V} \mid x_n \rangle = e^{-i\varepsilon V(x_n)} \delta(y - x_n),$$

我们得到

$$\langle x_{n+1} \mid e^{-i\varepsilon H} \mid x_n \rangle = \left(\frac{1}{2i\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp i\left[\frac{1}{2\varepsilon}(x_{n+1} - x_n)^2 - \varepsilon V(x_n)\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2i\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\varepsilon L_n} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

注意，在(19.10)式所给出的 L_n 中，$\dot{x}_n$ 代表 $(x_{n+1} - x_n)/\varepsilon$，而 V 的宗量是 $\bar{x}_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$；如果愿意，我们可以把 x_n 或 x_{n+1} 来代替 $\bar{x}_n$. 由于在(19.5)式中已指出，$x_{n+1} - x_n$ 的平均值是 $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$，因此，这样一个代换所引起 $e^{-iV\varepsilon}$ 项的差异是 $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$，可以忽略它.

把上式代入(19.11)并令 $x = x_1$，我们导出(19.9). 定理 1 证毕.

如图 19.1 所示，在分割 $t' - t = s\varepsilon$ 中，我们可以标志

$$t_n = t + (n-1)\varepsilon$$

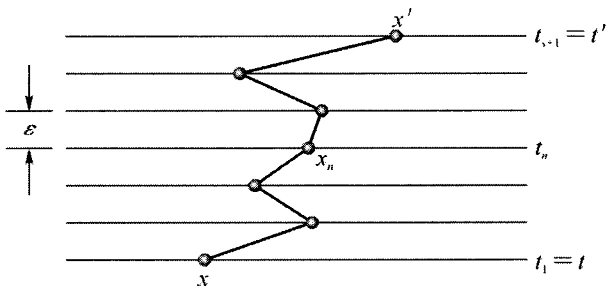


图 19.1 当 τ 从 t 变到 t'，序列 $x = x_1, x_2, \cdots, x_s, x_{s+1} = x'$ 描述了一条路径 $x(\tau)$

并把 x_n 解释为在时刻 t_n 的 x 值. 于是,序列 $x=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s,\ x_{s+1}=x'$ 描述了当 τ 从 t 变到 t' 时一条路径 $x(\tau)$;(19.9)式中的积分可以解释为该路径所贡献的波幅. 由(19.6)式,我们知道拉氏量是

$$L(x,\ \dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2-V(x).$$

因此,如果我们用 $\bar{x}_n\equiv\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ 来代替 x,并用 $\dot{x}_n\equiv\dfrac{x_{r+1}-x_n}{\varepsilon}$ 来代替 $\dot{x}_n$,(19.10)能够写作

$$L_n=L(\bar{x}_n,\ \dot{x}_n).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,求和式 $\sum\varepsilon L_n$ 变为沿路径 $x(\tau)$ 的作用量积分

$$\sum_{n=1}^{s}\varepsilon L_n\to\int_t^{t'}L(x(\tau),\ \dot{x}(\tau))\mathrm{d}\tau\equiv\int_t^{t'}L(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{19.13}$$

用路径积分的语言,(19.9)式常被写成一个更紧凑的因而更符号化的形式

$$\langle x'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\mid x\rangle=\int[\mathrm{d}x]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}t}$$

或者,在 x 表象的理解下,简单地写作

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H}=\int[\mathrm{d}x]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}, \tag{19.9a}$$

因此,在任何两个态 t 时刻的 $|\rangle$ 和 t' 时刻的 $|t'\rangle$ 之间,我们有

$$\langle t'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H}\mid\rangle=\int[\mathrm{d}x]\langle t'\mid x'\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}\langle x\mid\rangle,$$

这里

$$[\mathrm{d}x]\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}s}\prod_{n=1}^{s+1}\mathrm{d}x_n,$$

而 $\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau$ 由(19.13)给出. 当然,(19.9a)的精确含义不多于也不少于原来的形式(19.9).

由哈密顿量 $H(x,\ p)$,定义一个 $x,\ \dot{x}$ 和 p 的函数 $\bar{L}$ 是很有用的:

$$\bar{L}(x,\ \dot{x},\ p)\equiv p\dot{x}-H(x,\ p). \tag{19.14}$$

注意$\overline{L}$是三个变量x, $\dot{x}$和p的函数;它不是拉格朗日函数,后者只依赖于两个变量x和$\dot{x}$. 当然,如果在$\overline{L}$中我们把p作为x和$\dot{x}$的函数,则$\overline{L}$将与拉格朗日函数$L(x, \dot{x})$有如下的关系 $\overline{L}(x, \dot{x}, p(x, \dot{x})) = L(x, \dot{x})$.

推论. (19.9)的另一表示式是

$$\langle x' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} \frac{\mathrm{d}x_n \mathrm{d}k_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon \overline{L}_n} \langle x_1 \mid \rangle \tag{19.15}$$

这里

$$\overline{L}_n = \overline{L}(\overline{x}_n, \dot{x}_n, k_n); \tag{19.16}$$

换言之,$\overline{L}_n$ 是以

$$\overline{x}_n = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}, \quad \dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} \quad 和 \quad k_n$$

代替函数$\overline{L}(x, \dot{x}, p)$中的宗量$x$, $\dot{x}$,和p而得出来的.

证明. 由(19.2)式的第一行,我们有

$$\langle x_{n+1} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon K} \mid x_n \rangle = \int \frac{\mathrm{d}k_n}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}k_n^2\varepsilon + \mathrm{i}k_n(x_{n+1}-x_n)},$$

把这个表式与(19.12)式联立起来,我们得出

$$\langle x_{n+1} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid x_n \rangle = \int \frac{\mathrm{d}k_n}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}k_n^2\varepsilon + \mathrm{i}k_n(x_{n+1}-x_n) - \mathrm{i}\varepsilon V(x_n)}. \tag{19.17}$$

因为在这个问题中 $H(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$, 所以指数是$-\mathrm{i}\varepsilon$乘上

$$k_n\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}\right) - H(x_n, k_n) = \overline{L}(x_n, \dot{x}_n, k_n)$$

这里$\overline{L}$由(19.14)给出,而$\dot{x}_n$代表$(x_{n+1} - x_n)/\varepsilon$,和以前一样. 现在我们将(19.17)代入(19.11),令

$$x = x_1 \quad 和 \quad x' = x_{s+1},$$

最后,我们用$\overline{x}_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$来代替$\overline{L}(x_n, \dot{x}_n, k_n)$中的$x_n$,由于(19.5)式,当$\varepsilon \to 0$时,这一代换是合理的. 最后的表式是(19.15),这就完成了对推论的证明.

注意,在(19.16)式中,当 $n=s$ 时,$\overline{L}_n$ 包含了 $x_{s+1}=x'$,但不包含 k_{s+1}. 现在考虑(x, k)空间. 当 τ 从 t 变到 t'. 序列(x_1, k_1), (x_2, k_2), …, (x_n, k_n), …, (x_s, k_s)描绘了一条在该空间(叫做相空间)的一条路径$(x(\tau), k(\tau))$. 当 $\varepsilon \to 0$ 时,和式 $\sum \varepsilon \overline{L}_n$ 可以被写作在相空间中沿这路径的作用量积分

$$\sum_{n=1}^{s} \varepsilon \overline{L}_n \to \int_t^{t'} \overline{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau), k(\tau)) \mathrm{d}\tau \equiv \int_t^{t'} \overline{L}(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{19.18}$$

方程式(19.15)也可以写成一个紧凑的形式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} = \int [\mathrm{d}x\mathrm{d}k] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} \overline{L}\mathrm{d}\tau} \tag{19.15a}$$

这里

$$[\mathrm{d}x\mathrm{d}k] = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_n \frac{\mathrm{d}x_n \mathrm{d}k_n}{2\pi},$$

这样一个表式的精确含义被理解为(19.15)式.

练习 1. 通过直接微分证明格林函数(19.4)满足自由粒子薛定谔方程

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t')K} \mid x' \rangle = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \langle x \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t')K} \mid x' \rangle$$

边界条件是

$$\lim_{t \to t'} \langle x \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t')K} \mid x' \rangle \to \delta(x-x').$$

练习 2. 证明谐振子的格林函数是

$$\langle x' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid x \rangle = \left(\frac{\omega}{2\mathrm{i}\pi \sin \omega(t'-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(t'-t)} \tag{19.19}$$

这里

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

和

$$S(\tau) = \frac{\omega}{2\sin \omega\tau} [(x'^2 + x^2) \cos \omega\tau - 2x'x],$$

这也是经典的作用量积分(即沿经典路径的积分 $\int L\mathrm{d}t$).

3. N 维问题　推广到 N 维笛卡儿坐标系是直接的. 令

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

是坐标矢量,而

$$-\mathrm{i}\,\nabla = \left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_N}\right)$$

是共轭动量算符. $-\mathrm{i}\,\nabla$的本征态$|\boldsymbol{k}\rangle$是

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{k}\rangle = \sqrt{\frac{1}{\Omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},$$

这里 Ω 是系统的体积. 假定哈密顿量是

$$H = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x}) \tag{19.20}$$

这里

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_a}$$

是拉普拉斯算子,其中重复的指标是从 1 到 N 求和的. 很容易推广方程式(19.9)和(19.15). 对于任意态$|\rangle$,我们有

$$\langle \boldsymbol{x}' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} \mathrm{d}^N x_n \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon L_n}\langle \boldsymbol{x}_1 \mid\rangle, \tag{19.21}$$

这里

$$L_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{n+1}-\boldsymbol{x}_n}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{\boldsymbol{x}_{n+1}+\boldsymbol{x}_n}{2}\right)$$

和

$$\langle \boldsymbol{x}' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} \frac{\mathrm{d}^N x_n \mathrm{d}^N \boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon \bar{L}_n}\langle \boldsymbol{x}_1 \mid\rangle, \tag{19.22}$$

这里

$$\bar{L}_n = \boldsymbol{k}_n \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}_{n+1}-\boldsymbol{x}_n}{\epsilon}\right) - \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_n^2 + V\left(\frac{\boldsymbol{x}_{n+1}+\boldsymbol{x}_n}{2}\right)\right]$$

其中 $t' = t + s\epsilon$, $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{k}_n$ 表示在 $t_n = t + (n-1)\epsilon$ 时的 c 数积分变量,并且 $\boldsymbol{x}_{s+1} = \boldsymbol{x}'$. [像以前一样, $\boldsymbol{k}_{s+1}$ 并不进入这些表式.] 像在(19.9a)和(19.15a)中一样,上述方程式也可以写成更加符号化的形式. 我们写作

$$e^{-i(t'-t)H} = \int [dx] e^{i\int_t^{t'} L d\tau} \tag{19.21a}$$

这里

$$[dx] = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_n \left(\frac{1}{2i\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}N} d^N x_n$$

和

$$\int_t^{t'} L d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum \varepsilon L_n;$$

另一种形式是

$$e^{-i(t'-t)H} = \int [dx dk] e^{i\int_t^{t'} \overline{L} d\tau}, \tag{19.22a}$$

这里

$$[dx dk] = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_n \frac{d^N x_n d^N k_n}{(2\pi)^N}$$

和

$$\int_t^{t'} \overline{L} d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_n \varepsilon \overline{L}_n,$$

其中 L_n 和$\overline{L}_n$ 由(19.21)和(19.22)式给出.

19.2 韦尔编序的哈密顿量

考虑一个经典的非线性拉格朗日量

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_1(q) \dot{q}^2 + g_2(q) \dot{q} + g_3(q) \tag{19.23}$$

这里 g_1, g_2 和 g_3 是 q 的任意实函数. 按照经典力学, $p \equiv \partial L/\partial \dot{q} = g_1(q)\dot{q} + g_2(q)$, 因而哈密顿量是

$$H = H_{cl}(q, p) = \frac{1}{2} f_1(q) p^2 + f_2(q) p + f_3(q) \tag{19.24}$$

这里

$$f_1 = g_1^{-1}, \quad f_2 = -g_2/g_1$$

和

$$f_3 = \frac{1}{2}(g_2^2 - 2g_1g_3)/g_1.$$

在过渡到量子力学中去时，我们有

$$p = p_{op} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q}.$$

但是，已知经典力学的极限并不能完全决定量子力学的哈密顿量. 因为我们可以有许多不同的方法对 q 和 p 编序.

1. **从路径积分到哈密顿算符** 在前一节中，我们从一个定义好了的量子力学哈密顿量算符 H 出发，证明了格林函数 $e^{-i(t'-t)H}$ 能够被表示成相空间的路径积分(19.15). 现在我们将提出相反的问题：假定我们从经典的非线性哈密顿量 $H_{cl}(q, p)$, (19.24)出发，像在(19.14)中一样，我们还定义了一个以 q, $\dot{q}$ 和 p 三个做变量的函数$\overline{L}$

$$\overline{L}(q, \dot{q}, p) \equiv p\dot{q} - H_{cl}(q, p), \tag{19.25}$$

于是用(19.15)式的右边构造相空间的路径积分. 问题是：在左边与此相应的算符是什么？答案由以下的定理给出.

定理 2. 对于任一满足归一化条件

$$\int \mathrm{d}q \mid \langle q \mid \rangle \mid^2 = 1 \tag{19.26}$$

的态矢，我们有

$$\langle q' \mid e^{-i(t'-t)H_W} \mid \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} \frac{\mathrm{d}q_n \mathrm{d}p_n}{2\pi} e^{i\epsilon \overline{L}_n} \langle q_1 \mid \rangle \tag{19.27}$$

这里 H_W 是韦尔(Weyl)编序的哈密顿算符，由下式给出

$$H_W = \frac{1}{8}(p^2 f_1(q) + 2pf_1(q)p + f_1(q)p^2) + \frac{1}{2}(pf_2(q) + f_2(q)p) + f_3(q) \tag{19.28}$$

其中 $p = -\mathrm{i}\partial/\partial q$, 且

$$\overline{L}_n \equiv \overline{L}(\overline{q}_n, \dot{q}_n, p_n) = p_n\dot{q}_n - H_{cl}(\overline{q}_n, p_n) \tag{19.29}$$

这里

$$\bar{q}_n \equiv \frac{q_{n+1}+q_n}{2},\ \dot{q}_n \equiv \frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon} \tag{19.30}$$

和

$$q_{s+1} = q'.$$

说明. (19.27)式的右方,以及(19.29)—(19.30)应当被看成是一种“处方”. 像以前一样,我们首先把时间 $t'-t$ 分成 s 格,每格为 ε. 在(19.25)式的经典函数 $\bar{L}(q,\ \dot{q},\ p)$ 中,把它的宗量 q, $\dot{q}$ 和 p 换成(19.30)式中的$\bar{q}_n$, $\dot{q}_n$ 和 p_n,我们得到了$\bar{L}_n$. 因此,我们可以把 q_n 和 p_n 当作 q 和 p 在时刻 $t_n = t+(n-1)\varepsilon$ 的值. 对于任意的态矢,由于(19.26),它的 q 表示的归一化已经决定. 经过对 $\mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}p_s$ 的积分以后,(19.27)的右方只与 $q_{s+1}=q'$, $(t'-t)$ 和$|\rangle$有关. 本定理表明它正是矩阵元$\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H_\mathrm{W}}|\rangle$,其中 H_W 由(19.28)式给出.

下面将给出定理 2 的证明,不过在这之前引入某些韦尔编序的一般性质是很有用的.

2. *韦尔编序* 首先让我们讨论某些简单的 q 和 p 的经典的多项式 $q^n p$, $q^n p^2$, $\cdots$, $q^n p^m$, $\cdots$. 我们定义相应的韦尔编序的量子力学表式,用下标 W 表示,它们是

$$(q^n p)_\mathrm{W} \equiv \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} q^{n-l} p q^l$$

$$= \frac{1}{n+1}[q^n p + q^{n-1}pq + \cdots + pq^n], \tag{19.31}$$

$$(q^n p^2)_\mathrm{W} \equiv \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-l} q^{n-l-m} p q^l p q^m$$

等等. 这里 $p=-\mathrm{i}\partial/\partial q$. 一般说来,为了导出$(q^n p^m)_\mathrm{W}$,我们先把那些 q 和 p 作任意的排列,每一个不同的排列计算一次;它们的算术平均值就是$(q^n p^m)_\mathrm{W}$. 对于任一经典的函数

$$F(q,\ p) = \sum C_{lm} q^l p^m,$$

它们的韦尔编序是

$$F(q,\ p)_\mathrm{W} \equiv \sum C_{lm}(q^l p^m)_\mathrm{W}.$$

就我们的目的而言,我们只对那些包含 p 的二次式,但对 q 是任意的函数感兴趣,像在(19.24)中那样.可以直接证明上述形式的韦尔编序与另外一些定义恒同(见本节末的练习1和2):

$$(q^m p)_W \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} q^{m-l} p q^l$$

和

$$(q^m p^2)_W \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} q^{m-l} p^2 q^l; \tag{19.32}$$

或对于 q 的任意函数

$$[f(q)p]_W \equiv \frac{1}{2}[f(q)p + pf(q)]$$

和

$$[f(q)p^2]_W \equiv \frac{1}{4}[f(q)p^2 + 2pf(q)p + p^2 f(q)]. \tag{19.33}$$

注意这些表示式很容易推广到包含 p 的高次项的那些函数.如果交换 q 和 p,则推广(19.32)式和(19.33)式的推广一样.利用(19.33),我们知道对于经典哈密顿量(19.24),它在量子力学中的韦尔编序由(19.28)给出.

因为用了 $p=-\mathrm{i}\partial/\partial q$, H_W 是厄米的,它的本征函数,根据(19.26)的归一化条件,可以选为满足

$$\int \phi_{a'}^*(q)\,\phi_a(q)\,\mathrm{d}q = \delta_{aa'}$$

这里

$$H_W \phi_a(q) = E_a \phi_a(q).$$

时间有关的薛定谔方程*是

$$H_W \mid t\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle,$$

---

* 上面以及在1.1节都强调过,给定一个经典的哈密顿量如(19.23)式,存在几种不同的量子哈密顿的选择; H_W 只是可能的一个.这里,我们仅就如果选择 H_W 作为哈密顿量来考查其结果.

或

$$H_W\phi(q,t)=\mathrm{i}\,\dot{\phi}(q,t)$$

设

$$\phi(q,t)=\langle q\mid t\rangle.$$

则它的格林函数给出如下

$$\langle q'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H_W}\mid q\rangle=\sum_a\phi_a(q')\phi_a^*(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)E_a},$$

因此

$$\phi(q',t')=\int\langle q'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H_W}\mid q\rangle\phi(q,t)\mathrm{d}q.$$

由此,我们得到(19.27)左方的精确含意.

定理 2 的证明. 令 p_{op}和 q_{op}是 p 和 q 的量子算符;它们的矩阵元是

$$\langle q'\mid q_{op}^m\mid q\rangle=q^m\delta(q'-q)$$

和

$$\langle q'\mid p_{op}^m\mid q\rangle=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}p^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q'-q)}.$$

像在(19.1)式中一样.我们可以把(19.32)写作

$$(q^mp^r)_W=\left(\frac{1}{2}\right)^m\sum_{l=0}^m\frac{m!}{l!(m-l)!}q_{op}^{m-l}p_{op}^rq_{op}^l,$$

这里 $r=1$ 或 2. 它的矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle q'\mid(q^mp^r)_W\mid q\rangle&=\left(\frac{1}{2}\right)^m\sum_{l=0}^m\frac{m!}{l!(m-l)!}\\&\quad\cdot q'^{m-l}\langle q'\mid p_{op}^r\mid q\rangle q^l\\&=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}p^r\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q'-q)}\left(\frac{q'+q}{2}\right)^m.\end{aligned}$$

因此,我们得到

$$\langle q'\mid[f(q)p^r]_W\mid q\rangle=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}p^r\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q'-q)}f\left(\frac{q'+q}{2}\right).\tag{19.34}$$

其次,让我们考虑算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon H_W}$.通过展开 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon H_W}=1-\mathrm{i}\epsilon H_W+O(\epsilon^2)$ 并利用(19.28)和(19.34),我们看到

$$\langle q_{n+1} \mid e^{-i\epsilon H_W} \mid q_n \rangle = \delta(q_{n+1} - q_n) - i\epsilon \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)}$$

$$\cdot H_{cl}\left(\frac{q_{n+1}+q_n}{2},\ p_n\right) + O(\epsilon^2).$$

因为

$$\delta(q_{n+1} - q_n) = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)},$$

我们得到

$$\langle q_{n+1} \mid e^{-i\epsilon H_W} \mid q_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{i\epsilon \bar{L}_n} + O(\epsilon^2),$$

这里$\bar{L}_n$ 由(19.29)给出. 把这个表式代入

$$\langle q' \mid e^{-i(t'-t)H_W} \mid \rangle = \int \langle q' \mid e^{-i\epsilon H_W} \mid q_s \rangle \langle q_s \mid e^{-i\epsilon H_W} \mid q_{s-1} \rangle$$

$$\cdots \langle q_2 \mid e^{-i\epsilon H_W} \mid q_1 \rangle \langle q_1 \mid \rangle \prod_{n=1}^{s} dq_n$$

并取极限 $\epsilon \to 0$,我们得出定理 2.

这些讨论能够容易地推广到有几个变量 q_1, q_2, …的情况. 详细的讨论从略.

练习 1. 证明由于 $[p, q] = -i$,

$$\frac{1}{2}(q^m p + pq^m) = q^m p - \frac{1}{2} imq^{m-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_0^m \frac{m!}{l!(m-l)!} q^{m-l} pq^l$$

$$= (q^m p)_W \quad \text{定义见(19.31).}$$

练习 2. 通过利用 $\sum_0^m l^2 = \frac{m}{6}(m+1)(2m+1)$,

$$\sum_0^m l^3 = \left[\frac{1}{2}m(m+1)\right]^2,$$

$$\sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} l(l-1) = (2)^{m-2} m(m-1),$$

证明.

$$\frac{1}{4}(q^m p^2 + 2pq^m p + p^2 q^m)$$

$$= q^m p^2 - \mathrm{i} m q^{m-1} p - \frac{1}{4} m(m-1) q^{m-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_0^m \frac{m!}{l!(m-l)!} q^{m-l} p^2 q^m$$

$$= (q^m p^2)_{\mathrm{W}}\text{ . 定义见(19.31).}$$

练习 3. 由定理 2,证明(19.27)等价于

$$\langle q' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H_{\mathrm{W}}} \mid \rangle$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} \left[\frac{g_1(\bar{q}_n)}{2\pi \mathrm{i}\epsilon}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}q_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon L_n} \langle q_1 \mid \rangle,$$

这里

$$L_n = L(\bar{q}_n,\ \dot{q}_n) = \frac{1}{2} g_1(\bar{q}_n)\dot{q}_n^2 + g_2(\bar{q}_n)\dot{q}_n + g_3(\dot{q}_n),$$

其中 g_i 由(19.23)给出,$\bar{q}_n$, $\dot{q}_n$ 由(19.30)给出.

19.3 曲线坐标

1. **哈密顿算符** 像在 19.1 节中的讨论一样,让我们从一个有笛卡儿基的问题开始.用 x_1, x_2, …, x_N 表示笛卡儿坐标.在由 x_a 到曲线坐标 q_b 的变换下,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \to q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix},$$

经典的拉氏量 $L = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}\,\dot{x} - V$ 变为

$$L(q,\ \dot{q}) = \frac{1}{2}\tilde{\dot{q}} M(q)\dot{q} - V(q) \tag{19.35}$$

这里 $M(q)$的矩阵元是 $M_{ab}=\frac{\partial x_c}{\partial q_a}\cdot\frac{\partial x_c}{\partial q_b}$. [下标表示 x 和 q 的分量.]像(18.45)式中一样,经典的哈密顿量是

$$H_{\mathrm{cl}}(q,\ p)=\frac{1}{2}\ \tilde{p}M^{-1}(q)p+V(q) \tag{19.36}$$

这里 $p=M\dot{q}$.

在笛卡儿坐标中量子哈密顿量 H 由(19.20)给出;和(18.47)—(18.48)一样,同一个算符在曲线坐标中是

$$H(q,\ p)=\frac{1}{2}\ \frac{1}{\mathscr{J}}p_a(M_{ab}^{-1}\mathscr{J}p_b)+V(q), \tag{19.37}$$

这里 $p_a=-\mathrm{i}\partial/\partial q_a$ 和

$$\mathscr{J}(q)=\sqrt{\det M(q)}. \tag{19.38}$$

与时间有关的薛定谔方程是

$$H\mid t\rangle=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\mid t\rangle,$$

H 的本征矢量由下式决定

$$H\mid a\rangle=E_a\mid a\rangle$$

正交归一的条件是 $\langle a'\mid a\rangle=\delta_{a'a}$. 在 x 表象中,我们可以定义

$$\psi(x,\ t)\equiv\langle x\mid t\rangle$$

和

$$\psi_a(x)\equiv\langle x\mid a\rangle. \tag{19.39}$$

$\{\psi_a(x)\}$构成一组正交归一的完备函数系,它满足

$$\int\psi_{a'}^*(x)\psi_a(x)\mathrm{d}^Nx=\delta_{a'a}. \tag{19.40}$$

薛定谔方程式的格林函数是

$$\langle x'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H}\mid x\rangle=\sum_a\psi_a(x')\psi_a^*(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)E_a}$$

它通过以下的关系把 $\psi(x,\ t)$连接到 $\psi(x',\ t')$

$$\psi(x', t') = \int \langle x' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid x \rangle \psi(x, t) d^N x. \qquad (19.41)$$

由于$\mathscr{J}$是变换$x \to q$的雅可比行列式,我们有

$$d^N x = \mathscr{J} d^N q \qquad (19.42)$$

这里$d^N q = dq_1 dq_2 \cdots dq_N$,并且像以前一样$d^N x = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$. 在$q$表象中,较方便的办法是消去体积元中的雅可比因子. 我们引进

$$\langle x \mid t \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathscr{J}}} \langle q \mid t \rangle \quad 和 \quad \langle x \mid a \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathscr{J}}} \langle q \mid a \rangle.$$

因此

$$\phi(q, t) \equiv \langle q \mid t \rangle = \sqrt{\mathscr{J}(q)} \psi(x(q), t)$$

和

$$\phi_a(q) \equiv \langle q \mid a \rangle = \sqrt{\mathscr{J}(q)} \psi_a(x(q)). \qquad (19.43)$$

由(19.40)得出ϕ_a等满足

$$\int \phi_{a'}^* (q) \phi_a(q) d^N q = \delta_{a'a}. \qquad (19.44)$$

我们定义算符

$$\overline{H}(q, p) \equiv \sqrt{\mathscr{J}(q)} H(q, p) \frac{1}{\sqrt{\mathscr{J}(q)}}, \qquad (19.45)$$

因此能量本征函数$\phi_a(q)$满足

$$\overline{H} \phi_a(q) = E_a \phi_a(q),$$

而与时间有关的薛定谔方程变为

$$\overline{H} \phi(q, t) = i \dot{\phi}(q, t); \qquad (19.46)$$

它的格林函数是

$$\langle q' \mid e^{-i(t'-t)\overline{H}} \mid q \rangle \equiv \sum_a \phi_a(q') \phi_a^* (q) e^{-i(t'-t)E_a}. \qquad (19.47)$$

由(19.41)—(19.43),得出

$$\phi(q', t') = \int \langle q' \mid e^{-i(t'-t)\overline{H}} \mid q \rangle \phi(q, t) d^N q. \qquad (19.48)$$

下一步,我们要把这一格林函数用 q 空间的路径积分表示出来.

2. *路径积分公式* 像以前一样,时间 $t'-t$ 被分成 s 个间隔,每格大小为 ε. 令

$$q(n)=\begin{pmatrix}q_1(n)\\q_2(n)\\\vdots\\q_N(n)\end{pmatrix},$$

表示在时刻 $t_n=t+(n-1)\varepsilon$ 时的 q 值. 序列 $q=q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(s)$,和 $q(s+1)=q'$ 描述了当 τ 从 t 变到 t'时的一条路径. 对于在时刻 t 的任一态矢 $|\rangle$,(19.48)可以被写成如下形式的路径积分.

定理 3.

$$\begin{aligned}\phi(q',t')&=\langle q'\mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)\bar{H}}\mid\rangle\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\prod_{n=1}^{s}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}N}\mathrm{d}^N q(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon L_{\mathrm{eff}}(n)}\langle q(1)\mid\rangle\end{aligned}\tag{19.49}$$

这里

$$L_{\mathrm{eff}}(n)=L(\bar{q}(n),\ \dot{q}(n))-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\ln\mathscr{J}(\bar{q}(n))-V_c(\bar{q}(n))\tag{19.50}$$

其中

$$\bar{q}(n)\equiv\frac{q(n+1)+q(n)}{2},\quad \dot{q}(n)\equiv\frac{q(n+1)-q(n)}{\varepsilon},$$

函数 $L(q,\ \dot{q})$和$\mathscr{J}(q)$由(19.35), (19.38)给出,并且

$$V_c(q)=\frac{1}{8}\left[\frac{\partial}{\partial q_a}\left(\frac{\partial q_b}{\partial x_c}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial q_b}\left(\frac{\partial q_a}{\partial x_c}\right)\right].\tag{19.51}$$

有趣的是注意到雅可比项变为一个虚"有效"位势 * ,大小正比于 ε^{-1},而当 $\varepsilon\to 0$ 时,它** 变为 $\delta(0)=\infty$. 对于曲线坐标,还有一个附加的实位势 $V_c(q)$.

---

* Lee T D, Yang C N. *Phys Rev*, 1962, **128**:885.

** 函数 $\delta(t)$ 可以被看成是一个正的方位势函数的极限,这个位势函数在 $|t|>\frac{1}{2}\varepsilon$时 $=0$,而在其他情况下 $=\varepsilon^{-1}$;因此 $\delta(0)=\varepsilon^{-1}\to\infty$.

证明. 由(19.33)我们知道,(19.36)的韦尔编序算符是

$$H(q,\ p)_{\mathrm{W}} = \frac{1}{8}[p_a p_b M_{ab}^{-1} + 2p_a M_{ab}^{-1} p_b + M_{ab}^{-1} p_a p_b] + V(q) \tag{19.52}$$

这里像以前一样,$p = -\mathrm{i}\partial/\partial q_a$,并且

$$M_{ab}^{-1} = \frac{\partial q_a}{\partial x_c}\frac{\partial q_b}{\partial x_c}.$$

直接微分就能证明,正像下面习题 1 将要给出的,(19.45)式中的$\overline{H}$算符与H_{W}之差就是(19.51)式给出的$V_c(q)$;即

$$\overline{H}(q,\ p) = H(q,\ p)_{\mathrm{W}} + V_c(q). \tag{19.53}$$

在把$t'-t$分成$s\varepsilon$的时候,在每一时刻$t_n = t+(n-1)\varepsilon$我们引进$2N$个积分变量$q_1(n),\ \cdots,\ q_N(n),\ p_1(n),\ \cdots,\ p_N(n)$,组成两个$(N\times 1)$的列矩阵

$$q(n) = \begin{pmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{pmatrix} \quad 和 \quad p(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_N(n) \end{pmatrix}.$$

运用定理 2 和(19.53)式,我们可以首先把(19.48)式写成$(q,\ p)$空间中的一个路径积分.对于任一态矢$|\rangle$

$$\langle q' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)\overline{H}} \mid \rangle = \int \langle q' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)\overline{H}} \mid q\rangle\langle q \mid \rangle \mathrm{d}^N q$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \mathrm{d}^N q(n)\mathrm{d}^N p(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\overline{L}(n)}\langle q_1 \mid \rangle \tag{19.54}$$

和

$$\overline{L}(n) = \tilde{p}(n)\dot{q}(n) - H_{\mathrm{cl}}(\overline{q}(n),\ p(n)) - V_c(\overline{q}(n)) \tag{19.55}$$

这里,像(19.30)式一样

$$\overline{q}(n) \equiv \frac{q(n+1)+q(n)}{2},\ \dot{q}(n) \equiv \frac{q(n+1)-q(n)}{\varepsilon},$$

而 $H_{cl}(q, p)$和 $V_c(q)$由(19.36)和(19.51)给出.

函数$\overline{L}(n)$二次式地依赖于 $p(n)$. 我们注意到,(19.35)式中的质量矩阵是实对称的. 因此,存在一个使 M 对角化的实正交矩阵 U

$$\widetilde{U}M(\overline{q}(n))U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

为方便计,引入列矩阵

$$\pi \equiv \widetilde{U}p(n) \quad 和 \quad v \equiv \widetilde{U}\,\dot{q}(n)$$

其中 π_a 和 v_a 是它们的第 a 个矩阵元. 代(19.36)入(19.55),我们写出

$$\overline{L}(n) = \tilde{\pi}v - \frac{1}{2}\tilde{\pi}\Lambda^{-1}\pi - V - V_c$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left[\frac{1}{\lambda_a}(\pi_a - \lambda_a v_a)^2 - \lambda_a v_a^2\right] - V - V_c.$$

由于 $d^N p(n) = d\pi_1 d\pi_2 \cdots d\pi_N$,

$$\sum_a \lambda_a v_a^2 = \tilde{v}\Lambda v = \dot{\tilde{q}}(n)M(\overline{q}(n))\dot{q}(n)$$

和

$$\prod_a \sqrt{\lambda_a} = \sqrt{\det M(\overline{q}(n))} = \mathscr{J}(\overline{q}(n)) = e^{i\epsilon(-i/\epsilon)\ln\mathscr{J}(\overline{q}(n))}.$$

利用(19.3)能够容易地完成(19.54)式中对 $p(n)$的积分. 结果就是(19.49),定理 3 得到证明.

用(19.9a)和(19.21a)的紧凑表示,可以把(19.49)写作

$$e^{-i(t'-t)\overline{H}} = \int [dq] e^{i\int_t^{t'} L_{eff} d\tau} \tag{19.49a}$$

这里

$$L_{eff}(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) - i\delta(0)\ln\mathscr{J}(q) - V_c(q), \tag{19.56}$$

和

$$\delta(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon},$$

因此,在任何两个态矢 t 时刻的 $|\rangle$ 和 t' 时刻的 $|t'\rangle$ 之间,我们有

$$\langle t' \mid e^{-i(t'-t)\bar{H}} \mid\rangle=\int[dq]\langle t' \mid q'\rangle e^{i\int_t^{t'}L_{\text{eff}}d\tau}\langle q \mid t\rangle,$$

其中

$$[dq]=\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{n=1}^{s}\left(\frac{1}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}N}d^N q(n),$$

并利用(19.50)式中给出的 $L_{\text{eff}}(n)$

$$\int_t^{t'}L'_{\text{eff}}d\tau=\sum_{n=1}^{s}\varepsilon L_{\text{eff}}(n).$$

由(19.38)我们知道*

$$\ln\mathcal{J}=\frac{1}{2}\ln\det M=\frac{1}{2}\text{trace}\ln M.$$

在 t 和 t' 之间的时刻 τ, M 的矩阵元由下式给出

$$\langle a \mid M(\tau) \mid b\rangle=\frac{\partial x_c(\tau)}{\partial q_a(\tau)}\frac{\partial x_c(\tau)}{\partial q_b(\tau)}.$$

让我们定义

$$\langle a,\tau \mid \ln m \mid b,\tau'\rangle\equiv\delta(\tau-\tau')<a \mid \ln M(\tau) \mid b\rangle, \quad (19.57)$$

因此

$$\text{trace}\ln m=\int d\tau\delta(0)\text{trace}\ln M(\tau);$$

从而,(19.56)的积分能够被表为

---

* 用 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 表示 M 的本征值,我们有

$$\mathcal{J}=\sqrt{\det M}=\prod_a\lambda_a^{1/2},$$

它给出

$$\ln\mathcal{J}=\frac{1}{2}\sum_a\ln\lambda_a=\frac{1}{2}\text{trace}\ln M.$$

$$\int_t^{t'} L_{\text{eff}} d\tau = \int_t^{t'} [L(q, \dot{q}) - V_c(q)] d\tau - \text{i trace} \ln m^{\frac{1}{2}}. \quad (19.56\text{a})$$

练习 1.　考虑从笛卡儿坐标 x_1, x_2, …, x_N 到曲线坐标 q_1, q_2, …, q_N 的变换.令

$$M_{ab}^{-1} = \frac{\partial q_a}{\partial x_c}\frac{\partial q_b}{\partial x_c} \quad \text{和} \quad \mathscr{J} = \sqrt{\det M},$$

这里

$$K = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_a} = -\frac{1}{2\mathscr{J}}\frac{\partial}{\partial q_a} M_{ab}^{-1} \mathscr{J} \frac{\partial}{\partial q_b},$$

运用习题 7.3 的结果,证明

$$\sqrt{\mathscr{J}} K \frac{1}{\sqrt{\mathscr{J}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} p_a p_b M_{ab}^{-1} + \frac{1}{2} p_a M_{ab}^{-1} p_b + \frac{1}{4} M_{ab}^{-1} p_a p_b\right] + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial q_a}\frac{\partial q_b}{\partial x_c}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_b}\frac{\partial q_a}{\partial x_c}\right), \quad (19.58)$$

这里 $p_a = -\mathrm{i}\partial/\partial q_a$.

注意,由(19.58)就得出(19.53).

练习 2.　在一维的问题中,令 x 是笛卡儿坐标,q 是曲线坐标,像在(19.35)中一样,直接证明(19.36),(19.37)和(19.53)成立,其中

$$M = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q}\right)^2, \ M^{-1} = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)^2, \ \mathscr{J} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q}$$

和

$$V_c = \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2.$$

将路径积分的形式(19.49)—(19.51)应用于这一简单的情况.

3. 一个例子　考虑在 18.2 节中讨论过的例子.在 $\xi = 0$ 的规范下,(18.23)式中的哈密顿算符能够用极坐标写为

$$H = -\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V(r).$$

相应的经典拉格朗日函数是

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2-V(r). \tag{19.59}$$

变换 $x_1, x_2 \to r, \theta$ 的雅可比行列式是

$$\mathscr{J}=r. \tag{19.60}$$

令 $\psi(x_1, x_2)$ 是笛卡儿坐标中的波函数

$$\psi(x_1,x_2)\equiv\langle x_1,x_2\mid\rangle.$$

根据(19.43),我们引进

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{r}}\phi.$$

约束(18.24)表示 ψ,从而也是 ϕ,是 θ 无关的.因此,应用 ϕ,时间有关的薛定谔方程变为

$$\overline{H}_\phi(r,t)=\mathrm{i}\,\dot{\phi}(r,t) \tag{19.61}$$

这里 $\overline{H}=\sqrt{r}H\frac{1}{\sqrt{r}}$.因为$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$,像在(18.26)中一样,我们可以写下

$$\overline{H}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+V(r)+V_c(r), \tag{19.62}$$

这里

$$V_c(r)=-\frac{1}{8r^2}. \tag{19.63}$$

由于上述的哈密顿量 $\overline{H}$ 已经是韦尔编序了的,我们可以应用定理 2.在(19.31)中令 $q_n=r(n)$ 和 $p_n=p_r(n)$,我们有

$$\phi(r',t')=\lim_{\epsilon\to 0}\int\prod_{n=1}^{s}\frac{\mathrm{d}r(n)\mathrm{d}p_r(n)}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon\overline{L}_n}\phi(r(1),t)$$

这里

$$\overline{L}_n=p_r(n)\,\dot{r}(n)-\frac{1}{2}p_r^2(n)-V(\overline{r}(n))-V_c(\overline{r}(n)),$$

$$\overline{r}(n)=\frac{1}{2}[r(n+1)+r(n)],$$

$$\dot{r}(n)=[r(n+1)-r(n)]/\epsilon, \tag{19.64}$$

和

$$r(s+1) = r'.$$

对 $p_r(n)$的积分能够容易地完成. 结果是

$$\phi(r', t') = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} \left(\frac{1}{2\pi i \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} dr(n) e^{i\varepsilon \overline{L}_{eff}(n)} \phi(r(1), t) \quad (19.65)$$

这里

$$\overline{L}_{eff}(n) = \frac{1}{2} \dot{r}^2(n) - V(\overline{r}(n)) - V_c(\overline{r}(n)). \quad (19.66)$$

同样的结果也可以用定理 3 导出,在(19.49)中令 $N=2$, $d^N q(n) = dr(n) d\theta(n)$ 和

$$q(n) = \begin{pmatrix} r(n) \\ \theta(n) \end{pmatrix}$$

我们得到

$$\phi(r', \theta', t') = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} \left(\frac{1}{2\pi i \varepsilon}\right) dr(n) d\theta(n) e^{i\varepsilon L_{eff}(n)} \phi(r(1), t) \quad (19.67)$$

这里 $r(s+1) = r'$ 和 $\theta(s+1) = \theta'$,

$$\begin{aligned} L_{eff}(n) = {} & L(\overline{r}(n), \overline{\theta}(n), \dot{r}(n), \dot{\theta}(n)) \\ & - i \frac{1}{\varepsilon} \ln \mathscr{J}(\overline{r}(n)) - V(\overline{r}(n)) \\ & - V_c(\overline{r}(n)) \end{aligned} \quad (19.68)$$

其中 $\mathscr{J}$, V_c, $\overline{r}(n)$, $\dot{r}(n)$由(19.60)和(19.63)—(19.64)给出

$$\overline{\theta}(n) = \frac{1}{2}[\theta(n+1) + \theta(n)]$$

和

$$\dot{\theta}(n) = \frac{1}{\varepsilon}[\theta(n+1) - \theta(n)].$$

因为 $\phi(r(1), t)$与 $\theta(1)$无关,我们可以先对 $\theta(1)$积分,然后对 $\theta(2)$, ⋯. 这些对角度积分的结果 * 是

---

* 参考 Edwards S F, Gulyaev Y V. *Proc Roy Soc*, 1964, **1A297**:229.

$$\int \prod_{n=1}^{s} \left(\frac{1}{2\pi i\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta(n) e^{\frac{1}{2}i\epsilon(\bar{r}(n)\dot{\theta}(n))^2} = \left[\prod_{n=1}^{s} \bar{r}(n)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

它消去了(19.68)式中的雅可比项并导致和(19.65)相同的表式,其中 $\phi(r', \theta', t') = \phi(r', t')$ 与 θ' 无关.

19.4 费恩曼图

下面的例子表明路径积分的形式怎样能够自然地导致费恩曼图.我们将看到这一方法比起第 5 章中给出的戴森-威克推导来有它相对的优点.

1. **收缩** 考虑一个简单的谐振子拉格朗日量

$$L = L_0(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2,$$

并设 $F(q, \dot{q})$, $G(q, \dot{q})$是 q 和$\dot{q}$ 的两个任意的函数.在

$$F(1) \equiv F(q(t_1), \dot{q}(t_1)) \text{ 和 } G(2) \equiv G(q(t_2), \dot{q}(t_2)) \tag{19.69}$$

之间路径积分“收缩”被定义为

$$\underbrace{F(1)G(2)} \equiv \lim_{\substack{t'\to\infty \\ t\to-\infty}} \frac{\langle \text{vac} \mid \int [dq] F(1)G(2) e^{i\int_t^{t'} L_0 d\tau} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid \int [dq] e^{i\int_t^{t'} L_0 d\tau} \mid \text{vac}\rangle} \tag{19.70}$$

这里$|\text{vac}\rangle$是谐振子的基态(或真空);即,

$$a \mid \text{vac}\rangle = 0,$$

a 是标准的湮没算符,由下式定义

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^{\dagger})$$

和

$$p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^{\dagger}). \tag{19.71}$$

在路径积分(19.70)中,我们的“处方”总是首先在任一时刻 $t=t_n$, 用

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[q(n+1)+q(n)] \equiv \bar{q}(n) \text{ 代替 } q(t), \\
&\frac{1}{\varepsilon}[q(n+1)-q(n)] \equiv \dot{q}(n) \text{ 代替 } \dot{q}(t),
\end{aligned}
\tag{19.72}
$$

随后取极限 $\varepsilon\to 0$,像在(19.9)或(19.49)中一样

定理 4.

$$
\underbrace{q(1)q(2)} = D_F(t_1-t_2) \equiv \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{k_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{d}k_0, \tag{19.73}
$$

$$
\underbrace{\dot{q}(1)q(2)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}D_F(t_1-t_2) \tag{19.74}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\dot{q}(1)\,\dot{q}(2)} &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_1^2}D_F(t_1-t_2) \\
&= \omega^2 D_F(t_1-t_2)+\mathrm{i}\delta(t_1-t_2).
\end{aligned}
\tag{19.75}
$$

这些表式可以和(5.45)中戴森-威克关于收缩的定义相对照

$$
\underline{q(1)q(2)} = D_F(t_1-t_2) = \underbrace{q(1)q(2)} \quad \text{在一切时间} \tag{19.73a}
$$

$$
\underline{p(1)q(2)} = \underline{\dot{q}(1)q(2)} = \begin{cases} \underbrace{\dot{q}(1)q(2)} & \text{如果 } t_1\neq t_2 \\ -\dfrac{\mathrm{i}}{2} & \text{如果 } t_1=t_2 \end{cases} \tag{19.74a}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\underline{p(1)p(2)} = \underline{\dot{q}(1)\,\dot{q}(2)} &= \begin{cases} \underbrace{\dot{q}(1)\,\dot{q}(2)} & \text{如果 } t_1\neq t_2 \\ \dfrac{1}{2}\omega & \text{如果 } t_1=t_2 \end{cases} \\
&= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_1^2}D_F(t_1-t_2)-\mathrm{i}\delta(t_1-t_2),
\end{aligned}
\tag{19.75a}
$$

其中曲线连接的表示路径积分收缩而直线连接的是戴森-威克收缩.

证明.　令

$$
H_0 = \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2 = \left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\omega
$$

为谐振子的哈密顿算符，由于(19.9a)，(19.70)式中的分母是

$$\langle \mathrm{vac} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H_0} \mid \mathrm{vac}\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega(t'-t)};$$

在 $t_1 > t_2$ 时，分子是

$$\langle \mathrm{vac} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t_1)H_0} F \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t_1-t_2)H_0} G \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t_2-t)H_0} \mid \mathrm{vac}\rangle, \tag{19.76}$$

而当 $t_1 < t_2$ 时，不同之处只是把 t_1，F 和 t_2，G 互相交换.

先考虑这一情况 $F = G = q$. 根据(19.7)—(19.9)，我们知道路径积分的形式表示在薛定谔表象中态矢随时间的演化. 因此，由(5.15)得出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0} q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} = q(t)$$

是算符 q 在时刻 t 的相互作用表象*. 如果我们用下标 I 表示相互作用表象，则(19.76)是

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega(t'-t)} \langle \mathrm{vac} \mid q(t_1) q(t_2) \mid \mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}};$$

结果，(19.70)给出

$$\underbrace{q(1)q(2)} = \begin{cases} \langle \mathrm{vac} \mid q(1)q(2) \mid \mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & \text{如果 } t_1 > t_2 \\ \langle \mathrm{vac} \mid q(2)q(1) \mid \mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & \text{如果 } t_2 > t_1. \end{cases}$$

另一方面，F 和 G 之间收缩的戴森-威克定义由(5.45)给出

$$\underbracket{F(1)G(2)} = \begin{cases} \langle \mathrm{vac} \mid F(1)G(2) \mid \mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & \text{如果 } t_1 \geqslant t_2 \\ \langle \mathrm{vac} \mid G(2)F(1) \mid \mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & \text{如果 } t_2 > t_1. \end{cases} \tag{19.77}$$

令 $F = G = q$，我们得出：如果 $t_1 \neq t_2$，$\underbracket{q(1)q(2)} = \underbrace{q(1)q(2)}$. 当 $t_1 = t_2$ 时，从它们的定义中容易看出，两种收缩$\underbrace{q(1)q(2)}$和$\underbracket{q(1)q(2)}$都是连续的. 这样，它们在一切时刻都相等.

在相互作用表象中我们有

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$$

---

* 在这个简单的例子中，相互作用表象和海森伯表象一样.

和

$$\dot{q}(t)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})=p_{\mathrm{I}}(t),$$

这里 a 和 $a^{\dagger}$ 与时间无关. 由于

$$q(t)\mid\mathrm{vac}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mid\mathrm{vac}\rangle,$$

我们导出

$$\begin{aligned}\underbrace{q(1)q(2)}=\underbrace{q(1)q(2)}=\frac{1}{2\omega}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}\\ =D_F(t_1-t_2),\end{aligned}\tag{19.78}$$

这里指数上的一号用于 $t_1>t_2$ 而+号用于 $t_1<t_2$. 函数 $D_F(t_1-t_2)$ 在 $t_1=t_2$ 时连续. 利用图 5.1 中给出的围道积分,能够很容易地导出它在(19.73)中的积分表示,这就完成了(19.73)和(19.73a)的证明.

对于定理 4 的其余部分,我们能够完全同样地证明

$$\underbrace{\dot{q}(1)q(2)}=\underbrace{\dot{q}(1)q(2)}$$

和

$$\underbrace{\dot{q}(1)\dot{q}(2)}=\underbrace{\dot{q}(1)\dot{q}(2)},$$

只要

$$t_1\neq t_2.$$

问题只发生在 $t_1=t_2$ 时. 由(19.72)得出当 $t_1=t_2$ 时,$\underbrace{\dot{q}(1)q(2)}$ 是

$$\begin{aligned}&\left(\frac{q(n+1)-q(n)}{\varepsilon}\right)\left(\frac{q(n+1)+q(n)}{2}\right)\\ &=\frac{q^2(n+1)-q^2(n)}{2\varepsilon}\end{aligned}$$

的平均值,这是零. 于是

$$\underbrace{\dot{q}(1)q(2)}=0\ \text{当}\ t_1=t_2\tag{19.79}$$

与此相似,当 $t_1=t_2$ 时,收缩$\underbrace{\dot{q}(1)\dot{q}(2)}$ 由

$$\left(\frac{q(n+1)-q(n)}{\varepsilon}\right)^2.$$

的平均值给出. 由于(19.5)式, $|q(n+1)-q(n)|\sim\sqrt{\varepsilon}$, 这一平均值 $\propto\varepsilon^{-1}$,这可以容易地利用下式算出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^2/2\varepsilon)}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}.$$

因此,从(19.70)我们能够证明

$$\undergroup{\dot q(1)\dot q(2)}=\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\omega\quad 当\ t_1=t_2. \tag{19.80}$$

由(19.73)中的 D_F 函数,我们知道当 $t_1=t_2$ 时,

$$\dot D_F=0\quad 和\quad \ddot D_F=\mathrm{i}\delta(0)+\frac{1}{2}\omega$$

这**恰好**与(19.79)和(19.80)相符. 由此建立了(19.74)和(19.75).

另一方面,由于当 $t_1=t_2$ 时, $p=\dot q$, 应用戴森-威克的定义(19.77),我们有 *

$$\underbrace{\dot q(1)q(2)}=\langle\mathrm{vac}\mid p(1)q(1)\mid\mathrm{vac}\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{2} \tag{19.81a}$$

和

$$\underbrace{\dot q(1)\dot q(2)}=\langle\mathrm{vac}\mid p(1)p(1)\mid\mathrm{vac}\rangle=\frac{1}{2}\omega. \tag{19.81b}$$

这就导致了(19.74a)和(19.75a)并完成了对定理 4 的证明. 重要的是要注意到在我们的路径积分定义(19.70)以及"处方"(19.72)中

---

* 如果我们把戴森-威克的定义(19.77)修正为

$$\underbrace{F(1)G(2)}=\begin{cases}\langle\mathrm{vac}\mid F(1)G(2)\mid\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & 如果\quad t_1>t_2\\ \frac{1}{2}\langle\mathrm{vac}\mid F(1)G(2)+G(2)F(1)\mid\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & 如果\quad t_1=t_2\\ \langle\mathrm{vac}\mid G(2)F(1)\mid\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{I}} & 如果\quad t_1<t_2,\end{cases}$$

则当 $t_1=t_2$ 时, $\underbrace{\dot q(1)\dot q(2)}=0$ 而不是 $-\frac{\mathrm{i}}{2}$,但 $\underbrace{\dot q(1)\dot q(2)}$ 仍然是 $\frac{1}{2}\omega$. 用这个修正了的定义,则在一切时刻 $\undergroup{\dot q(1)q(2)}=\underbrace{\dot q(1)q(2)}$,但(19.75a)式 $\undergroup{\dot q(1)q(2)}=\underbrace{\dot q(1)q(2)}+\mathrm{i}\delta(t_1-t_2)$, 仍然成立.

$$\text{时间导数的收缩与收缩的时间导数相同} \tag{19.82}$$

而在戴森-威克的定义中却不是这样.

练习. 令 F 和 G 只是 q 的函数. 证明在一切时刻,

$$\underbrace{F(1)G(2)} = \underset{\sqcup}{F(1)G(2)}. \tag{19.83}$$

2. **连接图和不连接图** 在相对论的场论中,当我们按照例如第5章中所发展的方法,把 S 矩阵表为费恩曼图形之和时,不难看出每一个矩阵元一般都包含连接和不连接的图. 物理上,不连接的图代表独立的过程,例如在不同的时空区一些互相无关的过程. 从图解上看虽然这种区分是显然的,但从解析上把它们分离出来并不是毫无意义的. 下面的例子表明路径积分的形式怎样能够用到这里.

让我们考虑一下自旋为0的自由场在有一个给定的外源下这样一个简单的问题,假定拉格朗日函数是

$$L_j(\phi,\ \dot{\phi}) \equiv L(\phi,\ \dot{\phi}) + \int j\phi \mathrm{d}^3 r, \tag{19.84}$$

这里

$$L(\phi,\ \dot{\phi}) = -\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2 + m^2\phi^2\right]\mathrm{d}^3 r,$$

并且 $j = j(x)$ 是空时位置 $x_\mu = (\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t)$ 的一个任意的c数函数. 对于 $j = 0$, 哈密顿算子是

$$H = \int\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right]\mathrm{d}^3 r$$

其中 π 和 ϕ 满足标准的正则对易规则(2.5),令 $|\mathrm{vac}\rangle$ 为 H 的基态. 我们定义 $j(x)$ 的两个泛函 W 和 S

$$W(j) \equiv \lim_{\substack{t'\to\infty \\ t\to-\infty}} \frac{\langle \mathrm{vac} \mid \int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L_j \mathrm{d}\tau} \mid \mathrm{vac}\rangle}{\langle \mathrm{vac} \mid \int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L \mathrm{d}\tau} \mid \mathrm{vac}\rangle}, \tag{19.85}$$

而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(j)} \equiv W(j). \tag{19.86}$$

我们将看到,$S(j)$ 只包含连接图,而 $W(j)$ 包含连接与不连接的两者.

为了给出上述路径积分表式的精确含义，我们引进傅里叶展开

$$\phi(\boldsymbol{r},\ t)=\sqrt{\frac{2}{\Omega}}\sum{}'[q_{c,\boldsymbol{k}}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+q_{s,\boldsymbol{k}}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \qquad (19.87)$$

这里 $q_{c,\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $q_{s,\boldsymbol{k}}(t)$ 是厄米的，求和 $\sum'$ 遍及于半个 $\boldsymbol{k}$ 空间，就像在 346 页所定义的那样. 方便的办法是用一个动参数代替那些不同的下标：

$$\alpha \text{ 表示 } c,\ \boldsymbol{k} \text{ 和 } s,\ \boldsymbol{k}$$

像在前节中一样，我们可以把所有这些坐标组成一个单列矩阵 q，它的矩阵元就是 q_α 等：

$$q=\begin{pmatrix}\vdots\\ q_{c,\boldsymbol{k}}\\ q_{s,\boldsymbol{k}}\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

于是方程式(19.84)变为

$$L_j(q,\ \dot{q})=L(q,\ \dot{q})+\sum_\alpha j_\alpha q_\alpha$$

这里

$$j_\alpha=\sqrt{\frac{2}{\Omega}}\int \mathrm{d}^3 r j(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\begin{cases}\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} & \text{若 } \alpha=c,\ \boldsymbol{k}\\ \sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} & \text{若 } \alpha=s,\ \boldsymbol{k},\end{cases}$$

$$L(q,\ \dot{q})=\frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2 q_\alpha^2)$$

和

$$\omega_\alpha=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}.$$

我们再一次把时间间隔 $t'-t\equiv\tau$ 分成 s 段，每段长为 ε，用 $q_\alpha(n)$ 作为在时刻 $t_n=t+(n-1)\varepsilon$ 的 q_α 值. (19.85) 式中的分母是

$$\langle \text{vac}\mid\int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}\mid\text{vac}\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int\mathrm{d}q_{s+1}\langle\text{vac}\mid q(s+1)\rangle$$

$$\cdot\int\prod_{n=1}^{s}\prod_\alpha\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_\alpha(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon L(n)}$$

$$\cdot\langle q(1)\mid\text{vac}\rangle,$$

这里

$$L(n)=L(\bar{q}(n),\ \dot{q}(n)),\tag{19.88}$$

其中

$$\bar{q}(n)=\frac{q(n+1)+q(n)}{2}\quad 和\quad \dot{q}(n)=\frac{q(n+1)-q(n)}{\varepsilon},$$

像以前一样;分子的表示式与此相同,只是用 L_j 代替 L,这样,我们可以认为

$$[\mathrm{d}\phi]=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{d}q_{s+1}\prod_{n=1}^{s}\prod_{\alpha}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_{\alpha}(n),$$

$$\int_{t_0}^{t'}L\mathrm{d}\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sum_{n=1}^{s}L(\bar{q}(n),\ \dot{q}(n))\tag{19.89}$$

和

$$\int_{t_0}^{t'}L_j\mathrm{d}\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sum_{n=1}^{s}L_j(\bar{q}(n),\ \dot{q}(n)).$$

其次,我们把分子按 $j(x)$ 的级数展开. $\exp \mathrm{i}\int_{t}^{t'}L_j\mathrm{d}\tau$ 项是 s 个下述因子的乘积

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon L_j(n)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon L(n)}[1+\mathrm{i}\varepsilon j_{\alpha}(t_n)\,\bar{q}_{\alpha}(n)+O(\varepsilon^2)].$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,我们保留 $O(s\varepsilon)$项而略去 $O(s\varepsilon^2)$项. 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L_j\mathrm{d}\tau}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t'}L\mathrm{d}\tau}j(1)\phi(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t_1}L\mathrm{d}\tau}\\&\quad+\mathrm{i}^2\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{t_2}^{t'}L\mathrm{d}\tau}j(2)\phi(2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}\tau}\\&\quad\cdot j(1)\phi(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t_1}L\mathrm{d}\tau}+\cdots\end{aligned}$$

这里

$$\int\mathrm{d}^4x_l\cdots j(l)\phi(l)\cdots=\sum_n\varepsilon\cdots\int j(\boldsymbol{r}_l,\ t_n)\phi(\boldsymbol{r}_l,\ t_n)\mathrm{d}^3r_l\cdots$$

其中 $l=1,\ 2,\ \cdots$. 右边的第三项可以被写作

$$\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,j(1)j(2)\phi(1)\phi(2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau},$$

其中在 $t_2>t_1$ 和 $t_1>t_2$ 的两个区都进行积分,这就是为什么要有 1/2!

这个因子.同样的考虑推广到展开式中的高级项,我们就能写下

$$e^{i\int_t^{t'}L_j d\tau} = e^{i\int_t^{t'}L d\tau} + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{i^N}{N!}\int\prod_{l=1}^{N}d^4x_l j(l)\phi(l)e^{i\int_t^{t'}L d\tau}. \tag{19.90}$$

将(19.90)代入(19.85),我们得到泛函 $W(j)$ 以 $j(x)$ 的幂为级数的开展式.第 0 级是 1 而第一级是 0 因为 $\langle \text{vac} \mid \phi(x) \mid \text{vac}\rangle = 0$. 第二级由下式

$$iS_2(j) \equiv \frac{i^2\langle \text{vac} \mid \frac{1}{2}\int d^4x d^4y j(x)\phi(x)j(y)\phi(y)[d\phi]e^{i\int_t^{t'}L d\tau} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid \int[d\phi]e^{i\int_t^{t'}L d\tau} \mid \text{vac}\rangle}$$

取极限 $t'\to\infty$ 和 $t\to-\infty$ 而得到.这里 S_2 是 $j(x)$ 的泛函,下标 2 表示它是一个二级项.由(19.84)式,我们得出

$$iS_2(j) = i^2\,\frac{1}{2}\int d^4x d^4y j(x)D_F(x-y)j(y) \tag{19.91}$$

这里 D_F 由(5.48)—(5.49)给出.用图示法,我们可以把 iS_2 表为

$$iS_2 = \circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ \tag{19.92}$$

这里的费恩曼规则是:每一个单独的顶点

$\underset{x}{\circ}$——— 给出一个 i 因子乘以 $j(x)$

每一条连接两点 x 和 y 的线

x ——— y 给出一个因子 $D_F(x-y)$

于是对所有的空时位置,例如 x 和 y,都要进行积分.还有,对于每一个图有一个总的因子=(对称数)$^{-1}$.例如,对于(19.92)中的图,对称数 * 是 2,这是由于它的两个端点有交换对称.可以直截了当的实现 $W(j)$ 的系统的展开.结果是

---

* 本书中,复场的传播子用一个带箭头的线表示,而厄米场的用一个不带箭头的线.任一图的对称数应当在给定动量之前确定.我们先用不同的字母标出图形所有的点和线(带箭头的或不带箭头的),然后考虑它们的排列.能够保持图和字母不变的排列数被定义为对称数.

$$W(j)=1+\text{o———o}+\begin{matrix}\text{o———o}\\ \text{o———o}\end{matrix}+\begin{matrix}\text{o———o}\\ \text{o———o}\\ \text{o———o}\end{matrix}+\cdots$$

$$=1+\mathrm{i}S_2+\frac{(\mathrm{i}S_2)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}S_2)^3}{3!}+\cdots \tag{19.93}$$

这里 2!, 3!, …是这些图的附加的对称数因子. 因此我们得到

$$W(j)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_2(j)}.$$

由(19.86),我们知道在这个简单的例子中 $S(j)=S_2(j)$. 很明显,$W(j)$ 包含了连接的和不连接的图,但 $S(j)$只包含连接图. 我们将证明,这个性质普遍有效.

3. *有相互作用的自旋为 0 的场* 在本节中我们将推广我们的分析到一个有相互作用的自旋为 0 的场的更加复杂的情况. 拉氏量由下式给出

$$L(\phi,\dot{\phi})=L_0(\phi,\dot{\phi})+L_{\text{int}}(\phi), \tag{19.94}$$

这里

$$L_0=-\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2+m^2\phi^2\right]\mathrm{d}^3r$$

和

$$L_{\text{int}}=\int\left[\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2-\frac{1}{3!}g_0\phi^3-\frac{1}{4!}f_0\phi^4\right]\mathrm{d}^3r \tag{19.95}$$

其中 δ_m^2, g_0 和 f_0 正好和 5.6 节中我们通过威克定理讨论费恩曼图时所用的符号是一样的. 因此,根据(5.77)—(5.79)哈密顿量是

$$H=H_0+H_{\text{int}},$$

这里

$$H_0=\frac{1}{2}\int[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]\mathrm{d}^3r$$

和

$$H_{\text{int}}=-L_{\text{int}}.$$

我们先定义全费恩曼传播子

$$D_F'(x-y)\equiv\lim_{\substack{t'\to\infty\\ t\to-\infty}}\frac{\langle\text{vac}\mid\int[\mathrm{d}\phi]\phi(x)\phi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}\mid\text{vac}\rangle}{\langle\text{vac}\mid\int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}L\mathrm{d}\tau}\mid\text{vac}\rangle} \tag{19.96}$$

其中|vac〉是 H_0 的基态,$[\mathrm{d}\phi]$和 $\int_t^{t'} L\,\mathrm{d}\tau$ 由(19.89)式定义,但现在的 L 由(19.94)式给出.其次,我们把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau}$ 按 L_{int} 的幂级数展开:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L_0\mathrm{d}\tau} + \mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}t'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{t''}^{t'} L_0\mathrm{d}\tau} L_{\mathrm{int}}(t'') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t''} L_0\mathrm{d}\tau} + \cdots.$$

注意 L_{int}不包含 ϕ. 把这一表式代入(19.96)并利用像在(19.73)和(19.73a)的证明中完全相同的论证,我们得到

$$\begin{aligned} D_F'(x-y) = {} & D_F(x-y) + \mathrm{i}\int D_F(x-z)\delta m^2 D_F(z-y)\mathrm{d}^4 z \\ & + (-\mathrm{i}g_0)^2 \int D_F(x-z)[D_F(z-z')]^2 \\ & \cdot D_F(z'-y)\mathrm{d}^4 z\mathrm{d}^4 z' + \cdots. \end{aligned}$$

用图表示,它可以被写作

$$D_F'(x-y) = \underset{x\qquad y}{\text{———}} + \underset{x\quad z\quad y}{\text{—o—}} + \underset{x\qquad z\qquad\qquad z'\qquad y}{\text{——o( )o——}} + \cdots, \tag{19.97}$$

在这里费恩曼规则和第 5 章中给出的一样:

一条连接两点 x 和 y 的线

x ——— y 给出一个因子 $D_F(x-y)$,

一个两线一点式的顶点

—o— 给出一个因子 $\mathrm{i}\delta m^2$

一个 3 线一点式的顶点 (19.98)

⊥ 给出一个因子 $-\mathrm{i}g_0$

一个 4 线一点式的顶点

× 给出一个因子 $-\mathrm{i}f_0$

方程式(19.96)能够推广到一个 N 点的函数上去

$$D_N(1,\ 2,\ \cdots,\ N) \equiv \lim_{\substack{t'\to\infty \\ t\to-\infty}} \frac{\langle \text{vac} \mid \int [\mathrm{d}\phi] \prod_1^N \phi(a) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid \int [\mathrm{d}\phi] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau} \mid \text{vac}\rangle} \tag{19.99}$$

其中 1, 2, …, N 表示空时位置 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$. 例如,对于 $N=4$, D_4 由下面的和式给出

1—2, 3—4 + 1—3, 2—4 + 1—4, 2—3 + (1, 2, 3, 4 connected) + ⋯

(19.100)

尽管 $D_2(1,\ 2) = D_F'(x-y)$ 和 $D_3(1,\ 2,\ 3)$ 只包含连接图,但 $D_{N\geqslant 4}$ 还包含有不连接图. 为了把连接图从其余部分分离出来,我们要像在(19.84)中的做法那样,引进

$$L_j(\phi,\ \dot{\phi}) \equiv L(\phi,\ \dot{\phi}) + \int j\phi \mathrm{d}^3 r, \tag{19.101}$$

这里 L 由(19.94)给出. 像以前一样,$j(x)$是空时的任意 c 数函数. 定义 $W(j)$和 $S(j)$如(19.85)

$$W(j) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(j)} \equiv \frac{\langle \text{vac} \mid \int [\mathrm{d}\phi] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L_j \mathrm{d}\tau} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid \int [\mathrm{d}\phi] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau} \mid \text{vac}\rangle}, \tag{19.102}$$

但其中的 L_j 由(19.101)给出而 L 由(19.94)给出. 利用(19.90)和

$$\langle \text{vac} \mid \phi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} L\mathrm{d}\tau} \mid \text{vac}\rangle = 0,$$

我们得到

$$W(j) = 1 + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^N}{N!} \int D_N(1,\ 2,\ \cdots,\ N) \prod_{a=1}^{N} j(a) \mathrm{d}^4 x_a \tag{19.103}$$

这里 D_N 由(19.99)给出. 让我们把泛函 $S(j)$写成 j 的幂级数:

$$\mathrm{i}S(j) = \mathrm{i}\sum_{N=2}^{\infty} S_N(j) \equiv \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^N}{N!} \int C_N(1,\ 2,\ \cdots,\ N) \cdot \prod_{a=1}^{N} j(a) \mathrm{d}^4 x_a \tag{19.104}$$

其中 C_N 是展开式的系数,可以直接证明

$$D_2(1,2)=C_2(1,2)=\text{费恩曼传播子 } D_F(x_1-x_2)$$

和

$$\mathrm{i}S_2(j)=\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\int j(1)D_F(x_1-x_2)j(2)\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2;$$

$$D_3(1,2,3)=C_3(1,2,3)=\text{所有连接的三线一点图之和}$$

以及

$$\mathrm{i}S_3(j)=\frac{\mathrm{i}^3}{3!}\int C_3(1,2,3)\prod_1^3 j(a)\mathrm{d}^4x_a;$$

$$\begin{aligned}D_4(1,2,3,4)=&C_2(1,2)C_2(3,4)\\&+C_2(1,3)C_2(2,4)+C_2(1,4)C_2(2,3)\\&+C_4(1,2,3,4)\end{aligned}\tag{19.105}$$

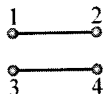
这导致*

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}^4}{4!}\int D_4(1,\cdots,4)\prod_1^4 j(a)\mathrm{d}^4x_a\\&=\frac{1}{8}\left[\mathrm{i}^2\int C_2(1,2)j(1)j(2)\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\right]^2\\&\quad+\frac{\mathrm{i}^4}{4!}\int C_4(1,\cdots,4)\prod_1^4 j(a)\mathrm{d}^4x_a\\&=\frac{1}{2!}(\mathrm{i}S_2)^2+\mathrm{i}S_4.\end{aligned}$$

比较(19.100)和(19.105),我们看出 $C_4(1,2,3,4)$是所有连接的 4 线一点图之和.

---

* 下式中方括号外的系数 1/8 可以在不连接图对称数的基础上来了解



我们注意到 1 和 2, 3 和 4,以及对(1, 2)和(3, 4)之间的排列给出了总对称数因子 $2^3=8$.

练习. 证明由(19.104)所定义的 $C_N(1, 2, \cdots, N)$是所有连接的 N 线一点图之和.

19.5 费米子

为了把费米子也包括在路径积分的描述中,必须引入一种表示,其中费米子的希尔伯特空间被表为一个格拉斯曼代数*的生成元 z_1, z_2, $\cdots$ 的多项式.

1. **格拉斯曼代数** 一个格拉斯曼代数 G_n 的生成元 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 满足对易关系

$$\{z_i, z_j\} \equiv z_i z_j + z_j z_i = 0. \tag{19.106}$$

因此

$$z_1^2 = z_2^2 = \cdots = z_n^2 = 0,$$

并且 z_i 的任意函数 ϕ 必须是如下形式的简单的多项式

$$\begin{aligned}\phi(z) = \phi_0 &+ \sum_i \phi_1(i) z_i + \sum_{i<j} \phi_2(i, j) z_i z_j \\ &+ \sum_{i<j<k} \phi_3(i, j, k) z_i z_j z_k + \cdots \\ &+ \phi_n(1, 2, \cdots, n) z_1 z_2 \cdots z_n \end{aligned} \tag{19.107}$$

这里 ϕ_a 是通常的 c 数. 我们可以选择所有的 $\phi_a(i_1, i_2, \cdots, i_a)$是 i_1, i_2, $\cdots$, i_a 的完全的反对称函数;即 ϕ_a 在任一对它的宗量之间的重新排列下改变符号. 方程式(19.107)也可以被写成

$$\begin{aligned}\phi(z) = \phi_0 &+ \sum_i \phi_1(i) z_i + \frac{1}{2!} \sum_{i, j} \phi_2(i, j) z_i z_j \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i, j, k} \phi_3(i, j, k) z_i z_j z_k + \cdots.\end{aligned}$$

---

* 参考 Berezin F A. The Method of Second Quantization. New York: Academic Press, 1966.

具有 n 个生成元的格拉斯曼代数 G_n 定义了一个线性空间，它的基矢是 2^n 个多项式

$$1,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ z_1z_2,\ z_1z_3,\ \cdots,\ z_{n-1}z_n,\ \cdots,\ z_1z_2\cdots z_n,$$

函数 $\phi(z)$是这个空间中的一个矢量.

导数算符$\partial/\partial z_a$ 和微分 dz_a 满足反对易关系

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_a},\ z_b\right\}=\frac{\partial z_b}{\partial z_a}=\delta_{ab}$$

和

$$\{dz_a,\ z_b\}=\{dz_a,\ dz_b\}=0. \tag{19.108}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial z_a}z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_m}=\delta_{ai_1}z_{i_2}\cdots z_{i_m}-z_{i_1}\delta_{ai_2}z_{i_3}\cdots z_{i_m}+\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}z_{i_1}\cdots z_{i_{m-1}}\delta_{ai_m}.$$

对于由(19.107)所给出的 $\phi(z)$，我们有

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial z_a}=\phi_1(a)+\sum_i\phi_2(a,\ i)z_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\phi_3(a,\ i,\ j)z_iz_j$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\phi_4(a,\ i,\ j,\ k)z_iz_jz_k+\cdots,$$

$$d\phi(z)=\sum_i\phi_1(i)dz_i+\sum_{i,j}\phi_2(i,\ j)z_idz_j$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j,k}\phi_3(i,\ j,\ k)z_iz_jdz_k+\cdots$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z_a}\frac{\partial\phi(z)}{\partial z_b}=-\frac{\partial}{\partial z_b}\frac{\partial\phi(z)}{\partial z_a}.$$

积分定则是*

* 这些实际上是“测度”. 如果愿意，我们可以把(19.109)看作定积分. 它们不是导数的逆.

$$\int \mathrm{d}z_a = 0 \tag{19.109}$$

和

$$\int z_a \mathrm{d}z_a = -\int \mathrm{d}z_a z_a = 1,$$

这里 a 可以是 1,或 2, ……,或 n. 对于(19.107)的 $\phi(z)$,我们有

$$\int \phi(z)\mathrm{d}z_a = \phi_1(a) + \sum_i \phi_2(i,\ a)z_i$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i,\ j}\phi_3(i,\ j,\ a)z_i z_j$$

$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i,\ j,\ k}\phi_4(i,\ j,\ k,\ a)z_i z_j z_k + \cdots,$$

$$\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_a}\mathrm{d}z_a = 0,$$

并且如果 $z_a' = z_a +$ 常数,且对于所有的 $i \neq a$ 时,$z_i' = z_i$,则

$$\int \phi(z')\mathrm{d}z_a = \int \phi(z)\mathrm{d}z_a.$$

重积分只不过是单积分的多次重复;例如,由(19.107)

$$\int \phi(z)\prod_i \mathrm{d}z_i = \phi_n(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

这里

$$\prod_i \mathrm{d}z_i \equiv \mathrm{d}z_n \mathrm{d}z_{n-1} \cdots \mathrm{d}z_1.$$

任意的 $\phi(z)$ 可以分解成 z_i 的偶和奇多项式之和:

$$\phi(z) = \phi_+(z) + \phi_-(z),$$

这里

$$\phi_\pm(-z) = \pm\phi_\pm(z).$$

利用积分定则(19.109),我们发现,对于任意的 $\phi(z)$ 和 $\phi'(z)$,分部积分定则是

$$\int \phi_\pm(z)\frac{\partial\phi'(z)}{\partial z_a}\mathrm{d}z_a = \mp\int \frac{\partial\phi_\pm(z)}{\partial z_a}\phi'(z)\mathrm{d}z_a, \tag{19.110}$$

这可以通过先考虑特殊情况$\phi(z)=z_{i_1}\cdot z_{i_2}\cdots z_{i_l}z_a$和$\phi'(z)=z_a z_{j_1}\cdots z_{j_m}$，随后再考虑一般的情况而得到证实.

$\phi(z)$的"傅里叶变换"由下式给出

$$f(k)=\int\exp\left(\sum_i k_i z_i\right)\phi(z)\prod_j \mathrm{d}z_j \tag{19.111}$$

这里k_i相互之间以及和z_i之间都成反对易，

$$\{k_i,\ k_j\}=\{k_i,\ z_j\}=\{z_i,\ z_j\}=0, \tag{19.112}$$

动指标i和j从1变到n,像以前一样.利用(19.109)，(19.111)，以及

$$\exp\left(\sum_i k_i z_i\right)=\prod_{i=1}^{n}(1+k_i z_i),$$

我们得出

$$k_a f(k)=\int\exp\left(\sum_i k_i z_i\right)\frac{\partial\phi(z)}{\partial z_a}\prod_j \mathrm{d}z_j. \tag{19.113}$$

让我们定义"δ-函数"为

$$\delta(z)\equiv\int\prod_j \mathrm{d}k_j\exp\left(\sum_i k_i z_i\right)=\prod_j(-z_j). \tag{19.114}$$

现在,我们将证明,对于任意的$\phi(z)$

$$\phi(z)=\int\delta(z-z')\widetilde{\prod_i}\mathrm{d}z'_i\phi(z'), \tag{19.115}$$

这里z'_i相互之间以及和z_i之间是反对易的,而在$\widetilde{\prod\limits_i}$中乘积的次序是$\prod\limits_i$中次序的颠倒;即,如果在(19.114)中

$$\prod_j \mathrm{d}k_j=\mathrm{d}k_n\mathrm{d}k_{n-1}\cdots\mathrm{d}k_1, \tag{19.116}$$

则

$$\delta(z)=\prod_j(-z_j)=(-1)^n z_n z_{n-1}\cdots z_1$$

与上次的次序相同,但在(19.115)中

$$\widetilde{\prod_i}\mathrm{d}z'_i=\mathrm{d}z'_1\mathrm{d}z'_2\cdots\mathrm{d}z'_n \tag{19.117}$$

次序被颠倒.

证明. 由积分定则(19.109)得出

$$\int(z_a'-z_a)\mathrm{d}z_a'\cdot\begin{cases}1\\z_a'\end{cases}=\begin{cases}1\\z_a\end{cases}. \tag{19.118}$$

假定

$$\phi(z)=z_{i_l}z_{i_{l-1}}\cdots z_{i_1}\quad 其中\ i_l>i_{l-1}\cdots>i_1.$$

让我们来考察(19.107)中一特定项.因为根据定义(19.114)和由(19.116)所给出的乘积次序

$$\delta(z-z')=(z_n'-z_n)(z_{n-1}'-z_{n-1})\cdots(z_1'-z_1), \tag{19.114a}$$

(19.115)的右边由下式给出

$$\int(z_n'-z_n)(z_{n-1}'-z_{n-1})\cdots(z_1'-z_1)\mathrm{d}z_1'\cdots\mathrm{d}z_n'z_{i_l}'\cdots z_{i_1}'.$$

我们先把$(z_1'-z_1)\mathrm{d}z_1'$移到这个乘积的末端然后积分出来.其次,将$(z_2'-z_2)\mathrm{d}z_2$移到末端并积分,如此等等.由于(19.118),结果是

$$z_{i_l}z_{i_{l-1}}\cdots z_{i_1}.$$

把同样的讨论应用于(19.107)中每一项,我们就建立了(19.115).

由这个结果,我们就能证明,如果$f(k)$是$\phi(z)$的傅里叶变换,则逆变换是

$$\phi(z)=\int\exp(\sum_j z_jk_j)f(k)\widetilde{\prod_i}\mathrm{d}k_i. \tag{19.119}$$

证明. 代(19.111)入(19.119),我们可以把右边重写为

$$\int\prod_{i'}\mathrm{d}z_{i'}'\widetilde{\prod_i}\mathrm{d}k_i\exp\Big[\sum_j k_j(z_j'-z_j)\Big]\phi(z').$$

因为$\widetilde{\prod_i}$保持了与$\prod_{i'}$相反的次序,根据(19.116)—(19.117)我们有

$$\begin{aligned}\prod_{i'}\mathrm{d}z_{i'}'\widetilde{\prod_i}\mathrm{d}k_i&=\mathrm{d}z_n'\cdots\mathrm{d}z_2'\mathrm{d}z_1'\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\cdots\mathrm{d}k_n\\&=(\mathrm{d}z_n'\mathrm{d}k_n)(\mathrm{d}z_{n-1}'\mathrm{d}k_{n-1})\cdots(\mathrm{d}z_1'\mathrm{d}k_1).\end{aligned}$$

利用

$$\int dk_i e^{k_i(z_i'-z_i)} = (z_i - z_i'), \tag{19.120}$$

和这一事实,即$(dz_i' dk_i)$与$(dz_i'(z_i - z_i'))$是对易的元素,我们发现(19.119)的右边是

$$\begin{aligned}
&\int \prod_{i'} dz_{i'}' \widetilde{\prod_i} dk_i \exp[\sum_j k_j(z_j' - z_j)]\phi(z') \\
&= \int dz_n'(z_n - z_n')dz_{n-1}'(z_{n-1} - z_{n-1}')\cdots \\
&\quad dz_1'(z_1 - z_1')\phi(z') \\
&= \int (z_n' - z_n)dz_n'(z_{n-1}' - z_{n-1})dz_{n-1}'\cdots \\
&\quad (z_1' - z_1)dz_1'\phi(z') \\
&= \int \prod_j (z_j' - z_j) \widetilde{\prod_i} dz_i'\phi(z') \\
&= \int \delta(z - z') \widetilde{\prod_i} dz_i'\phi(z') = \phi(z),
\end{aligned}$$

这就是(19.119)的左边.

练习 1. 任意反对称的 $n\times n$ 实矩阵

$$a = (a_{ij}) = -\tilde{a}$$

都能通过一个正交变换变为一个方块的对角形式.如果 $n =$ 偶 $= 2l$,我们有

$$\tilde{S}aS = \begin{pmatrix}
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & & 0 & 0 \\
-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots\cdots & & & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_l \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_l & 0
\end{pmatrix}$$

如果 n = 奇 $= 2l+1$, 则

$$\tilde{S}aS = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\tilde{S}S = 1$, 并且 a_{ij} 是 c 数. 证明积分

$$I \equiv \int \exp\left(\sum_{i,j} a_{ij} z_i z_j\right) \mathrm{d}z_n \cdots \mathrm{d}z_1$$

$$= \begin{cases} 2^{n/2}\lambda_1 \cdots \lambda_l = \det|2a|^{\frac{1}{2}} & \text{若 } n = 2l \\ 0 & \text{若 } n = 2l+1. \end{cases}$$

练习 2. 证明即使当 $a = -\tilde{a}$ 是复矩阵,上述积分 I 仍然等于 $\det|2a|^{1/2}$.

2. **量子力学** (i) 让我们考虑一个单费米子模式的情况. 哈密顿量是

$$H = \omega a^\dagger a$$

这里 ω 是一个常数,a 和 $a^\dagger$ 是标准的湮没和产生算符,它满足(3.42);即

$$\{a, a^\dagger\} = 1$$

和

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0.$$

H 的本征态是右矢量$|n\rangle$:

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle \tag{19.121}$$

其中 $n = 0$ 或 1.

用格拉斯曼代数 G_1 的生成元 z,我们能够构造"坐标"表示 *

---

* 如果愿意,我们可以交换 a 和 $a^\dagger$ 的地位,因而代替(19.122)的是 $a = \partial/\partial z$ 和 $a^\dagger = z$.

$$a = z,\ a^{\dagger} = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{19.122}$$

因此

$$H = \omega \frac{\partial}{\partial z} z = \omega - \omega z \frac{\partial}{\partial z}.$$

根据(19.121),在 z 表示中态$|n\rangle$是

$$\langle z \mid 0 \rangle = z \quad 和 \quad \langle z \mid 1 \rangle = 1. \tag{19.123}$$

同样,左矢$\langle n|$能够被写作

$$\langle 0 \mid z \rangle = -1 \quad 和 \quad \langle 1 \mid z \rangle = z, \tag{19.124}$$

因而通常的正交归一关系

$$\langle n' \mid n \rangle \equiv \int \langle n' \mid z \rangle \mathrm{d}z \langle z \mid n \rangle = \delta_{n'n} \tag{19.125}$$

和完全性定理

$$\sum_{n=0,\,1} \langle z' \mid n \rangle \langle n \mid z \rangle = -z' + z = \delta(z' - z) \tag{19.126}$$

成立.时间有关的薛定谔方程

$$H \mid t \rangle = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \mid t \rangle$$

的格林函数是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$.在 z 表示中,对于 $H = \omega a^{\dagger} a$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \mid z \rangle &= \sum_{n=0,\,1} \langle z' \mid n \rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn\omega} \langle n \mid z \rangle \\ &= -z' + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega} z. \end{aligned} \tag{19.127}$$

计算 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$的迹(trace)很有启发性.通过应用(19.123)、(19.124)和(19.127),我们发现

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}\langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \mid z \rangle &\equiv \sum_{n} \iint \langle n \mid z' \rangle \mathrm{d}z' \langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \mid z \rangle \mathrm{d}z \langle z \mid n \rangle \\ &= \iint [-\mathrm{d}z'(-z' + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega} z)\mathrm{d}z z \\ &\quad + z' \mathrm{d}z'(-z' + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega} z)\mathrm{d}z] \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega} \end{aligned}$$

它自然是熟知的答案. 另一个有用的练习是在(19.127)中令 $t=\varepsilon=$ 无穷小. 略去 $O(\varepsilon^2)$后,我们有

$$\langle z' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z\rangle = -z' + (1-i\varepsilon\omega)z$$

由于(19.120),它也可以被写作

$$\int d\kappa e^{\kappa(z'-z)}(1+i\varepsilon\omega\kappa z)$$

这里

$$\kappa^2 = \{\kappa, z\} = \{\kappa, z'\} = 0$$

和

$$-\int d\kappa\kappa = \int \kappa d\kappa = 1.$$

这样

$$\langle z' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z\rangle dz = \int d\kappa dz e^{\kappa(z'-z)}(1+i\varepsilon\omega\kappa z). \qquad (19.128)$$

这里积分只对 $d\kappa$ 进行. 这个公式在以后当我们讨论路径积分时将有用处.

练习. 利用对任意希尔伯特空间算子 O 都适用的下式

$$\langle z \mid O \mid z'\rangle \equiv \sum_{n,n'} \langle z \mid n\rangle\langle n \mid O \mid n'\rangle\langle n' \mid z'\rangle$$

证明

$$\langle z \mid z'\rangle = \delta(z-z'),$$

$$\langle z \mid a \mid z'\rangle = z\delta(z-z') = zz',$$

$$\langle z \mid a^\dagger \mid z'\rangle = \frac{\partial}{\partial z}\delta(z-z') = -1,$$

$$\langle z \mid a^\dagger a \mid z'\rangle = \frac{\partial}{\partial z} z\delta(z-z') = z' \qquad (19.129)$$

因而

$$\langle z \mid a^\dagger a \mid z'\rangle = \int \langle z \mid a^\dagger \mid z''\rangle dz'' \langle z'' \mid a \mid z'\rangle.$$

(ii) 向 N 个费米子模式的推广是直接的. 像在 3.5 节中一样,每一

种模式带有一个湮没算符 a_i 和它的厄米共轭 $a_i^\dagger$. 它们的反对易关系是

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

和

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0.$$

令占有数算符 $a_i^\dagger a_i$ 的本征值为 $n_i = 0$ 或 1. 希尔伯特空间由 2^N 个基矢所张成.

$$\begin{aligned} &| 0\rangle, a_1^\dagger | 0\rangle, \cdots, a_N^\dagger | 0\rangle, a_2^\dagger a_1^\dagger | 0\rangle, \cdots \\ &| n\rangle \equiv | n_1, n_2, \cdots, n_N\rangle = (a_N^\dagger)^{n_N}\cdots(a_2^\dagger)^{n_2}(a_1^\dagger)^{n_1} | 0\rangle \\ &\qquad \cdots, | 1, 1, \cdots, 1\rangle = a_N^\dagger\cdots a_2^\dagger a_1^\dagger | 0\rangle \end{aligned} \tag{19.130}$$

这里 n 表示系$\{n_i\}$,而$|0\rangle$对一切 i 都满足

$$a_i | 0\rangle = 0.$$

像在(19.122)中一样,a_i 和 $a_i^\dagger$ 的"坐标"表示可以用格拉斯曼代数 G_N 的生成元 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ 表示出来:

$$a_i = z_i \quad 和 \quad a_i^\dagger = \frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{19.131}$$

对于右矢(19.130),我们可以写出

$$\langle z | 0\rangle = z_1 z_2 \cdots z_N$$

和

$$\begin{aligned} \langle z | n\rangle &\equiv \langle z | n_1, n_2, \cdots n_N\rangle \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z_N}\right)^{n_N}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{n_1}\langle z | 0\rangle, \end{aligned} \tag{19.132}$$

这像在(19.123)式一样. 相应的左矢量$\langle n|$由下式给出

$$\langle n | z\rangle \equiv \langle n_1, n_2, \cdots n_N | z\rangle = \pm \prod_i z_i^{n_i} \tag{19.133}$$

这里±号的选择是要使

$$\int \langle n' | z\rangle \prod_i \mathrm{d}z_i \langle z | n\rangle = \delta_{nn'}. \tag{19.134}$$

例如,如果 $\prod_i \mathrm{d}z_i = \mathrm{d}z_N \cdots \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_1$,则

$$\langle 0 \mid z \rangle = (-1)^N,$$

由此类推.正如在(19.126)式中一样,这些基矢量也满足完全性定理

$$\sum_n \langle z' \mid n \rangle \langle n \mid z \rangle = \widetilde{\prod_i} \delta(z_i' - z_i) \qquad (19.135)$$

其中 $\widetilde{\prod_i}$ 是(19.134)中 $\prod_i$ 的转置,这可以通过在(19.134)式的左边乘以 $\langle z' | n' \rangle$ 并对 $n' = \{n_i'\}$ 求和而加以证实.一个任意的希尔伯特空间态矢

$$| \rangle = \sum C_n \mid n \rangle,$$

这里 $C_n = C_{n_1 n_2 \cdots n_N}$ 是发现 $| \rangle$ 在 $|n\rangle$ 中的概率振幅.它的 z 表示是多项式

$$\begin{aligned} \langle z \mid \rangle &= \sum_n C_n \langle z \mid n \rangle \\ &= C_{11\cdots 1} + C_{11\cdots 10} z_N + \cdots + C_{00\cdots 0} z_1 z_2 \cdots z_N . \end{aligned}$$

它的左矢的 z 表示是互补多项式

$$\langle \mid z \rangle = \sum_n C_n^* \langle n \mid z \rangle,$$

因此

$$\int \langle \mid z \rangle \prod_i \mathrm{d}z_i \langle z \mid \rangle = \sum_n \mid C_n \mid^2 .$$

作为一个例子,让我们考虑简单的哈密顿量

$$H = \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i .$$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ 的坐标表示由下式给出

$$\langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \mid z \rangle = \sum_n \langle z' \mid n \rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t \sum_i n_i \omega_i} \langle n \mid z \rangle .$$

当 $t = \varepsilon =$ 无穷小,利用(19.128)我们发现,在略去 $O(\varepsilon^2)$ 以后

$$\begin{aligned} &\langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid z \rangle \prod_i \mathrm{d}z_i \\ &= \int \prod_i \mathrm{d}\kappa_i \mathrm{d}z_i \mathrm{e}^{\kappa_i (z_i' - z_i)} \cdot \left(1 + \mathrm{i}\varepsilon \sum_j \omega_j \kappa_j z_j\right) \end{aligned} \qquad (19.136)$$

这里的积分号只对 $d\kappa_i$ 而设,并且 κ_i, z_j, z'_k 互相之间都是反对易的,这和在(19.120)式中一样.我们注意到右边的乘积

$$d\kappa_i dz_i e^{\kappa_i(z'_i - z_i)} \quad 和 \quad \kappa_j z_j$$

是互相对易的;因此 $\prod_i$ 中 i 的次序可以任意.这在应用时,比起左边来,有很大的方便.在左边,$\prod_i dz_i$ 必须保持像在(19.134)中那样的次序.当 $\varepsilon \to 0$ 时,根据(19.135),我们有

$$\langle z' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z\rangle \prod_i dz_i \to \widetilde{\prod_i} \delta(z'_i - z_i) \prod_i dz_i,$$

经过积分后它给出 1.

练习. 证明,当

$$H = \sum_{i,j} \omega_{ij} a_i^\dagger a_j = \sum_{i,j} \omega_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} z_j$$

和 ε 是无穷小时,在略去 $O(\varepsilon^2)$后

$$\langle z' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z\rangle \prod_i dz_i = \int \prod_i d\kappa_i dz_i e^{\kappa_i(z'_i - z_i)} \cdot \left(1 + i\varepsilon \sum_{j,\kappa} \omega_{j\kappa} \kappa_j z_\kappa\right) \tag{19.137}$$

这里像在(19.136)中一样,积分号只对 $d\kappa_i$ 进行,且常 c 数 $\omega_{ij} = \omega_{ji}^*$.右边 $\prod_i$ 中乘积的次序仍然可以是任意的.

3. **路径积分** 考虑一个量子化的自旋为 1/2 的狄拉克场 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$的例子,它在一个给定的外矢量势 V_μ 下运动.拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (D_\mu + m)\psi \tag{19.138}$$

这里

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - igV_\mu.$$

相应的哈密顿密度是

$$\mathscr{H} = \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_i D_i + m)\psi + gV_0 \psi^\dagger \psi. \tag{19.139}$$

展开式(3.32)给出

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\boldsymbol{p}, s} (a_{\boldsymbol{p}, s}(t) u_{\boldsymbol{p}, s} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}, s}(t) v_{\boldsymbol{p}, s} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}). \tag{19.140}$$

对每一对 $a_{\boldsymbol{p}, s}$和 $b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}, s}$，我们引进两个格拉斯曼代数的生成元 z_{2n} 和 z_{2n+1}，如下 *

$$a_{\boldsymbol{p}, s} = z_{2n}, \quad b^{\dagger}_{\boldsymbol{p}, s} = z_{2n+1}$$

和

$$a^{\dagger}_{\boldsymbol{p}, s} = \frac{\partial}{\partial z_{2n}}, \quad b_{\boldsymbol{p}, s} = \frac{\partial}{\partial z_{2n+1}}. \tag{19.141}$$

因此，(19.140)变为

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(\boldsymbol{r}) z_{\alpha}(t) \tag{19.142}$$

这里 $\phi_{\alpha}(\boldsymbol{r})$是适当的 c 数旋量函数，不是 $u_{\boldsymbol{p}, s} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}/\sqrt{\Omega}$便是

$$v_{\boldsymbol{p}, s} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}/\sqrt{\Omega},$$

它满足

$$\int \phi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{r}) \phi_{\beta}(\boldsymbol{r}) d^3 r = \delta_{\alpha\beta}. \tag{19.143}$$

在 z 表示中的哈密顿量是

$$H = \int \mathscr{H} d^3 r = \sum_{\alpha, \beta} H_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} z_{\beta} \tag{19.144}$$

其中

$$H_{\alpha\beta} = \int \phi^{\dagger}_{\alpha} [\gamma_4 (\gamma_i D_i + m) + g V_0] \phi_{\beta} d^3 r.$$

在 z 表示中，时间有关的薛定谔方程式

$$H \mid t\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle$$

---

* 对于“正电子”态，为了临时标记上的方便，我们已把 z_{2n+1} 和 $\partial/\partial z_{2n+1}$ 所任的角色对调. 因此在讨论这一类态时，表示(19.132)和(19.133)应当互相调换. 见 423 页的脚注.

的解满足

$$\langle z' \mid t' \rangle = \int \langle z' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid z \rangle \prod_\alpha dz_\alpha \langle z \mid t \rangle.$$

我们可以把 $t'-t$ 分成 s 个间隔，每格为 ε. 令 $z_\alpha(n)$ 是在 $t_n = t + (n-1)\varepsilon$ 时的 z_α 值，并用 $z(n)$ 代表集合 $\{z_\alpha(n)\}$. 当 $n=1$，我们有 $t_n = t$ 和 $z(1) = z$. 应用(19.137)于哈密顿量(19.144)，我们发现

$$\begin{aligned}&\langle z_\alpha(n+1) \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z_\alpha(n) \rangle \prod_\alpha dz_\alpha(n)\\ &= \int \prod_\alpha d\kappa_\alpha(n) dz_\alpha(n) e^{\kappa_\alpha(n)[z_\alpha(n+1)-z_\alpha(n)]}\\ &\quad \cdot [1 + i\varepsilon \sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}\kappa_\alpha(n) z_\beta(n)].\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\langle z' \mid e^{-itH} \mid z \rangle = \int &\langle z' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z(s) \rangle \prod_\alpha dz_\alpha(s)\\ &\cdot \langle z(s) \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z(s-1) \rangle \prod_\alpha dz_\alpha(s-1)\\ &\cdots \prod_\alpha dz_\alpha(2) \langle z(2) \mid e^{-i\varepsilon H} \mid z \rangle\end{aligned}$$

对于任一在时刻 t 为 $|\rangle$ 的态矢而言，我们得出在时刻 t' 的薛定谔方程式的解为

$$\begin{aligned}\langle z' \mid t' \rangle &= \langle z' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid \rangle\\ &= \int \langle z' \mid e^{-i(t'-t)H} \mid z \rangle \prod_\alpha dz_\alpha(z) \langle z \mid \rangle\\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} \prod_\alpha d\kappa_\alpha(n) dz_\alpha(n)\\ &\quad \cdot e^{i\varepsilon L(n)} \langle z(1) \mid \rangle,\end{aligned} \tag{19.145}$$

这里 $z_\alpha(n)$ 和 $\kappa_\alpha(n)$ 是 z_α 和 κ_α 在时刻 $t_n = t + (n-1)\varepsilon$ 的值.

$$L(n) \equiv -i \sum_\alpha \kappa_\alpha(n) \dot{z}_\alpha(n) + \sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}\kappa_\alpha(n) z_\beta(n), \tag{19.146}$$

$$\dot{z}_\alpha(n) \equiv \frac{z_\alpha(n+1) - z_\alpha(n)}{\varepsilon}$$

以及 $z_\alpha(s+1)=z'_\alpha$. 一个方便的办法是定义

$$\psi(n)\equiv\psi(\boldsymbol{r},\ t_n)\equiv\sum_\alpha\phi_\alpha(\boldsymbol{r})z_\alpha(n),$$

$$\dot{\psi}(n)\equiv\dot{\psi}(\boldsymbol{r},\ t_n)\equiv\frac{\psi(n+1)-\psi(n)}{\varepsilon}$$

$$=\sum_\alpha\phi_\alpha(\boldsymbol{r})\frac{z_\alpha(n+1)-z_\alpha(n)}{\varepsilon},\tag{19.147}$$

$$\psi^\dagger(n)\equiv\psi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t_n)\equiv\sum_\alpha\phi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})\kappa_\alpha(n),$$

$$\bar{\psi}(n)\equiv\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t_n)\equiv\psi^\dagger(n)\gamma_4=\sum\phi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})\gamma_4\kappa_\alpha(n).$$

[注意 $\psi(n)$, $\dot{\psi}(n)$, $\psi^\dagger(n)$和$\bar{\psi}(n)$都是格拉斯曼代数生成元 $z_\alpha(n)$和$\kappa_\alpha(n)$的多项式.]由于(19.144)和(19.147), (19.146)中给出的 $L(n)$能够被写作

$$L(n)=-\int d^3r\,\bar{\psi}(n)(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi(n)$$

$$=\int d^3r\psi^\dagger(n)[\mathrm{i}\,\dot{\psi}(n)-\gamma_4(\gamma_i D_i+m+g\gamma_4V_0)\psi(n)].\tag{19.148}$$

方程式(19.145)变为

$$\langle\psi'\mid e^{-\mathrm{i}(t'-t)H}\mid\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int\prod_{n=1}^{s}[d\,\bar{\psi}(n)d\psi(n)]e^{\mathrm{i}\varepsilon L(n)}\langle\psi(1)\mid\rangle\tag{19.149}$$

这里

$$[d\,\bar{\psi}(n)d\psi(n)]\equiv\prod_\alpha d\kappa_\alpha(n)dz_\alpha(n),\tag{19.150}$$

这代表一个基的变换,从基 $z_\alpha(n)$和 $\kappa_\alpha(n)$变到 $\psi(n)$和 $\psi^\dagger(n)$,它的末一组态为 $\psi'=\psi(s+1)$. 由于正交归一关系(19.143),我们可以写出

$$\prod_\alpha d\kappa_\alpha(n)dz_\alpha(n)=\prod_{\boldsymbol{r}}d\psi^\dagger(\boldsymbol{r},\ t_n)d\psi(\boldsymbol{r},\ t_n)$$

$$=\text{常数}\prod_{\boldsymbol{r}}d\,\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t_n)d\psi(\boldsymbol{r},\ t_n)$$

$$\equiv[d\,\bar{\psi}(n)d\psi(n)].$$

像在(19.15a)和(19.22a)中一样,(19.149)可以被写成一个紧凑的形式

$$e^{-i(t'-t)H} = \int [d\bar{\psi} d\psi] \cdot e^{i\int_t^{t'} L(\tau)d\tau}, \tag{19.149a}$$

这里

$$[d\bar{\psi} d\psi] = \lim_{\epsilon \to 0} \prod_n [d\bar{\psi}(n) d\psi(n)] \tag{19.150a}$$

和

$$\int_t^{t'} L(\tau) d\tau = \epsilon \sum_n L(n).$$

练习. 在(19.70)中令 $F(1) = \psi(1)$ 和 $G(2) = \bar{\psi}(2) = \psi^\dagger(2)\gamma_4$，而用$[d\bar{\psi}d\psi]$代替$[dq]$以及用$-\int d^3 r\, \bar{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi$ 代替 L，证明

$$\underbrace{\psi(1)\ \bar{\psi}(2)} = S_F(x_1 - x_2)$$

式中 S_F 由(5.60)给出.

19.6 QCD

现在我们要导出 QCD 中的费恩曼规则. 在时间轴 $(V_0 = 0)$ 规范中，坐标是 18.3 节中用过的笛卡儿坐标 $V_i = T^l V_i^l$ 和 ψ. 利用(19.22)和(19.149)式，我们能够容易地把格林函数 $e^{-i(t'-t)H}$ 表为路径积分的形式，这里 H 是(18.38)—(18.39)所给出的算符. 通过把 $t'-t$ 分成每格为ϵ的 s 个间隔，并令 $V_i^l(n) = V_i^l(\boldsymbol{r}, t_n)$，$\Pi_i^l(n) = \Pi_i^l(\boldsymbol{r}, t_n)$，其中 $t_n = t + (n-1)\epsilon$，我们发现对任一态矢$|\rangle$

$$\begin{aligned}
&\langle V, \psi \mid e^{-i(t'-t)H} \mid \rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{s} [d\Pi(n) dV(n)][d\bar{\psi}(n) d\psi(n)] \\
&\quad \cdot e^{i\epsilon \bar{L}(n)} \langle V(1), \psi(1) \mid \rangle,
\end{aligned} \tag{19.151}$$

这里

$$\begin{aligned}
\bar{L}(n) = \int [&\Pi_i^l(n)\, \dot{V}_i^l(n) + i\psi^\dagger(n)\, \dot{\psi}(n) \\
&- \mathscr{H}_{cl}(V_i(n), \Pi_i(n), \psi(n), \psi^\dagger(n))] d^3 r,
\end{aligned} \tag{19.152}$$

$$[\mathrm{d}\Pi(n)\mathrm{d}V(n)] = \prod_{\boldsymbol{r},\, i,\, l} \mathrm{d}\Pi_i^l(\boldsymbol{r},\, t_n)\mathrm{d}V_i^l(\boldsymbol{r},\, t_n),$$

$[\mathrm{d}\bar{\psi}(n)\mathrm{d}\psi(n)]$ 由(19.150)给出，$\mathscr{H}_{\mathrm{cl}}$是经典的哈密顿密度(18.29)，

$$\mathscr{H}_{\mathrm{cl}}(V_i,\, \psi,\, \psi^\dagger) = \frac{1}{2}(\Pi_i^l\Pi_i^l + B_i^lB_i^l) + \psi^\dagger\gamma_4(\gamma_iD_i + m)\psi, \tag{19.153}$$

$\dot{V}_i^l(n) = [V_i^l(n+1) - V_i^l(n)]/\varepsilon$，最后一个组态是$V_i'^l = V_i^l(s+1)$，还有$\psi(n)$，$\psi^\dagger(n)$，$\dot{\psi}(n)$都由(19.147)给出，其中$\psi(s+1) = \psi'$. 通过把积分变量$V_i^l(n)$，$\Pi_i^l(n)$，$\psi(n)$和$\psi^\dagger(n)$作为$V_i^l$，$\Pi_i^l$，$\psi$和$\psi^\dagger$在时刻$t_n = t + (n-1)\varepsilon$的值，我们发现(19.151)中的被积函数在“相空间”中给出了每一条路径的振幅. 正像在(19.22a)和(19.149a)中一样，上面的公式可以写成一个更为紧凑的形式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} = \int[\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}V][\mathrm{d}\,\bar{\psi}\mathrm{d}\psi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'}\bar{L}(\tau)\mathrm{d}\tau}, \tag{19.151a}$$

这里

$$\int_t^{t'}\bar{L}(\tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon\sum_n \bar{L}(n);$$

当然，它的精确涵义就是原来的方程(19.151).

在上述路径积分的形式中，约束(18.35)会自动得到保证，如果我们只把算符$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H}$应用于满足约束的初态，例如真空态的话. 在(19.4)节中讨论费恩曼图的导出过程中，这应当是在任何情况下都必须采取的一个步骤，就像(19.70)所提供的例证一样. 因此，对我们而言，不需要把约束分开来考虑.

1. **协变规范** 让我们在协变规范中用$\mathscr{A}_\mu$和ψ_{cov}表示规范和夸克场，并用

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cov}}(\mathscr{A}_\mu,\, \dot{\mathscr{A}}_\mu,\, \psi_c,\, \dot{\psi}_c,\, \psi_c^\dagger) = -\frac{1}{4}\mathscr{F}_{\mu\nu}^l\mathscr{F}_{\mu\nu}^l - \psi_{\mathrm{cov}}^\dagger\gamma_4(\gamma_\mu\mathscr{D}_\mu + m)\psi_{\mathrm{cov}} - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial\mathscr{A}_\mu^l}{\partial x_\mu}\right)^2 \tag{19.154}$$

来代替经典的拉格朗日密度(18.3). 这里α是一个常数

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}^l = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{A}_\nu^l - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathscr{A}_\mu^l + gf^{lmn}\mathscr{A}_\mu^m\mathscr{A}_\nu^n$$

和

$$\mathscr{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}gT^l \mathscr{A}^l_\mu,$$

像在(18.4)式中一样. 下标 cov 表示协变规范, g 是未重正化的耦合常数. 虽然通常的正则量子化的方法在用于协变规范拉氏量密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{cov}}$ 时会遇到某些形式上的困难*, 但可以证明下述定理, 把 $\mathscr{L}_{\mathrm{cov}}$ 和 $V_0 = 0$ 规范的哈密顿量 H 在路径积分的形式下联系起来.

定理 5. 除了一个总的常数归一化因子而外

$$\begin{aligned}\langle V', \psi' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)H} \mid \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} [\mathrm{d}\mathscr{A}_\mu(n)] \\ \cdot [\mathrm{d}\,\bar{\psi}_{\mathrm{cov}}(n)\mathrm{d}\psi_{\mathrm{cov}}(n)] g(n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon L_{\mathrm{cov}}(n)} \\ \cdot \langle \mathscr{A}_\mu(1), \psi_{\mathrm{cov}}(1) \mid \rangle,\end{aligned} \tag{19.155}$$

上式的左边与(19.151)相同, 其中 H 由(18.38)—(18.39)给出. 在右边

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{cov}} = \int \mathrm{d}^3 r \mathscr{L}_{\mathrm{cov}}(\mathscr{A}_\mu(n), \dot{\mathscr{A}}_\mu(n), \psi_{\mathrm{cov}}(n), \\ \dot{\psi}_{\mathrm{cov}}(n), \psi^\dagger_{\mathrm{cov}}(n)),\end{aligned} \tag{19.156}$$

其中拉氏量密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{cov}}$ 由(19.154)给出, $\mathscr{A}_\mu(n)$ 是 $\mathscr{A}_\mu(\boldsymbol{r}, t_n)$ 在时刻 $t_n = t + (n-1)\varepsilon$ 的值,

$$\dot{\mathscr{A}}_\mu(n) = \frac{\mathscr{A}_\mu(n+1) - \mathscr{A}_\mu(n)}{\varepsilon},$$

$$[\mathrm{d}\mathscr{A}_\mu(n)] = \prod_{\boldsymbol{r},\mu,l} \mathrm{d}\mathscr{A}^l_\mu(\boldsymbol{r}, t_n),$$

---

* 如果我们把正则量子化的规则用于 $\mathscr{L}_{\mathrm{cov}}$, 则会产生一些麻烦, 因为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cov}} = -\frac{1}{2\alpha}[(\dot{\mathscr{A}}^l_0)^2 + (\nabla_i A^l_i)^2] + \cdots;$$

所以 A^l_0 的共轭动量是 $p^l_0 = \partial L/\partial \dot{\mathscr{A}}^l_0$. 从而哈密顿密度

$$-\frac{1}{2}\alpha(p^l_0)^2 + \frac{1}{2\alpha}(\nabla_i \mathscr{A}^l_i)^2 + \cdots$$

没有下限, 因为若 $\alpha > 0$, 则 $-\frac{1}{2}\alpha(p^l_0)^2 < 0$, 若 $\alpha < 0$, 则 $\frac{1}{2\alpha}(\nabla_i \mathscr{A}^l_i)^2 < 0$. 通过引进负度规, 可以把协变规范的哈密顿密度变成正定的算符, 但这时它又有了幺正性的困难.

$$\mathscr{J}(n) \equiv \det \left| \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathscr{D}_\mu \right|_{t=t_n}. \tag{19.157}$$

以及 $\psi_{\rm cov}(n)$, $\dot{\psi}_{\rm cov}(n)$, $\psi^\dagger_{\rm cov}(n)$和$[{\rm d}\bar{\psi}_{\rm cov}(n){\rm d}\psi_{\rm cov}(n)]$由那些在(19.147)与(19.150)中相同的表式(但无下标)所给出. 当 $n = s+1$ 时,在(19.155)式右边 $\mathscr{A}^l_\mu(n)$和 $\psi_{\rm cov}(n)$的值与左边的 V'^l_μ和ψ'有如下关系

$$\mathscr{A}^l_i(s+1) = V'^l_i,\ \mathscr{A}^l_0(s+1) = 0 \tag{19.158}$$

和

$$\psi_{\rm cov}(s+1) = \psi'.$$

证明. 我们从 $V_0 = 0$ 规范开始,并在(19.151)的被积函数中引入因子

$$1 = \int \prod_{n=1}^{s} {\rm d}[\theta_a(n)] \cdot | \bar{\mathscr{J}} | \cdot \left\{ \exp \int \prod_{n=1}^{s} {\rm d}^3 r \frac{-{\rm i}\varepsilon}{2\alpha} \cdot \left[\nabla_i \mathscr{A}^l_i(\boldsymbol{r},\ t_n) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathscr{A}^l_0(\boldsymbol{r},\ t_{n+1}) - \mathscr{A}^l_0(\boldsymbol{r},\ t_n)) \right]^2 \right\} \tag{19.159}$$

这里 $\mathscr{A}^l_i(n) \equiv \mathscr{A}^l_i(\boldsymbol{r},\ t_n)$ 和 $\mathscr{A}^l_0(n) \equiv \mathscr{A}^l_0(\boldsymbol{r},\ t_n)$ 系由下面的厄米矩阵给出

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_i(n) &\equiv T^l \mathscr{A}^l_i(n) \\ &= u(n)^{-1} V_i(n) u(n) + \frac{\rm i}{g} u(n)^{-1} \nabla_i u(n) \end{aligned} \tag{19.160}$$

和

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_0(n) \equiv T^l \mathscr{A}^l_0(n) &= -\frac{\rm i}{g\varepsilon} \ln[u(n)^{-1} u(n+1)] \\ &= -\frac{\rm i}{g\varepsilon} u(n)^{-1}(u(n+1) - u(n)) \\ &\quad + \frac{\rm i}{2g\varepsilon}[u(n)^{-1}(u(n+1) - u(n))]^2 \\ &\quad + \cdots. \end{aligned} \tag{19.161}$$

在这些表式中,T^l 和 V_i 由(18.1)和(18.31)给出,

$$u(n) = u(\theta_a(n)) \tag{19.162}$$

是 $N\times N$ 幺正矩阵函数，它像在(18.52)中一样依赖于 M 个群参数 $\theta_a(n)=\theta_a(\boldsymbol{r},t_n)$，微分 $\mathrm{d}[\theta_a(n)]=\prod_{a,r}\mathrm{d}\theta_a(\boldsymbol{r},t_n)$. 除了一个数值因子外，雅可比行列式 $|\mathscr{J}|$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathscr{J}&=\det\langle\boldsymbol{r},t_n\mid\mathscr{J}\mid\boldsymbol{r}',t_{n'}\rangle\\&=\det\frac{\delta}{\delta\theta_a(n)}\left[\boldsymbol{\nabla}_i\mathscr{A}_i(n')+\frac{(\mathscr{A}_0(n'+1)-\mathscr{A}_0(n'))}{\varepsilon}\right].\end{aligned}\tag{19.163}$$

为了与(19.151)的末一组态相匹配，我们令

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}_i^l(s+1)=V_i^l(s+1)=V_i'^l;\text{即},\\&u(s+1)=1.\end{aligned}\tag{19.164}$$

又因为(19.159)的被积函数在 $\mathscr{A}_0^l(n)\to\mathscr{A}_0^l(n)+$常数的变换下不变，其中 $n=1,2,\cdots,s+1$ 等一切值，所以我们可以选择 $\mathscr{A}_0^l(s+1)=0$.

现在我们考察这一区域，在那里(19.159)中指数上的和式与 1 同数量级. 由于在和式中 $[\mathscr{A}_0(n+1)-\mathscr{A}_0(n)]^2$ 与 ε^{-1} 成正比，可以想见只有那些 $\mathscr{A}_0(n+1)-\mathscr{A}_0(n)$ 属于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 数量级的组态才能在对 $\theta_a(n)$ 的积分中作出贡献. 这样，由于 $\mathscr{A}_0(s+1)=0$，$\mathscr{A}_0(n)$ 的数量级应当是 $(s-n)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}=O(1)$，因而由(19.161)，$u(n+1)-u(n)$ 仅仅与 ε 同数量级.

如果在(19.151)式中计算 $\int\mathrm{d}[\Pi(n)]$，我们发现在一个数值因子的差别下

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}[\Pi(n)]\exp\mathrm{i}\varepsilon\sum_n\int\mathrm{d}^3r\cdot\Big\{\Pi_i^l(n)[V_i^l(n+1)\\&\quad-V_i^l(n)]\varepsilon^{-1}-\frac{1}{2}\Pi_i^l(n)\Pi_n^l(n)\Big\}\\&=\exp\mathrm{i}\frac{1}{2}\sum_n\int\mathrm{d}^3r[V_i^l(n+1)-V_i^l(n)]^2\varepsilon^{-1}\\&=\exp\mathrm{i}\sum_n\int\mathrm{d}^3r\,\mathrm{tr}[V_i(n+1)-V_i(n)]^2\varepsilon^{-1}\end{aligned}\tag{19.165}$$

其次我们能够用(19.160)以 $\mathscr{A}_i^l$ 和 u 来表示这个指数. 如果把(19.165)中最后一行方括弧中的量用矩阵 $[u(n)^{-1}u(n+1)]^{\frac{1}{2}}u(n+1)^{-1}$ 连接起来，就可以得到一个特别对称的形式：

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}\operatorname{tr}[V_i(n+1)-V_i(n)]^2\\
=&\varepsilon^{-1}\operatorname{tr}\Big\{[u(n)^{-1}u(n+1)]^{\frac{1}{2}}\mathscr{A}_i(n+1)\\
&\cdot[u(n)^{-1}u(n+1)]^{-\frac{1}{2}}\\
&+\frac{\mathrm{i}}{g}[u(n)^{-1}u(n+1)]^{\frac{1}{2}}\nabla_i[u(n)^{-1}u(n+1)]^{-\frac{1}{2}}\\
&-[u(n)^{-1}u(n+1)]^{-\frac{1}{2}}\mathscr{A}_i(n)[u(n)^{-1}u(n+1)]^{\frac{1}{2}}\\
&-\frac{\mathrm{i}}{g}[u(n)^{-1}u(n+1)]^{-\frac{1}{2}}\\
&\cdot\nabla_i[u(n)^{-1}u(n+1)]^{\frac{1}{2}}\Big\}^2
\end{aligned}
\tag{19.166}
$$

应用(19.161)以一个 $\mathscr{A}_0(n)$的函数代替 $u(n)^{-1}u(n+1)$

$$
u(n)^{-1}u(n+1)=1+\mathrm{i}g\varepsilon\,\mathscr{A}_0(n)+O(\varepsilon^2)
$$

我们可以把(19.166)的右边按 ε 的级展开：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}\operatorname{tr}[V_i(n+1)-V_i(n)]^2=&\varepsilon\operatorname{tr}\{[\mathscr{A}_i(n+1)\\
&-\mathscr{A}_i(n)]\varepsilon^{-1}+\mathrm{i}g[\mathscr{A}_0(n),\ \mathscr{A}_i(n)]\\
&+\nabla_i\mathscr{A}_0(n)\}^2+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}
$$

这里我们把 $\mathscr{A}_i(n+1)-\mathscr{A}_i(n)$ 当作 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$级.这样,如果我们把积分变量从 $V_i(n)$, $\psi(n)$和$\bar{\psi}(n)$变到幺正等价的集合 $\mathscr{A}_i(n)$,

$$
\psi_{\mathrm{cov}}(n)=u(n)^{-1}\psi(n)
$$

和

$$
\bar{\psi}_{\mathrm{cov}}(n)=\bar{\psi}(n)u(n),
$$

在(19.151)和(19.159)中的指数项联合起来给出协变规范作用量到 ε 的一次项：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\varepsilon\sum_n\int \mathrm{d}^3r\operatorname{tr}\Big\{&[(\mathscr{A}_i(n+1)-\mathscr{A}_i(n))\varepsilon^{-1}\\
&+\mathrm{i}g[\mathscr{A}_0(n),\ \mathscr{A}_i(n)]+\nabla_i\mathscr{A}_0(n)]^2-[B_i(n)]^2\\
&-\frac{1}{\alpha}[\nabla_i\mathscr{A}_i(n)+(\mathscr{A}_0(n+1)-\mathscr{A}_0(n))\varepsilon^{-1}]^2\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{i}\epsilon\sum_n\int\mathrm{d}^3r\left\{\bar{\psi}_{\mathrm{cov}}(n)\left[\frac{\gamma_4(\psi_{\mathrm{cov}}(n+1)-\psi_{\mathrm{cov}}(n))}{\mathrm{i}\epsilon}\right.\right.$$
$$+g\mathscr{A}_0(n)\gamma_4\psi_{\mathrm{cov}}(n+1)$$
$$\left.\left.+\gamma_i(\nabla_i-\mathrm{i}g\mathscr{A}_i(n))\psi_{\mathrm{cov}}(n)\right]\right\}.$$

最后我们必须用(19.161)来把积分变量 $\theta_a(n)$ 变到 $\mathscr{A}_0^m(n)$. 经过一定的处理后,能够证明,除了一个常数的相乘因子外,最后的雅可比行列式 $[\delta\theta_a(n)/\delta\mathscr{A}_0^m(n')]\cdot|\mathscr{J}|$ 就是协变规范的法捷耶夫-波波夫(Fadeev-Popov)行列式 $\mathscr{J}(n)$, (19.157). [详细情况可参阅 *Phys Rev*, 1980, **D22**:939.]这就完成了对定理 5 的证明.

正像在(19.56)—(19.56a)中一样,我们可以把乘积 $\prod_n\mathscr{J}(n)$ 指数化:

$$\prod_n\mathscr{J}(n)=\exp[\mathrm{trace}\ \ln\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}] \tag{19.167}$$

这里矩阵 $\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\langle l,x\,|\,\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}\,|\,l',x'\rangle&=\left\langle x\left|\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{D}_\mu^{ll'}\right|x'\right\rangle\\&=\left\langle x\left|\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\delta^{ll'}-gf^{ll'm}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{A}_\mu^m\right|x'\right\rangle\end{aligned} \tag{19.168}$$

和 $x_\mu=(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\tau)$, $x'_\mu=(\boldsymbol{r}',\mathrm{i}\tau')$. 让我们引进一个矩阵 G,它的矩阵元为

$$\langle l,x\,|\,G\,|\,l',x'\rangle\equiv g\left\langle x\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu}f^{ll'm}\mathscr{A}_\mu^m\right|x'\right\rangle$$
$$=\int\mathrm{d}^4x''\left\langle x\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}\right)^{-1}\right|x''\right\rangle\left\langle x''\left|\frac{\partial}{\partial x_\mu}f^{ll'm}\mathscr{A}_\mu^m\right|x'\right\rangle, \tag{19.169}$$

由于

$$\langle l,x\,|\,\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}\,|\,l',x'\rangle=\int\mathrm{d}^4x''\left\langle l,x\left|\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}\right|l'',x''\right\rangle\langle l'',x''\,|\,1-G\,|\,l',x'\rangle,$$

(19.167)变为

$$\prod_n \mathscr{J}(n) = \det \mathfrak{M}^{\frac{1}{2}} = \text{常数} \cdot \det(1-G)$$
$$= \text{常数} \cdot \exp[\text{trace } \ln(1-G)] \qquad (19.170)$$

这里,这个常数可以吸收到(19.155)中总的归一化因子中去.

像在(19.151a)中一样,我们可以将(19.155)重写成一个更加紧凑的形式.为了表现出洛伦兹不变性,方便的办法是取极限 $t'\to\infty$ 和 $t\to-\infty$.利用(19.170),我们知道,除了一个总的常数归一化因子外

$$\lim_{\substack{t'\to\infty \\ t\to-\infty}} e^{-i(t'-t)H} = \int [d\mathscr{A}][d\,\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] \cdot e^{i\int \mathscr{L}_{cov} d^4x + \text{trace } \ln(1-G)} \qquad (19.171)$$

这里 $\mathscr{L}_{cov}$ 和 G 由(19.154)和(19.169)给出

$$[d\mathscr{A}] = \prod_{x,\mu,l} d\mathscr{A}_\mu^l(x) \qquad (19.172)$$

和

$$[d\,\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] = \prod_x d\,\bar{\psi}_{cov}(x) d\psi_{cov}(x).$$

2. **协变规范的费恩曼定则** 为了导出费恩曼定则,我们将按照19.3节中讨论的方法进行.我们既可以用(19.99)通过考虑 N 点函数

$$D_N(1,2,\cdots,N) \equiv \frac{\langle \text{vac} \mid [d\mathscr{A}][d\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] \prod_{j=1}^{N} F(j) e^{iZ} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid [d\mathscr{A}][d\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] e^{iZ} \mid \text{vac}\rangle}, \qquad (19.173)$$

其中

$$iZ = \int i\mathscr{L}_{cov} d^4x + \text{trace } \ln(1-G)$$
$$= \int i\mathscr{L}_{cov} d^4x - \sum_1^\infty \frac{1}{n} \text{trace } G^n \qquad (19.174)$$

和 $F = \mathscr{A}_\mu^l$,或 ψ,或 $\bar{\psi}$,也可以通过引进(19.102)的办法

$$W(j) = e^{iS(j)}$$
$$\equiv \frac{\langle \text{vac} \mid [d\mathscr{A}][d\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] e^{iZ + i\int j_\mu \mathscr{A}_\mu d^4x} \mid \text{vac}\rangle}{\langle \text{vac} \mid [d\mathscr{A}][d\bar{\psi}_{cov} d\psi_{cov}] e^{iZ} \mid \text{vac}\rangle}. \qquad (19.175)$$

当然，两种办法导出相同的费恩曼规则.

在(19.174)中，每个 trace G^n 项给出一个圈图*，如图 19.2 所示；圈中有 n 个顶点，每个顶点由(19.169)中给出的 G 的表式的因子

$$\left\langle x \left| \frac{\partial}{\partial x_\mu} f^{ll'm} \mathscr{A}_\mu^m \right| x' \right\rangle \quad (19.176)$$

所产生. 由于 G 中的附加因子 $\langle x \mid (\partial^2/\partial x_\lambda^2)^{-1} \mid x' \rangle$，在顶点之间有传播子，它和一个自旋为 0 的场的传播子相同. 因为这些"自旋为 0"的量子只进入圈中，它们不是观测量；因而它们被称作"鬼粒子". 由(19.174)，我们知道**每一个鬼粒子圈带着一个额外的因子** -1，这使得鬼粒子的行为类似于费米子. $\left[(19.174)\right.$中的因子$\frac{1}{n}$是一个圈的归一对称数因子，它是由于圈的诸顶点的循环排列所引起的.$\left.\right]$因为导数的关系，表式(19.176)对于 x 和 x' 而言没有对称性. 相应地，鬼-胶子顶点对于两根胶子线不对称，如下所示. 这种不对称性可以这样来考虑，即在约定它的动量之前，给每条鬼粒子线加上一个箭头，并要求箭头的方向在圈中连续，就像在复场中的情况一样. 每一个这样的顶点可以被看作湮没了一个动量为 q 的鬼粒子并产生一个动量为 p 的鬼粒子；后者显式地进入下面给出的费恩曼规则之中. 因此，鬼粒子可以用一个虚的**复同位旋矢量场**表示. 以下我们以一个带箭头的直线代表费米子(夸克)的传播子，而用一根不带箭头的波浪线代表规范场(胶子)的传播子，并用一根带箭头的虚线代表鬼粒子的传播子；下标和上标分别是时空和色指数，p, q, r 表示 4 动量，其中 p 和 p^2 代表 $p+\mathrm{i}(0_+)$ 和 $p^2-\mathrm{i}(0_+)$.

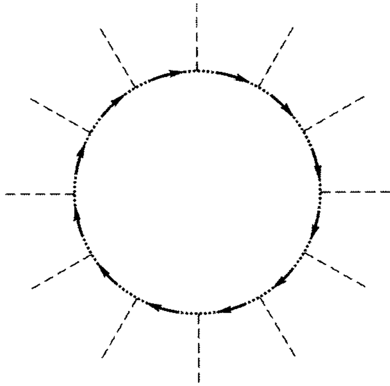


图 19.2 由于(19.174)中的 $-\frac{1}{n}$trace G^n 项引起的鬼粒子圈图

---

* Feynman R P. *Acta Physica Polonica*, 1963, **24**:697; Faddeev L D, Popov V N. *Phys Lett*, 1967, **25 B**:29.

夸克传播子

$$\xrightarrow{\quad p \quad} \quad 给出 \quad \frac{\mathrm{i}}{\not p - m}$$

胶子传播子

$$l,\lambda \; \sim\sim_{p}\sim\sim \; m,\mu \quad 给出 \quad \frac{-\mathrm{i}\delta^{lm}}{p^2}\left[\delta_{\lambda\mu} + (\alpha - 1)\frac{p_\lambda p_\mu}{p^2}\right]$$

鬼粒子传播子

$$l \; \text{- - -}\xrightarrow{p}\text{- - -} \; m \quad 给出 \quad \frac{-\mathrm{i}\delta^{lm}}{p^2}$$

夸克-胶子顶角

$$给出 \quad -g\gamma_\lambda T^l = -\frac{1}{2}g\gamma_\lambda\begin{cases}\tau^l SU_2\\ \lambda^l SU_3\end{cases}$$

胶子-胶子顶角($p+q+r=0$,其中箭头表示动量流的方向)

$$给出\ gf^{lmn}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}]$$

$$\begin{aligned} 给出 \quad & -\mathrm{i}g^2[f^{lmj}f^{nkj}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\kappa} - \delta_{\lambda\kappa}\delta_{\mu\nu}) \\ & + f^{lnj}f^{kmj}(\delta_{\lambda\kappa}\delta_{\nu\mu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\kappa}) \\ & + f^{lkj}f^{mnj}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\kappa\nu} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\kappa\mu})] \end{aligned}$$

胶子-鬼粒子顶角

$$给出 \quad gf^{lmn}p_\nu.$$

根据这些费恩曼规则,理论的洛伦兹不变性是很显然的.

3. **库仑规范** 对于库仑规范,我们应用定理 3,(19.49)—(19.51),于哈密顿量(18.97).我们将略去详细的过程而只给出最后的结果.像在 18.4 节中一样,让 A_μ 和 ψ_c 表示库仑规范中的规范和夸克场.经典的拉格朗日密度 $\mathscr{L}_c$ 是 A_i^l, $\dot{A}_i^l$, ψ_c, $\psi_c^\dagger$ 和 $\dot{\psi}_c$ 的函数:

$$\mathscr{L}_c = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l - \psi_c^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu \psi_c, \tag{19.177}$$

这里

$$F_{\mu\nu}^l = \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu^l - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu^l + gf^{lmn}A_\mu^m A_\nu^n,$$

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}gT^l A_\mu^l,$$

$$\nabla_i A_i^l = 0 \tag{19.178}$$

并且 A_0^l 由(18.78)和(18.92)给定.

库仑规范中的哈密顿量 H 由(18.97)给出,推广到 SU_N(现在 g 代表 g_0),

$$\begin{aligned} H = \int\Big\{ & \frac{1}{2}\mathscr{J}^{-1}(\Pi_i^{\mathrm{tr}})^l \mathscr{J}(\Pi_i^{\mathrm{tr}})^l + \frac{1}{2}\mathscr{B}_i^l\mathscr{B}_i^l \\ & + \psi_c^\dagger\gamma_4[\gamma_i D_i + m]\psi_c\Big\}\mathrm{d}^3 r + \frac{1}{2}g^2\int \mathscr{J}^{-1}\sigma^l(\boldsymbol{r}) \\ & \cdot \langle l, \boldsymbol{r} \mid (\nabla_i\mathscr{D}_i)^{-1}(-\nabla^2)(\nabla_j\mathscr{D}_j)^{-1} \mid l', \boldsymbol{r}'\rangle \\ & \cdot \mathscr{J}\sigma^{l'}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r', \end{aligned} \tag{19.179}$$

这里 $(\Pi_i^{\mathrm{tr}})^l$ 是 A_i^l 的共轭动量

$$\sigma^l = f^{lmn}A_i^m(\Pi_i^{\mathrm{tr}})^n + \psi_c^\dagger T^l \psi_c,$$

$$\mathscr{B}_i^l = \nabla_j A_k^l - \nabla_k A_j^l + gf^{lmn}A_j^m A_k^n,$$

其中 i, j, k 是循环的,$\nabla_i\mathscr{D}_i$ 是矩阵

$$\begin{aligned} & \langle l, \boldsymbol{r} \mid \nabla_i\mathscr{D}_i \mid l', \boldsymbol{r}'\rangle \\ & = (\delta^{ll'}\nabla^2 - gf^{ll'm}A_i^m(\boldsymbol{r})\nabla_i)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \end{aligned} \tag{19.180}$$

而

$$\mathscr{J} = \det\ \nabla_i \mathscr{D}_i(x).$$

像在(19.45)中那样,我们定义

$$\overline{H} \equiv \sqrt{\mathscr{J}} H \frac{1}{\sqrt{\mathscr{J}}}. \tag{19.181}$$

时间有关的薛定谔方程是

$$\overline{H} \mid t\rangle = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle. \tag{19.182}$$

在 A_i, ψ_c 和$\overline{\psi}_c$ 的表示下,若在时刻 t, $|t\rangle = |\rangle$, 则在晚一些的时刻 t',由于定理 3,(19.182)的解是

$$\begin{aligned} &\langle A_i^l,\ \psi_c,\ \overline{\psi}_c \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t'-t)\overline{H}} \mid\rangle \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{s} [\mathrm{d}A_\mu(n)][\mathrm{d}\ \overline{\psi}_c(n)\mathrm{d}\psi_c(n)] \\ &\quad\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon L_{\mathrm{eff}}(n)} \langle A_i^l(1),\ \psi_c(1),\ \overline{\psi}_c(1) \mid\rangle \end{aligned} \tag{19.183}$$

这里,除了一个与 n 无关的总的归一化因子外

$$[\mathrm{d}\ \overline{\psi}_c(n)\mathrm{d}\psi_c(n)] = \prod_{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\ \overline{\psi}_c(\boldsymbol{r},\ t_n)\mathrm{d}\psi_c(\boldsymbol{r},\ t_n)$$

和

$$[\mathrm{d}A_\mu(n)] = \prod_{\boldsymbol{r},\ l,\ \mu} \mathrm{d}A_\mu^l(\boldsymbol{r},\ t_n)$$

其中 μ 可以取 0, 1, 2 和 3;像以前一样, $t_n = t + (n-1)\epsilon$, 其中 $s\epsilon = t' - t$, 而 $A_i^l(s+1)$ 和 $\psi_c(s+1)$ 表示 A_i^l 和 ψ_c 的最末组态,出现在(19.183)的左边 [注意 $A_0(s+1)$ 在两边都不出现]. 像在(19.50)中一样

$$L_{\mathrm{eff}}(n) = \int \mathrm{d}^3 r \mathscr{L}_c(\overline{A}_i^l(n),\ \dot{A}_i^l(n),\ \psi_c(n),\ \psi_c^\dagger(n),\ \dot{\psi}_c(n))$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{\epsilon} \ln \mathscr{J}(n) - V_c(n) \tag{19.184}$$

这里 $\mathscr{J}$ 是雅可比行列式(19.180),而 $\mathscr{L}_c$ 是库仑规范的拉氏量密度(19.177),它的宗量是

$$\overline{A}_i^l(n) = \frac{A_i^l(\boldsymbol{r},\ t_{n+1}) + A_i^l(\boldsymbol{r},\ t_n)}{2},$$

$$\dot{A}_i^l(n) = \frac{A_i^l(\boldsymbol{r},\ t_{n+1}) - A_i^l(\boldsymbol{r},\ t_n)}{\varepsilon},$$

$$\psi_c(n) = \psi_c(\boldsymbol{r},\ t_n),\ \psi_c^\dagger(n) = \psi_c^\dagger(\boldsymbol{r},\ t_n)$$

和

$$\dot{\psi}_c(n) = \frac{\psi_c(n+1) - \psi_c(n)}{\varepsilon}.$$

附加的位势 V_c 是 *

$$\begin{aligned}
V_c(A_i^l) = {} & \frac{1}{8}g^2\int \mathrm{d}^3 r\langle l',\ \boldsymbol{r} \mid (\boldsymbol{\nabla}_i\mathscr{D}_i)^{-1}\ \boldsymbol{\nabla}_j \mid l,\ \boldsymbol{r}\rangle \\
& \cdot \langle m,\ \boldsymbol{r} \mid (\boldsymbol{\nabla}_k\mathscr{D}_k)^{-1}\ \boldsymbol{\nabla}_j t^{l'} t^l \mid m,\ \boldsymbol{r}\rangle \\
& \cdot \frac{1}{8}g^2\int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \langle l',\ \boldsymbol{r}' \mid \delta_{i'i} \\
& - \mathscr{D}_{i'}(\boldsymbol{\nabla}_k\mathscr{D}_k)^{-1}\ \boldsymbol{\nabla}_i \mid n,\ \boldsymbol{r}\rangle \\
& \cdot \langle l,\ \boldsymbol{r} \mid \delta_{ii'} - \mathscr{D}_i(\boldsymbol{\nabla}_{k'}\mathscr{D}_{k'})^{-1}\ \boldsymbol{\nabla}_{i'} \mid n',\ \boldsymbol{r}'\rangle \\
& \cdot \langle n,\ \boldsymbol{r} \mid t^l(\boldsymbol{\nabla}_j\mathscr{D}_j)^{-1}(-\boldsymbol{\nabla}^2) \\
& \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{j'}\mathscr{D}_{j'})^{-1} t^{l'} \mid n',\ \boldsymbol{r}'\rangle,
\end{aligned} \tag{19.185}$$

这里 $(t^l)_{mn} = -\mathrm{i}f^{lmn}$ 和生成算子 T^l 的伴随表示相似.

费恩曼规则可以按照 19.3 节中的讨论导出,并要考虑在库仑规范下相似于(19.173)和(19.175)的表式. 由于(19.184)中的 $\ln\mathscr{J}$ 项,在单圈图这一级就有法捷耶夫-波波夫鬼图. 由于 V_c 项,还有附加的双圈和更高的圈图.

说明. 对于没有导数耦合的相互作用而言,第 5 章中给出的费恩曼规则的戴森-威克推导可能是最简单的. 对于具有导数耦合的理论,例如 QCD,路径积分方法更加方便些. 这是因为,根据(19.82),时间导数的收缩是收缩的导数.

---

* Christ N H, Lee T D. (李政道) *Phys Rev*, 1980, **D22**:939. (19.185)中的第一项最初由薛温格得到. Schwinger J. *Rhys Rev*, 1962, **127**:324; ibid, 1963, **130**:406.

在规范理论中,文献上通常都是在选择规范之前就从一个形式上的路径积分表示出发.这种做法常常会遇到不能定义的包含∞/∞的表式,有时导致错误,例如丢失了附加的在(19.185)式中的相互作用项 V_c.我们的方法是从时间轴规范出发,它有一个明确的哈密顿量.于是,不同规范的费恩曼规则可以用一定的坐标变换来**导出**.为了证明每一步具有确切的定义,我们有意避免使用路径积分的紧凑形式;因而,例如在定理5的导出过程中,某些公式,显得臃肿.

习题 19.1.

(i) 写下在时间轴规范下的 QED 哈密顿量,随后按照18.4节的讨论转变到库仑规范.

(ii) 利用本章的方法导出在协变和库仑规范下 QED 的费恩曼规则.把结果与第6章的结果相比较.

习题 19.2. 在磁场

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$

中,质量为 μ 的一个非相对论带电粒子的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{a})^2 = -\frac{1}{2\mu}(\nabla - ie\boldsymbol{a})^2. \tag{19.186}$$

(i) 对于一个常数的且平行于 z 轴的 $\boldsymbol{B}$,我们可以选择

$$a_x = -\frac{1}{2}By,\ a_y = \frac{1}{2}Bx,$$

$$a_z = 0 \quad 和 \quad B = |\boldsymbol{B}|. \tag{19.187}$$

证明

$$\langle \boldsymbol{r} \mid e^{-iHt} \mid \boldsymbol{r}_0 \rangle = \left(\frac{\mu}{2i\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega t}{\sin \omega t} e^{iI}, \tag{19.188}$$

这里

$$I = \frac{\mu(z - z_0)^2}{2t} - \frac{eB}{2}(xy_0 - yx_0) + \frac{eB}{4}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\cot \omega t \tag{19.189}$$

和

$$\omega = \frac{eB}{2\mu}.$$

(ii) 证明

$$\text{trace } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \equiv \int \mathrm{d}^3 r \langle \boldsymbol{r} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \mid \boldsymbol{r} \rangle$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\mathrm{i}\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega t}{\sin \omega t} \Omega, \tag{19.190}$$

这里 $\Omega \to \infty$ 是系统的体积.

(iii) 如果不用(19.187),我们改变规范并选择

$$a_x = a_z = 0 \quad \text{和} \quad a_y = Bx,$$

证明

$$\langle \boldsymbol{r} \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \mid \boldsymbol{r}_0 \rangle = \left(\frac{\mu}{2\mathrm{i}\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega t}{\sin \omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}I'}, \tag{19.191}$$

这里

$$I' = I + \frac{1}{2} eB(xy - x_0 y_0),$$

并且 I 和 ω 仍由(19.189)给出. 这样, trace $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 是规范不变式.

习题 19.3. 在一个 4 位势为 a_λ 的外(c 数)电磁场中,质量为 m 电荷为 e 的带电标量场 ϕ 的拉氏量密度是

$$\mathscr{L} = -(\overline{D}_\lambda \phi^\dagger)(D_\lambda \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \tag{19.192}$$

这里

$$D_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \mathrm{i}ea_\lambda, \ \overline{D}_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \mathrm{i}ea_\lambda, \tag{19.193}$$

外电磁场 $f_{\lambda\nu}$ 与 a_λ 的关系是

$$f_{\lambda\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_\lambda.$$

根据(19.85)和(19.96),我们定义作用量 $S(a_\lambda)$ 和全费恩曼传播子 $D_F'(x, x')$ 为

$$e^{iS(a_\lambda)} \equiv \frac{\langle \text{vac} \mid \int [d\phi^\dagger d\phi] e^{i\int_{-T/2}^{T/2} L d\tau} \mid \text{vac} \rangle}{\langle \text{vac} \mid \int [d\phi^\dagger d\phi] e^{i\int_{-T/2}^{T/2} L_0 d\tau} \mid \text{vac} \rangle} \tag{19.194}$$

和

$$D'_F(x, x') \equiv \frac{\langle \text{vac} \mid \int [d\phi^\dagger d\phi] \phi(x) \phi^\dagger(x') e^{i\int_{-T/2}^{T/2} L d\tau} \mid \text{vac} \rangle}{\langle \text{vac} \mid \int [d\phi^\dagger d\phi] e^{i\int_{-T/2}^{T/2} L d\tau} \mid \text{vac} \rangle},$$

这里 $T \to \infty$

$$L = \int \mathscr{L} d^3 r \quad 和 \quad L_0 = \int \mathscr{L}_0 d^3 r,$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 由自由场的拉氏量密度给出

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_\lambda} - m^2 \phi^\dagger \phi,$$

x 和 x' 表示空时坐标

$$x_\lambda = (\boldsymbol{r}, it) \quad 和 \quad x'_\lambda = (\boldsymbol{r}', it').$$

在复场 ϕ 和 $\phi^\dagger$ 用它们的厄米分量 ϕ_1 和 ϕ_2 表示出来时

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad 和 \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

我们有

$$[d\phi^\dagger d\phi] = [d\phi_1] \cdot [d\phi_2],$$

其中每一因子 $[d\phi_i]$ 由(19.89)的上一式给出. S 和 D'_F 都是 $a_\lambda(x)$ 的泛函.

(i) 证明运动方程是

$$(D_\lambda D_\lambda - m^2)\phi = 0. \tag{19.195}$$

(ii) 通过展开 $D'_F(x, x')$ 为 a_λ 的幂级数,证明

$$D'_F(x, x') = \langle x \mid i[D_\lambda D_\lambda - (m - i\epsilon)^2]^{-1} \mid x' \rangle$$

$$= \left\langle x \left| \int_0^\infty dl\, e^{il[D_\lambda D_\lambda - (m - i\epsilon)^2]} \right| x' \right\rangle, \tag{19.196}$$

这里 $\epsilon = 0_+$.

(iii) 证明,利用费恩曼图,$S(a_\lambda)$能够被写成一个单圈图的和.

(iv) 通过对 m^2 的微分,证明 $S(a_\lambda)$满足

$$-\frac{\partial S}{\partial m^2} = \int d^4 x[D'_F(x,\ x) - D_F(x,\ x)], \tag{19.197}$$

这里 $D_F(x,\ x')$是(5.49)式给出的自由传播子. 这样,S 正比于

$$\int d^4 x = \Omega T,$$

这里 Ω 是系统的体积,而 T 是时限,二者都→∞.

(v) 有效的拉氏量密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$由下式定义

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} \equiv (\Omega T)^{-1} S.$$

证明

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\,\mathrm{i}(\Omega T)^{-1}\int_0^\infty \frac{dl}{l}\text{trace}\{\mathrm{e}^{il[D_\lambda D_\lambda - (m-\mathrm{i}\epsilon)^2]} - \mathrm{e}^{il[(\partial^2/\partial x_\lambda \partial x_\lambda) - (m-\mathrm{i}\epsilon)^2]}\}. \tag{19.198}$$

习题 19.4. 在上述问题中,假定外场 $f_{\lambda\nu}$是一个均匀磁场. 试导出

(i)
$$\text{trace } \mathrm{e}^{ilD_\lambda D_\lambda} = \frac{1}{(4\pi)^2 \mathrm{i}l}\frac{eB}{\sin eBl}\Omega T \tag{19.199}$$

和

(ii)
$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dl}{l^3}\left[-\frac{eBl}{\sin eBl} - 1\right]\mathrm{e}^{-il(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{19.200}$$

说明. 如果我们展开 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$作为 B 的幂级数,B^2 的系数是发散的;这和电磁场的重正化有关,应当减去,我们定义重正化的有效拉氏量密度,只要从(19.200)中去掉这一项. 结果就是

$$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dl}{l^3}\left[\frac{eBl}{\sin eBl} - 1 - \frac{1}{6}(eBl)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-il(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{19.201}$$

$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r$ 的实数性可以通过如下的方法最好地演示出来,即令 $l = -\mathrm{i}\xi$

并旋转积分路径从 $0\to\infty$ 变到 $0\to -\mathrm{i}\infty$. 这样

$$(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}})_r = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^3}\left[\frac{eB\xi}{\sinh eB\xi} - 1 + \frac{1}{6}(eB\xi)^2\right]\mathrm{e}^{-\xi m^2},$$

它是有限的并(当 $B\to 0$ 时)等于

$$\frac{7}{360m^4}\left(\frac{e^2B^2}{4\pi}\right)^2. \tag{19.202}$$

习题 19.5.　假定在问题 19.3 中,外场只是一个均匀的电场 $\boldsymbol{E}$ 与 z 轴平行. 选取规范

$$a_z = -Et$$

其中

$$E = |\boldsymbol{E}|, \tag{19.203}$$

其他的 a_λ 均为零. 因此

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t,\ D_x = \frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x,$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_y \quad \text{但 } D_z = \frac{\partial}{\partial z} + \mathrm{i}eEt. \tag{19.204}$$

证明

(i)
$$\langle x,\ y \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}l(\partial x^2+\partial y^2)} \mid x_0,\ y_0\rangle = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

这里

$$\theta = \frac{1}{4l}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \tag{19.205}$$

和

$$\langle z,\ t \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}l(Dz^2-\partial t^2)} \mid z_0,\ t_0\rangle = \frac{eE}{4\pi\sinh eEl}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \tag{19.206}$$

这里

$$\phi = \frac{eE}{2}\left\{\frac{1}{\sinh(2eEl)}[-(t^2+t_0^2)\cosh 2eEl + 2tt_0]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\coth eEl)[z - z_0 - (\tanh eEl)(t+t_0)]^2\right\}$$

和(ii)有效拉氏量密度(19.198)由下式给出

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{l^3}\left[\frac{eEl}{\sinh eEl} - 1\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(m-\mathrm{i}\epsilon)^2},$$

或者像在(19.201)中一样，重正化的密度为

$$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{l^3}\left[\frac{eEl}{\sinh eEl} - 1 + \frac{1}{6}(eEl)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}. \tag{19.207}$$

(iii) 证明迹 trace $\mathrm{e}^{\mathrm{i}lD_\lambda D_\lambda}$(因而 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$)在规范变换下不变.

(iv) 令 $l = -\mathrm{i}\xi$，并把积分围道转到路径 C:

复 ξ 平面



这里

$$d = \pi/eE. \tag{19.208}$$

方程式(19.207)变为

$$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^3}\left[\frac{eE\xi}{\sin eE\xi} - 1 - \frac{1}{6}(eE\xi)^2\right]\mathrm{e}^{-\xi m^2}. \tag{19.209}$$

证明，和前面均匀磁场的情况不同，$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r$ 现在有一个虚部，由下式给出

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = -\mathrm{i}\frac{(eE)^2}{16\pi^3}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi m^2}{eE}}, \tag{19.210}$$

并且对于 $eE \gg m^2$

$$\mathrm{Im}(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = \frac{(eE)^2}{192\pi}.$$

(v) 讨论 $\mathrm{Im}(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r$ 的物理意义.

习题 19.6. 在任意的均匀外电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的情况下

(i) 证明(19.198)给出 *

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{l^3}\left[\frac{\lambda_+ l}{\sinh \lambda_+ l}\,\frac{\lambda_- l}{\sinh \lambda_- 1} - 1\right]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(m-\mathrm{i}\epsilon)^2} \tag{19.211}$$

---

* Schwinger J. *Phys Rev*, 1951, **82**:664.

这里

$$\lambda_\pm = e[s \pm (s^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}},$$

$$s = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$$

和

$$p = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{19.212}$$

这样，λ_+ 是实数而 λ_- 是虚数；我们可以选取

$$\lambda_+ = |\lambda_+| \quad 和 \quad \lambda_- = \mathrm{i}\,|\lambda_-|. \tag{19.213}$$

证明

(ii) 重正化的有效拉氏量现在是

$$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^3}\Big[\frac{\lambda_+\xi}{\sin\lambda_+\xi}\,\frac{|\lambda_-|\,\xi}{\sinh|\lambda_-|\,\xi} - 1 + \frac{1}{6}g^2\xi^2(\lambda_+^2 + |\lambda_-|^2)\Big]\mathrm{e}^{-\xi m^2} \tag{19.214}$$

这里 C 是问题 19.5(iv)中同一条围道，但(19.208)改为

$$d = \pi/\lambda_+. \tag{19.215}$$

(iii) $(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r$ 的虚部是

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r = -\mathrm{i}\,\frac{1}{16\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{|\lambda_+\lambda_-|}{n\sinh\left|\dfrac{n\pi\lambda_-}{\lambda_+}\right|}\mathrm{e}^{-n\pi m^2/\lambda_+} \tag{19.216}$$

和(iv)在 $\boldsymbol{E} = 0$（因而 $\lambda_+ = 0$，以及 $\lambda_- = \mathrm{i}eB$），或 $\boldsymbol{B} = 0$（因而 $\lambda_- = 0$ 以及 $\lambda_+ = eE$）的特殊情况下，$(\mathscr{L}_{\text{eff}})_r$ 约化到问题 19.4 和 19.5 所给出的结果.

参考文献

Dirac P A M. *Revs Mod Phys*, 1945, **17**:195.

Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mcchanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill Book Co, 1965.

Berezin F A. The Method of Second Quantization. New York: Academic Press,

1966.

Faddeev L D. *Theoret Math Phys*, 1969, **1**: 3 [English translation by Consnl tants Bureau, 1969, **1**].

Abers E S, Lee B W. Gauge Theories, *Physics Reports*, 1973, **9 C**:1. 以及在此文中所列其他一些文献. 18 和 19 章中许多内容都以下一文献为基础.

Christ N H, Lee T D. *Phys Rev*, 1980, **D22**:939.

第 20 章　强子的夸克模型

假定量子色动力学是强相互作用的基础理论,我们应当在原则上只需要从 QCD 和给定数目的夸克味导出一切强子的结构. 目前的实际情况远非如此. 下面我们所要给出的描述本质上将是唯象的. 这样一种状况肯定不能令人满意,但在物理学的进化中,这已不是什么不寻常的事情. 在这方面,我们可以回顾一下经过很好地分析过了的量子电动力学的理论和广泛研究过的超导现象之间的关系,毫无疑问,应当可以从 QED 出发,加上电子和原子核的存在,第一步建立固体的晶格结构,由此得出电子声子相互作用,于是建立 B. C. S. 理论 * ,最后得出超导性. 但是,还没有一个人甚至在第一步上,即由 QED 证明晶格的存在,曾经成功地进行过纯理论上的推导. 因此,目前对于 QCD,我们的理论推导能力不够充分,那是不必过于惊讶的.

20.1　唯象的表述

我们从第 17 章的讨论出发,假定 QCD 真空是一个完全的洛伦兹不变的抗色电介质 ($\kappa_\infty = 0$). 如图 17.6 所示,当真空的色介电常量 $\kappa_\infty \to 0$,一切有色的粒子例如夸克和反夸克都被禁闭在一个域内,这就定义了一个强子;在它的内部 $\kappa = 1$ 和耦合 $= g^2$, 后者被看作是一个相对小的数. 在外面,耦合是 $g_\infty^2 = g^2/\kappa_\infty \to \infty$. $g_\infty \to \infty$ 的区对夸克和反夸克施加一种强的排斥作用. 正像在 17.4 节中提到过的 He—He 原子相互作用的例子一样,粒子自动地停留在离开强排斥的区. 在原子问题中标准的技术就是把它用一个边界条件来代替:原子间的距离 r 被限制在≥排斥势

---

* Bardeen J, Cooper L N, Schreiffer J R. *Phys Rev*, 1957, **108**:1175.

的半径 a 的范围. 当 $r=a$ 时,波幅为零. 在目前 QCD 的情况下,由于洛伦兹不变性,对强子而言相应的边界值问题需要相对论的孤立子(袋)解,这将在本章中进行讨论. 我们将看到当在这些孤立子解的周围展开 QCD 的相互作用时,只有在强子内部相对小的耦合 g 是有关的参数,因而在 17.2 节中所谓的超强耦合的困难获得了解决. 由于 QCD 是渐近自由的,强子内部的夸克行为近似地像自由粒子;而且,对于 u, d 和 s 夸克来说,它们的有效质量都相对地小.

以下,我们将讨论如何用 g^2(强子内部耦合常数的平方,而不是外部 g_∞^2)来获得这样一种幂级数的展开. 例如,对于强子质量 M 这种展开是

$$M = M_0 + g^2 M_1 + g^4 M_2 + \cdots. \tag{20.1}$$

由于(17.20),我们可以把色介电常量 κ 当作一个洛伦兹不变量. 方便的办法是引进一个唯象的自旋为 0 的场 σ,它是 κ 的一个函数,并令

$$\sigma(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \kappa = 1 \\ \sigma_{\text{vac}} & \text{当 } \kappa = \kappa_\infty = 0, \end{cases}$$

因此,在强子的内部我们有 $\kappa=1$, 因而 $\sigma=0$. 在外部 κ 是 κ_∞,因而 σ 是 σ_{vac}. 函数 $\sigma(\kappa)$的规定由下面(20.3)式给出.

假定唯象的拉氏量密度为(没有表出抵消项 *)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\kappa V_{\mu\nu}^l V_{\mu\nu}^l - \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + f\sigma + m)\psi$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu}\right)^2 - U(\sigma), \tag{20.2}$$

这里 ψ 是夸克场如(18.3),$V_{\mu\nu}^l$ 和 D_μ 由(18.4)给出,其中规范群是色 SU_3, g 是强子**内部**的重正化耦合,$U(\sigma)$是一个唯象的位函数,f 是一个新的耦合常数. 而 m 是强子内部夸克的质量矩阵.

对这个似乎有点复杂的拉氏量密度需要某些说明.

1. **色介电常量 κ** 用(18.3)的符号,纯粹的规范场拉氏量密度是

* 对于矢量场和夸克场圈图的重正化,抵消项是需要的,但对于唯象的 σ 场并不需要.

$-\frac{1}{4}V^l_{\mu\nu}V^l_{\mu\nu}$. 我们首先讨论当 κ 是一个常量时的情况.

(i) $\kappa =$ 常量

在这一情况下,我们可以考虑标度变换

$$V^l_\mu \to \sqrt{\kappa}V^l_\mu$$

和

$$g \to g/\sqrt{\kappa}.$$

由(18.4),得出

$$V^l_{\mu\nu} \to \sqrt{\kappa}V^l_{\mu\nu}$$

和

$$-\frac{1}{4}V^l_{\mu\nu}V^l_{\mu\nu} \to -\frac{1}{4}\kappa V^l_{\mu\nu}V^l_{\mu\nu}.$$

这样一种变化只不过是使 g 和 V^l_μ 重新定义;因此它没有可观测的结果.

(ii) $\kappa = \kappa(x)$

如果 κ 能够变化,则在不同的时空点上 κ 的相对值会产生物理效应. 就像在 17.2 节中所阐明的,$\kappa_\infty < 1$ 的结论与约定(17.6)有关. 用(18.5)所给出的电场和磁场 E^l_i 和 B^l_i,也可以把拉氏量密度 $-\frac{1}{4}\kappa F^l_{\mu\nu}F^l_{\mu\nu}$ 写作

$$\frac{1}{2}\kappa(E^l_iE^l_i - B^l_iB^l_i) = \frac{1}{2}(D^l_iE^l_i - B^l_iH^l_i),$$

这里

$$D^l_i = \kappa E^l_i \quad 和 \quad B^l_i = \mu H^l_i,$$

其中 μ 是色磁化率. 这导致关系式

$$\kappa\mu = 1,$$

(17.20)式已给出这结果.

当 $\kappa = \kappa(x)$ 时,必定还有一个由它的梯度 $\nabla_i\kappa$ 所产生的正的能量密度. 由于协变性,最简单的形式是

$$\frac{1}{2}F(\kappa)\left(\frac{\partial\kappa}{\partial x_\mu}\right)^2,$$

这里 $F > 0$ 是 κ 的一个标量函数. 函数 $\sigma(\kappa)$ 由下式定义

$$\sigma(\kappa)=\int_1^\kappa\sqrt{F(\kappa')}\,\mathrm{d}\kappa'. \tag{20.3}$$

为方便计，上述积分的下限是这样选择的，即当 $\kappa=1$ 时 $\sigma=0$，这和本节前面所提到的约定相符. 由此导致(20.2)中的 $-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right)^2$ 项.

2. **能量密度函数 $U(\sigma)$** 按定义，在真空态中 $\sigma(x)$ 的期望值是 σ_{vac}. 为了保证这一点，我们引入唯象的势能密度函数 $U(\sigma)$，它的绝对极小值是在 $\sigma=\sigma_{\text{vac}}$. 我们可以令 $U(\sigma_{\text{vac}})=0$ 而不失任何普遍性. 另外，如图 20.1 所示，我们将假定 $U(\sigma)$ 在 $\sigma=0$ 处有一个局部极小

$$U(0)\equiv p=O(m_{\text{N}}^4)>0 \tag{20.4}$$

这里 $m_{\text{N}}=$ 核子质量.

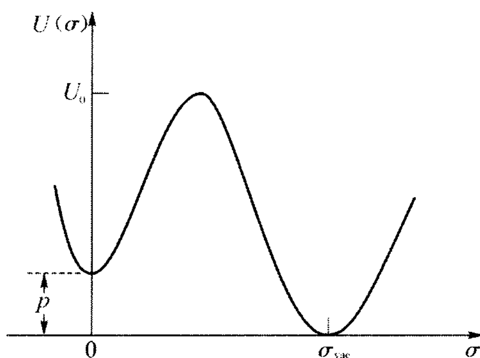


图 20.1 在唯象的拉格朗日密度(20.2)中能量密度函数 $U(\sigma)$

由于 σ 只是一个唯象的场，描述 QCD 的长程集体效应，它的短波分量实际上并不存在. 因此，我们可以近似地略去所有的 σ 圈图；即，把 σ 当作经典场.

3. **f 耦合** 在唯象的拉氏量密度(20.2)式中，有一个夸克-σ 直接耦合常数 f. 在第 17 章中已经阐明，仅就夸克禁闭问题的微观基础而言，有了 $-\frac{1}{2}\kappa V_{\mu\nu}^l V_{\mu\nu}^l$ 这一项，其中 $\kappa=\kappa(x)$，以及真空是一种完全抗色电体（即，在真空态中 $\kappa=\kappa_\infty=0$）就足够了. f 耦合的起源在于耦合常数的一分为二：在强子内部我们有相对小的夸克规范场耦合 g；在外部，耦合是 $g_\infty=g/\kappa_\infty^{1/2}$，它 $\to\infty$（当 $\kappa_\infty\to 0$）. 一方面，由于外部区的排斥性，超强耦

合 g_∞ 具有所希望的阻止夸克向强子外部运动的效应. 另一方面,它也使通常的幂级数展开产生了技术上的困难,为了克服这一障碍,我们将设计一个新的展开机制,它只包含 g^2 的幂,而没有 g^2/κ_∞ 的幂. 这一目的的完成可以通过在(20.2)中引入夸克-σ 的直接耦合 f 并假定

$$f\sigma_{\text{vac}} \to \infty. \tag{20.5}$$

当夸克在强子内部时,由于 $\sigma = 0$, 它的质量是 m,假定这是有限且相对小的;但在外部,它的质量变为 $(f\sigma_{\text{vac}} + m) \to \infty$. 这样,夸克就不会跑到外部去. 唯象地说,$f$ 耦合加上(20.5)对禁闭夸克给出了另外一种方便的形式,而这是相对论协变的. 因为 f 耦合限制夸克使它总是停留在强子内部,这就使我们能够充分利用在内部区夸克—V_μ^l 耦合 g 相对小这一特点. 通过 f 耦合的引入,我们能够把任何物理的观测量,譬如说强子质量 M,展开成(20.1)形式的级数. 因为夸克已经通过 f 耦合被禁闭,在展开式中参数 g^2 自动地就是强子内部的耦合,而不是 g^2/κ_∞.

[因此,这里的 f 耦合与在 He—He 问题中的硬球势起相同的作用. 后者在 17.4 节和在本节前面已有讨论.]

20.2　强子作为孤立子(袋)

有了夸克-σ 直接耦合 f,现在,我们可以在零级计算中略去矢量场的交换. 强子的描述被约化到一个简单的孤立子模型,它仅由标量的 σ 场和夸克场 ψ 所组成. 详细的情况将在 20.4 节中给出. 于是利用孤立子解,我们就能按照级数展开式(20.1),求出由于矢量介子的交换所产生的辐射修正的值.

在进入任何详细的数学分析之前,我们需要表明有可能利用某些简单的但是一般的论证来了解物理强子大部分的图像. 让我们首先考虑由轻夸克 u, d 和 s 所组成的强子,为了简单起见,我们将把它们在强子内部的质量近似地当作零 *

---

* 夸克质量不为零的效应将在 20.6.2 节讨论. 又见 20.4 节末练习 1 和 2.

$$m_s \cong m_d \cong m_u \cong 0. \tag{20.6}$$

由于 σ 在强子内部是 $\cong 0$，而在外部 $\cong \sigma_{vac}$，从图 20.1 我们知道有一个体积能量

$$\frac{4\pi}{3}R^3 p, \tag{20.7}$$

这里 R 是强子半径，p 由(20.4)式定义. 如果我们假定函数 $U(\sigma)$在 $\sigma = 0$ 和 σ_{vac}的附近是陡峭的，即，图 20.1 中局部极大 U_0 是 $\gg m_N^3 \cong (1\,\text{GeV})^3$，则为了使总能量变为最小，在强子表面附近从 $\sigma = 0$ 到 $\sigma = \sigma_{vac}$ 的过渡必须是很快的. 这产生了一个表面能

$$4\pi R^2 s, \tag{20.8}$$

这里 s 是一个常数，它的精确值有赖于 $U(\sigma)$的形状.

在强子内部，有夸克的动能. 量纲的考虑告诉我们，在零夸克质量近似(20.6)的情况下，它是与 R^{-1} 成比例的. 令 N 是强子内部夸克和反夸克的数目. 动能项可以写作

$$N\frac{\xi}{R}, \tag{20.9}$$

这里 ξ 是一个常数. 对于低位的强子态，

$$N = \begin{cases} 2 \text{ 对介子,} \\ 3 \text{ 对重子.} \end{cases} \tag{20.10}$$

如果我们略去矢量介子的交换，即，在(20.1)中令 $g^2 = 0$，则联合(20.7)—(20.9)，我们知道零级强子质量 M 由下式给出

$$M = M_0 = N\frac{\xi}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s, \tag{20.11}$$

它有赖于三个常数

$$\xi,\ p \text{ 和 } s.$$

因此，强子像一个沉没在介质 * (即真空)中的气泡. 在这个相似的

---

* 概念上，这仅仅是把狄拉克关于轻子的观点用于强子. 见 Dirac P A M. *Proc Roy Soc*, 1962, **268A**:57.

问题中，由于介质施加一个“压强”于气泡上，就有一个体积能量 $\frac{4\pi}{3}R^3 p$. 另外我们还有一个“表面张力”s 它记入了表面能 $4\pi R^2 s$，和气泡内部气体的“热动能”$N\xi/R$. 半径 R 由总能量的极小化来决定. 由 $-\frac{dM}{dR}=0$，我们发现

$$4\pi R^3(2s+Rp)=N\xi. \tag{20.12}$$

气泡由于气体的热动能而保持不垮，并且由于表面张力 s 和压强 p 而不再扩张. 在文献上，这样一个类似于气泡的东西有时被称作“袋”. [见下面(20.14)式关于不同的袋模型的 ξ 值.]

在零级，我们略去矢量介子的交换；因此，在(20.9)式中，袋内的能量仅由动能 $N\xi/R$ 组成，它和夸克自旋的取向无关. 因此，强子质量也如此. 像我们在下一节中要讨论的，这导致近似的 SU_6 对称.

对于低位强子态，每一个夸克都处在相同的相对论 $s_{1/2}$ 轨道上，它的角动量 z 分量 j_z 可以是 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$，以下将用 ↑ 或 ↓ 表示. $s_{1/2}$ 波函数的详细情况显然有赖于拉格朗日密度(20.2)中的位势 $U(\sigma)$，将要在后面给出.

至此，除了由图 20.1 给出了一般的形式之外，函数 $U(\sigma)$ 还有很多的任意性. 如已经提到过的，我们将假定 $U(\sigma)$ 是 σ 的一个陡峭的函数；即，它的曲率 $d^2U/d\sigma^2$ 用(核子质量 m_N)^2 做单位在 $\sigma=0$ 和 σ_{vac} 的点上必须是很大的. 还有，局部最大值 U_0(在 0 和 σ_{vac} 之间)是 $\gg m_N^4$. 在 20.4 节中我们将证明，对于低位的重子和介子态，在强子内部的夸克波函数，总可以约化到下面一组二维联立微分方程式的解上去

$$\frac{d\hat{u}}{d\rho}=(-1+\hat{u}^2-\hat{v}^2)\,\hat{v}$$

和

$$\frac{d\hat{v}}{d\rho}+\frac{2\hat{v}}{\rho}=(1+\hat{u}^2-\hat{v}^2)\,\hat{u} \tag{20.13}$$

它不包含自由参数. 这一组非线性方程式的解由一个独一的参数 n 所表征，它可以从 0 变到∞. 在 $n\to 0$ 的极限下，解变为 MIT 袋 *，而当 $n\to\infty$

* Chodos A, Jaffe R J, Johnson K, Thorn C B, Weisskopf V F. *Phys Rev*, 1974, **D9**:3471.

时是 SLAC 袋*. 因此,(20.13)可以当作**普适**方程用以描述**一切**可能的“袋”的整个系列. 在这两个极限下,(20.9)中的常数 ξ 是

$$\xi = \begin{cases} 2.0428 & \text{MIT 袋}(0 \to 0) \\ 1 & \text{SLAC 袋}(n \to \infty). \end{cases} \tag{20.14}$$

当我们考虑到胶子的交换时,就有辐射修正破坏 SU_6 对称. 因为在这个近似中,强子内部的夸克和胶子二者都没有质量,基于量纲上的考虑,它们的相互作用能也应该正比于 R^{-1}. 而且,像以后在 20.6 节中将要表明的,在 g^2 的第一级近似下,由胶子引起的总的相互作用能**线性地**依赖于 N——强子中夸克与反夸克数. 因此之故,它与 N/R 成正比,正如夸克的动能(20.9)式一样. 从而,在 g^2 的第一级近似下,(20.1)变为

$$M = M_0 + g^2 M_1 = N\frac{\xi_r}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s, \tag{20.15}$$

这里

$$\xi_r = \xi + O(g^2)$$

是一个与 N **无关**的常数. 像以前一样,强子的半径 R 由 $-\mathrm{d}M/\mathrm{d}R = 0$ 所决定. 方程式(20.11)和(20.15)在形式上是一样的. 所以在包含了 g^2 的第一级修正以后,我们看到强子质量仍然只与三个常数

$$\xi_r,\ p \text{ 和 } s$$

有关. 这大大地简化了我们随后的一些讨论. 它使理论结果和实验数据之间有一个总体的符合而与细节**无关,因而使这样一个唯象的分析更加可信.

20.3 近似的 SU_6 对称

1. *质量简并* 重子和介子是三夸克和夸克-反夸克系统的色单态.

---

* Bardeen W A, Chanowitz M S, Drell S D, Weinstein M, Yan T M. *Phys Rev*, 1975, **D11**:1094.

** 例如,见 20.6 节给出的 π, ρ, N 和 Δ 的质量公式.

在这一节,我们研究它们的低位能级,这是由 u, d, s 夸克和它们的反粒子组成的. 在零级近似下,我们略去强子内部夸克质量差,以及交换矢量胶子的效应. 因此,就像以前提到过的,在重子基态,三个夸克的波函数只能在它们角动量的 z 分量方面有所不同. 以下我们将用χ表示夸克波函数.

因为唯象的 σ 场是一个洛伦兹标量,在电荷共轭 C 的作用下它是偶的. 让我们用

$$\bar{\chi} \equiv \gamma_2 \chi \tag{20.16}$$

表示χ的电荷共轭波函数. 这里用第 3 章和第 10 章的符号 $\gamma_2 = \rho_2\sigma_2$. [又见 20.4 节(20.26)—(20.27).]对于介子基态,夸克波函数再一次是同样的χ,而反夸克是$\bar{\chi}$;二者具有相同的能量. χ 和$\bar{\chi}$之间的数学关系以及普适的袋方程(20.13)的解将在(20.4)节中给出. 下面我们将看到,许多结果与 χ 和 $\bar{\chi}$的详细情况无关.

由于这些波函数的每一个描述了一个相对论的 $s_{1/2}$ 轨道,它由一个角动量的 z 分量 ↑ 或 ↓ 所表征. 为简单计,我们将称 ↑ 或 ↓ 为自旋分量,实际上它是个别夸克或反夸克的**总**角动量(自旋加轨道)的 z 分量. 因此,每一个夸克或反夸克有 $2 \cdot 3 = 6$ 个自由度,这里的 2 是由于两个自旋组态 ↑ 和 ↓ ,而 3 是由于三种味 u, d 和 s.

令 $a_\alpha^{c\dagger}$ 和 $b_\alpha^{c\dagger}$ 是轨道波函数χ和$\bar{\chi}$中夸克与反夸克的产生算符;上标 $c = 1, 2, 3$ 表示色指标,下标 $\alpha = 1, 2, \cdots, 6$ 是味自旋指标. 低位重子和介子的态矢是

$$T_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{cc'c''} a_\alpha^{c\dagger} a_\beta^{c'\dagger} a_\gamma^{c''\dagger} |0\rangle$$

和

$$M_{\alpha\beta} a_\alpha^{c\dagger} b_\beta^{c\dagger} |0\rangle, \tag{20.17}$$

这里$|0\rangle$是真空态,$\epsilon^{cc'c''}$ 由(12.10)给出,$T_{\alpha\beta\gamma}$和 $M_{\alpha\beta}$是常数,并且像通常一样,所有重复的指标都要求和. 在零级近似下,能量(20.11)与味-自旋指标 α, β 和 γ 无关;这就导致 SU_6 对称 * . 对于重子态,由于 $\epsilon^{cc'c''}$ 是完全反对称的和 $a_\alpha^{c\dagger}$ 是反对易的,只有 $T_{\alpha\beta\gamma}$ 的对称部分有贡献. 因此,在不失任何

---

* Görsey F, Radicati L. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:173; Görsey F, Pais A, Radicati L. *ibid*, 175; Sckita B. *Phys Rev*, 1964, **136**:B1765.

一般性的条件下,我们可以选取 $T_{\alpha\beta\gamma}$ 是 α, β 和 γ 的一个全对称张量,它有全部 56 个独立的分量:

$$6 \text{ 个 } T_{111} \text{ 型},$$

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ 个 } T_{112} \text{ 型}$$

和

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 个 } T_{123} \text{ 型}.$$

根据 12.1 节的讨论,我们知道 $T_{\alpha\beta\gamma}$,从而知道低位的重子能级,构成了 SU_6 群的㊿不可约表示. 同样,有 $6^2 = 36$ 个介子张量 $M_{\alpha\beta}$ 的独立分量. 在 SU_6 变换群的作用下,$M_{\alpha\beta}$ 可以分解成

$$M_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}\delta_{\alpha\beta}M_{\gamma\gamma} \text{ 和 } M_{\gamma\gamma},$$

它们分别构成一个㉟表示和一个①表示. 在零级近似(20.11)中,56 个重子能级都是简并的,36 个介子能级也一样.

对于重子态,总的角动量可以是 $j = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. 它们的味组成由(12.49)给出,由此得出㊿表示可以分成 $j = \frac{3}{2}$ 的 10 重态(Ω^-, Ξ^*, Σ^* 和 Δ)和 $j = \frac{1}{2}$ 的八重态(Ξ, Σ, Λ 和 N). 由于每一个 j 有 $(2j+1)$ 个分量,十重态有 $10 \cdot 4 = 40$ 个不同的能级,而八重态有 $8 \cdot 2 = 16$ 个,总数是 56. 对于介子,$j = 0$ 或 1. ㉟表示可以被分解成矢量九重态(ϕ, ω, K^* 和 ρ)和赝标量八重态(η, K 和 π);①表示赝标量独态 η',构成一个总数为 36 的近简并能级.

零级能量由(20.11)—(20.12)所决定;它依赖于三个参数:ξ, s 和 p,其中 ξ 由(20.14)给出. 为了看到 s 和 p 取不同的值所产生的物理效应,让我们研究 s 或 p 当中任一个等于零时的极限情况.

(i) 若表面张力 $s = 0$, 我们有半径

$$R = \left(\frac{N\xi}{4\pi p}\right)^{\frac{1}{4}}$$

和质量

$$M=\frac{4}{3}\frac{N\xi}{R}\propto N^{\frac{3}{4}}.$$

因此,低位的介子能量 M_m 对重子能量 M_b 之比是

$$\frac{M_m}{M_b}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}. \tag{20.18}$$

(ii) 若压强 $p=0$, 我们有

$$R=\left(\frac{N\xi}{8\pi s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

和

$$M=\frac{3}{2}\frac{N\xi}{R}\propto N^{\frac{2}{3}},$$

因而

$$\frac{M_m}{M_b}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{20.19}$$

关系式(20.18)和(20.19)与 ξ 无关,因此,不论在 MIT 或 SLAC 袋的极限下,它都成立.

2. **态矢**　首先考虑重子. 在(20.17)中,$a_\alpha^{c\dagger}$ 的色上标 c 可以从 1 变到 3,而味-自旋下指标从 1 到 6;后者现在将更显示地表示为 $f_s=\mathrm{u}_\uparrow,\mathrm{u}_\downarrow,\mathrm{d}_\uparrow,\mathrm{d}_\downarrow,\mathrm{s}_\uparrow$ 和 $\mathrm{s}_\downarrow$, 这里 f 表示夸克的味而下标 s 表示自旋分量. 我们写出

$$|\alpha\beta\gamma\rangle\equiv a_\alpha^{1\dagger}a_\beta^{2\dagger}a_\gamma^{3\dagger}\,|\,0\rangle, \tag{20.20}$$

并且因此

$$|\,\mathrm{u}_\uparrow\mathrm{u}_\uparrow\mathrm{d}_\downarrow\rangle=a_{\mathrm{u}_\uparrow}^{1\dagger}\,a_{\mathrm{u}_\uparrow}^{2\dagger}\,a_{\mathrm{d}_\downarrow}^{3\dagger}\,|\,0\rangle,\ \text{等等}$$

联合(12.49)—(12.50)和(20.17)的上式很容易得到重子态矢的显示形式.

(i) 重子十重态

这些态的总角动量 $j=\dfrac{3}{2}$, 因此,它们的 z 分量 j_z 可以是 $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, …. 根据(12.50),我们知道 $j_z=\dfrac{3}{2}$ 态是:

$$|\,\Omega_{\frac{3}{2}}\rangle=|\,\mathrm{s}_\uparrow\mathrm{s}_\uparrow\mathrm{s}_\uparrow\rangle$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\Delta^{+}_{\frac{3}{2}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{20.21}$$

$$|\Delta^{-}_{\frac{3}{2}}\rangle=|d_{\uparrow}d_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle,$$

这里左边的下标$\frac{3}{2}$表示j_z. 对于其他的j_z分量态,我们可以用(13.47)的转动算符. 例如,由(20.21)得出$j_z=\frac{1}{2}$的那些态是

$$|\Omega^{-}_{\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|s_{\downarrow}s_{\uparrow}s_{\uparrow}\rangle+|s_{\uparrow}s_{\downarrow}s_{\uparrow}\rangle+|s_{\uparrow}s_{\uparrow}s_{\downarrow}\rangle],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}|\Delta^{+}_{\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{9}}[&|d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle+|d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle+|d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle\\&+|u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle\\&+|u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle],\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

前面已经提到过,这样的十重态总数是$4\cdot10=40$个. 剩下的㊻表示中的$56-40=16$个是自旋$\frac{1}{2}$的八重态,下面将给出.

(ii) 重子八重态

这也由(20.17)的上面一个表达式给出. 利用(12.48)和它们对十重态的正交性,我们得到,例如

$$\begin{aligned}|p_{\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}[&-2|d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle+|d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle+|d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle\\&+|u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle-2|u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle\\&+|u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle+|u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle-2|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle],\end{aligned} \tag{20.22}$$

这里下标$\frac{1}{2}$再一次表示j_z. 作交换$u\rightleftarrows d$,我们得到$|n_{1/2}\rangle$. 与此相似,我们可以构造所有其他重子八重态矢.

(iii) 介子态

㉟＋①表示能够分解成一个矢量九重态(即,SU_3 的味八重态和独态)和一个赝标量九重态. 这些态矢可以通过利用(12.39)和(20.17)来构成.

当我们包括夸克之间的质量差和胶子交换所产生的辐射修正在内时,SU_6 对称性就遭到破坏. 这些问题将在 20.6 节中讨论.

练习.　显式写出 36 个低位介子能级的态矢.

20.4　零级孤立子解

现在我们转到孤立子解的详细分析. 像前节一样,我们将首先略去夸克与矢量场的相互作用以及强子内部 u, d 和 s 夸克的质量. 于是(20.2)的有关部分仅由如下的项组成

$$\mathscr{L}_0 = -\psi^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + f\sigma\right)\psi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu}\right)^2 - U(\sigma), \qquad (20.23)$$

它是我们的零级拉氏量密度. 相应的哈密顿量密度是正规乘积$:\mathscr{H}_0:$,这里 $\mathscr{H}_0$ 由下式给出

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + U(\sigma) + \psi^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta f\sigma)\psi,$$

Π 是 σ 的共轭动量,并且 $\boldsymbol{\alpha}$, β 是标准的狄拉克矩阵. 像以前指出过的,由于 σ 只是一种唯象的场,它没有短波长的分量,因此,作为一种近似,我们将略去一切 σ 的圈图. 其余的图叫做树图,它对应于 σ 场的经典近似. 夸克场是完全量子力学的;即,它们满足

$$\{\psi(\boldsymbol{r}, t), \psi^\dagger(\boldsymbol{r}', t)\} = \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \qquad (20.24)$$

1. *基本方程*　对于一个经典的 σ,共轭动量 Π 与 σ 对易;因而最低能态总是 $\Pi = 0$, 因此 σ 与 t 无关. 由(20.23),我们知道 ψ 满足

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta f\sigma)\psi = \mathrm{i}\dot{\psi}.$$

如前，ψ 代表列矩阵，它的元素是那些色为 c 和味为 f 的夸克场 ψ_f^c. 方便的办法是把量子算符 ψ 用满足同样方程的旋量展开：

$$\psi_f^c(\boldsymbol{r},\ t) = \sum_n [(a_f^c)_n \chi_n(\boldsymbol{r}) e^{-i\epsilon_n t} + (b_f^c)_n^\dagger \bar{\chi}_n(\boldsymbol{r}) e^{i\epsilon_n t}] \quad (20.25)$$

这里χ_n 和$\bar{\chi}_n$ 是下方程的 c 数旋量解

$$(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta f\sigma)\cdot\begin{cases}\chi_n \\ \bar{\chi}_n\end{cases} = \epsilon_n \cdot \begin{cases}\chi_n \\ -\bar{\chi}_n\end{cases} \quad (20.26)$$

其中 ϵn 是正的. 在表示(3.10)—(3.11)中，$\boldsymbol{\alpha} = \rho_1\boldsymbol{\sigma}$, $\beta = \rho_3$ 和 $\gamma_2 = \rho_2\sigma_2$，我们有

$$\gamma_2\boldsymbol{\alpha}^*\gamma_2 = \boldsymbol{\alpha},\ \gamma_2\beta^*\gamma_2 = -\beta,$$

因此

$$\bar{\chi}_n = \gamma_2\chi_n^*, \quad (20.27)$$

这很容易证明. 为了满足反对易关系(20.24)，我们有等时条件下的

$$\{(a_f^c)_n,\ (a_{f'}^{c'})_{n'}^\dagger\} = \{(b_f^c)_n,\ (b_{f'}^{c'})_{n'}^\dagger\} = \delta_{ff'}\delta^{cc'}\delta_{nn'}.$$

一切其他的在$(a_f^c)_n$, $(b_f^c)_n$ 和它们的厄米共轭之间的反对易算子全为 0. 零级哈密顿量 $H_0 \equiv \int :\mathscr{H}_0: d^3 r$ 变为

$$H_0 = \sum_{n,\ f,\ c}[(a_f^c)_n^\dagger(a_f^c)_n + (b_f^c)_n^\dagger(b_f^c)_n]\epsilon_n + \int\left[\frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + U(\sigma)\right]d^3 r. \quad (20.28)$$

令 ϵ 是ϵ_n 的最小值；χ和$\bar{\chi}_n$ 是相应的χ_n 和$\bar{\chi}_n$. 前一节中已经讨论过，重子(p, n, …)的基态是由三种不同色的夸克所组成，除了自旋的差别之外，它们的波函数χ都一样；与此相似，介子基态是由一个在χ中的夸克和一个在 $\bar{\chi} = \gamma_2\chi^*$ 中的反夸克所组成. 因此，根据(20.28)，最低的强子能级的能量是下式的极小值

$$E = N\epsilon + \int\left[\frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + U(\sigma)\right]d^3 r, \quad (20.29)$$

这里对介子而言 $N = 2$，对重子而言 $N = 3$，$\sigma(\boldsymbol{r})$是一个 c 数函数，ϵ是

$\sigma(\boldsymbol{r})$的泛函,由 c 数狄拉克方程(20.26)式所决定,

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta f\sigma)\,\chi=\varepsilon\,\chi \tag{20.30}$$

其中 ε 是最小的正本征值,并且

$$\int\chi^{\dagger}\,\chi\,\mathrm{d}^{3}r=1.$$

因为

$$\varepsilon=\int\chi^{\dagger}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta f\sigma)\,\chi\,\mathrm{d}^{3}r,$$

利用(20.30)我们知道

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta\sigma}=f\,\chi^{\dagger}\beta\,\chi.$$

因此,E 的极小发生在 $\delta E/\delta\sigma=0$ 时,或

$$-\nabla^{2}\sigma+U'(\sigma)=-fN\,\chi^{\dagger}\beta\,\chi \tag{20.31}$$

这里 $U'(\sigma)=\mathrm{d}U/\mathrm{d}\sigma$. 对于基态,$\sigma$ 是球对称的,(20.30)的自旋 $j=\frac{1}{2}$ 的解可以写作

$$\chi=\begin{pmatrix}u\\ \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}/r)v\end{pmatrix}s \tag{20.32}$$

这里对于 $j_z=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

$$s=\uparrow=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\downarrow=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利自旋矩阵, $u=u(r)$ 和 $v=v(r)$ 是径向函数. 将(20.32)代入(20.30)和(20.31). 由于

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}v/r)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\frac{2v}{\boldsymbol{r}}$$

和

$$\chi^{\dagger}\beta\,\chi=u^{2}-v^{2},$$

我们导出径向方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=(-\varepsilon-f\sigma)v,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\frac{2}{r}v=(\varepsilon-f\sigma)u, \tag{20.33}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r}-U'(\sigma)=fN(u^2-v^2).$$

[关于夸克质量 $m\neq 0$ 时的修正问题见本节末练习 1 和 2.]

上一组方程式仍然有些复杂,因为它包含了一个未知函数 $U(\sigma)$. 前已指出,我们将假定 $U(\sigma)$具有如图 20.1 所示的一般形式,它有一个很陡峭的形状;即,它的曲率 U''在 $\sigma=0$ 和 $\sigma_{真空}$ 两点上都 $\gg m_{\mathrm{p}}^2$ 而它的高度 U_0 在局部极大处也 $\gg m_{\mathrm{N}}^4$. 因此,σ 在强子内部只能在 0 的附近涨落,因而我们可以把 $U(\sigma)$近似地当作一个二次函数;即,

$$U\cong\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2$$

并且它的导数 $U'\cong m_\sigma^2\sigma$, 其中 $m_\sigma\gg m_{\mathrm{N}}$. 现在 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}r$ 的大小是$\sim\sigma/R$,这里强子半径 R 的估计值是$\sim m_{\mathrm{N}}^{-1}$,因而 $R^{-1}\ll m_\sigma$. 因此,比起 $U'(\sigma)$来我们可以略去导数 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}r^2$ 和 $r^{-1}\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}r$. 结果,强子内部(20.33)式中最后一个方程就变为

$$\sigma\cong-\frac{Nf}{m_\sigma^2}(u^2-v^2). \tag{20.34}$$

把这个结果代入(20.33)中前面二个方程式,并用标度变换

$$\rho\equiv\varepsilon r,$$

$$\hat{u}\equiv\frac{f}{m_\sigma}\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}u$$

和

$$\hat{v}\equiv\frac{f}{m_\sigma}\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}v. \tag{20.35}$$

我们发现在**强子内部**,夸克波函数由(20.13)所决定:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\rho}=(-1+\hat{u}^2-\hat{v}^2)\ \hat{v}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{2\hat{v}}{\rho}=(1+\hat{u}^2-\hat{v}^2)\,\hat{u}.$$

令人惊讶的是强子内部的夸克波函数与 $U(\sigma)$的详细情况无关，它们由这两个没有自由参数的方程式决定. [这一情况很像关于原子内部电子分布的托马斯-费米方程；经过一个标度变换以后，它也约化到一个无量纲的微分方程，没有参数.]在强子边界 $r=R$ 处，我们有零物质密度 $\psi^\dagger\beta\psi=0$. 这样，在强子半径 $r=R\equiv\xi/\varepsilon$ 处(即，$\rho=\xi$)

$$\hat{u}(\xi)^2=\hat{v}(\xi)^2. \tag{20.36}$$

强子半径之外，夸克密度仍然是零. 因此，对于 $r>R$，(20.31)变为

$$-\nabla^2\sigma+U'(\sigma)=0. \tag{20.37}$$

因为 σ 将很快地从 R 以内 $\sigma\cong 0$ 变到 R 以外 $\sigma=\sigma_{\text{vac}}$，经过的宽度 $\sim m_\sigma^{-1}\ll R$，所以我们可以用 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2$ 来近似∇^2. 得到的解就是一维孤立子解(7.19)：

$$r=\int^{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sqrt{2U(\sigma')}}. \tag{20.38}$$

例如，当 U 是一个四次函数并且 $p=U(0)$ 被略去时，我们有

$$U\cong\frac{m_\sigma^2}{2\sigma_{\text{vac}}^2}(\sigma-\sigma_{\text{vac}})^2\sigma^2,$$

(20.38)在 r 靠近或$>R$ 时的解是

$$\sigma\cong\frac{1}{2}\left[1+\tanh\left(\frac{m_\sigma}{2}(r-R)\right)\right]\sigma_{\text{vac}}. \tag{20.39}$$

这明显表明过渡区的厚度确实是$\sim m_\sigma^{-1}$.

2. 孤立子　虽然基本方程(20.13)并不包含任何显示的参数，但它们的解构成一个单参数的族. 从(20.32)我们知道 v(因而 $\hat{v}$)是狄拉克 $j=\frac{1}{2}$ 的旋量解的 p 波部分. 所以当 $r\to 0$ 时，$v=0$；即，当 $\rho\to 0$ 时，$\hat{v}=0$. 这也可以从(20.13)看出；由于有 $2\hat{v}/\rho$ 项，当 $\rho\to 0$ 时，我们必须有 $\hat{v}=0$. 另一方面，在原点，$\hat{u}$ 可以是任意的常数. 对于一个给定的初

值 $\hat{u}(0)$,相应的解可以通过从 $\rho=0$ 到 $\rho=\xi$ 的直接积分而得到;在 $\rho=\xi$ 的那一点我们有 *

$$\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi), \tag{20.40}$$

因此,边界条件(20.36)得到满足. 方程式(20.40)决定了常数 ξ. 由(20.35)和归一化条件

$$\int \chi^{\dagger} \chi \, d^3 r = \int (u^2 + v^2) d^3 r = 1,$$

我们发现

$$\epsilon = \frac{m_{\sigma}}{f}\sqrt{\frac{n}{N}}, \tag{20.41}$$

这里

$$n = \int_0^{\xi} 4\pi\rho^2 (\hat{u}^2 + \hat{v}^2) d\rho. \tag{20.42}$$

事实上初值 $\hat{u}(0)$ 只能在 0 和一个临界值 $u_c = 1.741\ 9$ 之间. 当 $\hat{u}(0) \to 0$, 我们有 $n \to 0$, 但当 $\hat{u}(0) \to u_c^-$, $n \to \infty$. 对于 $\hat{u}(0) > u_c$, 解有奇点因而变为非物理的. 这样,标志这些解的一个方便的参数可以是 $\hat{u}(0)$ 也可以是(20.42)式中的积分 n. 两种极限解, $n \to 0$ 和 ∞ 的例子,在图 20.2 中给出.

3. MIT 袋　MIT 袋对应于极限 $n \to 0$(即, $\hat{u}(0) \to 0$). 从(20.42)我们知道,在这一极限下,振幅 $\hat{u}$ 和 $\hat{v}$ 是一致地小. 因此,我们可以略去(20.13)中的非线性项. 方程式于是被线性化:

---

* 从内部解我们得到边界条件(20.36),它容许在 $\rho = \xi$(即 $r = R = \xi/\epsilon$) 时, $\hat{u}(\xi) = \pm\ \hat{v}(\xi)$. 我们将看到,通过把内部解和外部解相连接,我们只能用 $\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$, 而**不是** $\hat{u}(\xi) = -\ \hat{v}(\xi)$. 这是因为当 $r > R$ 时, σ 是大的;(20.33)中的前两个方程可以用 $du/dr = -f\sigma v$ 和 $dv/dr = -f\sigma u$ 来近似,因此,在那个区的解是

$$u \cong v \cong \exp\left[-\int f\sigma(r) dr\right]. \tag{20.40a}$$

对于(20.39)这个特例,我们有

$$u \cong v \propto [1 - e^{m_{\sigma}(r-R)}]^{-(f\sigma_{\text{vac}}/m_{\sigma})}, \tag{20.40b}$$

这在 $r > R$ 的情况下,通过一个长度 $(f\sigma_{\text{vac}})^{-1}$ 指数性地衰减→0. 由(20.40a)得出 $u = v$, 因此在边界上 $\hat{u} = \hat{v}$.

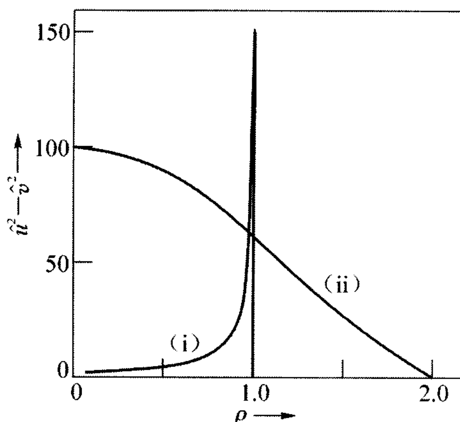


图 20.2　$\hat{u}^2-\hat{v}^2$ 对 ρ 的图.(i)$(4\pi)^{-1}n \ll 1$($\hat{u}^2-\hat{v}^2$ 的标度任意).
(ii)$(4\pi)^{-1}n = 3.53\times 10^6$($\hat{u}^2-\hat{v}^2$ 的标度是精确值)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\rho} = -\hat{v}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\rho} + \frac{2\hat{v}}{\rho} = \hat{u}. \tag{20.43}$$

联立起来得出

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + 1\right)\hat{u} = 0.$$

解是

$$\hat{u}(\rho) \propto j_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho} \tag{20.44}$$

和

$$\hat{v}(\rho) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\hat{u}(\rho) \propto j_1(\rho) = \left(\frac{\sin\rho}{\rho} - \cos\rho\right)\frac{1}{\rho}$$

这里 j_0 和 j_1 是球贝塞尔函数,边界 $\rho = \xi$ 由(20.40)决定;即,$j_0(\xi) = j_1(\xi)$,这对于基态给出

$$\xi = 2.0428. \tag{20.45}$$

强子半径 R 与能量 ε 通过 $R = \xi/\varepsilon$ 相关,或

$$\varepsilon = \frac{2.042\,8}{R}. \tag{20.46}$$

利用(20.29),我们知道系统的总能量 E 由夸克能量 $N\varepsilon$ 和场能

$$\int\left[\frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + u(\sigma)\right]\mathrm{d}^3 r$$

所组成. σ 迅速地由 0 变到 σ_{vac},并且在外部继续保持这一数值. 由于 $U(0) = p$ 和 $U(\sigma_{\text{vac}}) = 0$, 积分

$$\int_{r\leqslant R} U(\sigma)\mathrm{d}^3 r \cong \frac{4\pi}{3}R^3 p \tag{20.47}$$

正比于体积. 但在过渡区的积分

$$\int\left[U(\sigma) + \frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2\right]\mathrm{d}^3 r \cong \int(\nabla\sigma)^2\mathrm{d}^3 r \equiv 4\pi R^2 s \tag{20.48}$$

是与表面积 $4\pi R^2$ 成正比的,其中比例常数 s 被定义为单位面积上的表面能. (20.48)式中积分包含区 $r = R + O(m_\sigma^{-1})$; 第一个等式是由于 $D = 1$ 的威里定理(7.44).

于是总能量由下式给出

$$E = N\frac{2.042\,8}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s. \tag{20.49}$$

4. SLAC 袋　SLAC 袋对应于另一个极端, $n \to \infty$(即, $\hat{u}(0) \to u_c = 1.741\,9$). 由图 20.2 我们知道夸克波函数完全集中于表面,在这一情况下 * ,ξ 是 1 而 $\varepsilon = R^{-1}$. 系统的能量不是(20.49)而是

$$E_{\text{SLAC}} = \frac{N}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s. \tag{20.50}$$

这和(20.49)都与(20.11)相符,其中 ξ 由(20.14)给出.

历史上,MIT 袋的提出假定了表面能 $s = 0$, 而 SLAC 袋则假定体积能 $p = 0$. 两个模型的原本的陈述实际上和这里给出的是大不相同的. 通过把强子看成是浸没在 QCD 真空中的孤立子,我们能够对所有

---

* 详细情况见 *Phys Rev*, 1977, **D16**:1096.

可能的袋的解给出一个系统的研究;MIT 和 SLAC 的例子只代表两种极端的情况.

练习 1.　假定强子内部的夸克质量 $m \neq 0$. 证明(20.33)的前两个方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u(r) = [-\varepsilon - (f\sigma + m)]v(r)$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}\right)v(r) = [\varepsilon - (f\sigma + m)]u(r),$$

但最后一个方程式仍然不变.

练习 2.　在 MIT 袋的近似下,我们可以令上述两式中的 $\sigma = 0$. 证明解是

$$u(r) \propto j_0(kr)$$

这里 $k = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, 和

$$v(r) \propto \frac{k}{\varepsilon + m} j_1(kr)$$

其中比例常数相同,强子半径 R 现在由下式决定

$$\frac{j_0(kR)}{j_1(kR)} = \frac{k}{\varepsilon + m}.$$

20.5　对核子的应用

在核子态中,夸克波函数是χ,由(20.32)给出. 它依赖于自旋变量 $s = \uparrow$ 或 $\downarrow$. 为清楚起见,我们将用χ_s 标志相应的波函数. 像以前一样,我们有归一化条件

$$\int \chi_s^\dagger \chi_s \mathrm{d}^3 r = 1. \tag{20.51}$$

这里重复指标 s 并不求和,以后也是这样.

1. 电荷半径　令 r_p^2 和 r_n^2 是质子和中子的根均方电荷半径,它由积分

$$\sum Q_f \int \chi_s^\dagger \chi_s r^2 \mathrm{d}^3 r \tag{20.52}$$

给出. 这里 s 可以是↑或↓, Q_f 表示以 e 为单位的 f 味夸克的电荷, 并且求和是对核子中的三种夸克做的. 由(20.32)我们知道上述积分与下标 s 无关, 对于 p, 总电荷

$$\sum Q_f = 1,$$

因此

$$r_\mathrm{p}^2 = \int \chi_\uparrow^\dagger \chi_\uparrow r^2 \mathrm{d}^3 r = \int \chi_\downarrow^\dagger \chi_\downarrow r^2 \mathrm{d}^3 r. \tag{20.53}$$

对于 n, 因为 $\sum Q_f = 0$, 则

$$r_\mathrm{n} = 0.$$

2. *磁矩* 电磁流算符是

$$j_\mu = \mathrm{i} \sum_{f,c} Q_f \psi_f^{c\dagger} \gamma_4 \gamma_\mu \psi_f^c,$$

这里 ψ_f^c 由(20.25)给出. 对于一个常数磁场 $\boldsymbol{B}$, 电磁矢量势 $\boldsymbol{A}$ 可以选作

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r};$$

相应的电磁相互作用哈密顿量是

$$-e \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}^3 r \equiv -\boldsymbol{\mu}_\mathrm{op} \cdot \boldsymbol{B},$$

这里 $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{op}$ 是磁矩算符. 这样

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{op} = \frac{1}{2} e \sum_{f,c} Q_f \int \psi_f^{c\dagger} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\alpha} \psi_f^c \mathrm{d}^3 r \tag{20.54}$$

像以前一样, 这里矩阵 $\boldsymbol{\alpha} = \rho_1 \boldsymbol{\sigma}$. 取 $\boldsymbol{B}$ 沿 z 的方向. z 分量 $(\mu_\mathrm{op})_z$ 在 $j_z = \frac{1}{2}$ 质子态中的期望值给出了质子的磁矩. 利用(20.22)所给出的 $|p_{1/2}\rangle$ 态, 我们发现对质子而言

$$\mu_\mathrm{p} \equiv \langle p_{\frac{1}{2}} | (\mu_\mathrm{op})_z | p_{\frac{1}{2}} \rangle = e \int \chi_\uparrow^\dagger \frac{1}{2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\alpha})_z \chi_\uparrow \mathrm{d}^3 r, \tag{20.55}$$

同样,对中子而言

$$\mu_{\mathrm{n}} \equiv \langle n_{\frac{1}{2}} \mid (\mu_{\mathrm{op}})_z \mid n_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{3}e\left[\int \chi_{\downarrow}^{\dagger}\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\alpha})_z\,\chi_{\downarrow}\,\mathrm{d}^3 r - \int \chi_{\uparrow}^{\dagger}\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\alpha})_z\,\chi_{\uparrow}\,\mathrm{d}^3 r\right]. \tag{20.56}$$

我们注意到在$|p_{1/2}\rangle$态中,发现 $\mathrm{u}_{\uparrow}$ 对 $\mathrm{u}_{\downarrow}$ 的相对概率是 5 : 1, $\mathrm{d}_{\uparrow}$ 对 $\mathrm{d}_{\downarrow}$ 的相对概率是 1 : 2,而发现 u 对 d 的相对概率是 2 : 1. 因为 u 的电荷是 $\frac{2}{3}e$, d 的电荷是$-\frac{1}{3}e$,我们得出由于

$$\frac{2e}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{6}-\frac{e}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=0,$$

$\mathrm{u}_{\downarrow}$ 的贡献与 $\mathrm{d}_{\downarrow}$ 的贡献相抵消;这就说明了为什么在(20.55)中 μ_{p} 只与波函数$\chi_{\uparrow}$ 有关. 同样可以算出在(20.55)和(20.56)中其他的系数. 经过沿 y 轴转 180°,我们看到

$$\int \chi_{\downarrow}^{\dagger}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\alpha})_z\,\chi_{\downarrow}\,\mathrm{d}^3 r = -\int \chi_{\uparrow}^{\dagger}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\alpha})_z\,\chi_{\uparrow}\,\mathrm{d}^3 r,$$

因此,由(20.55)—(20.56),

$$\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -\frac{2}{3} \tag{20.57}$$

这与实验值-0.685 惊人地相符.

3. $g_{\mathrm{A}}/g_{\mathrm{V}}$　下一章中我们将讨论,在 β 衰变 $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_e$ 中,矢量和轴矢量流算符是

$$V_\mu = \mathrm{i}\sum_c \psi_u^{c\dagger}\gamma_4\gamma_\mu\psi_d^c$$

和

$$A_\mu = \mathrm{i}\sum_c \psi_u^{c\dagger}\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5\psi_d^c. \tag{20.58}$$

比值 $g_{\mathrm{A}}/g_{\mathrm{V}}$ 被定义为

$$\frac{g_{\mathrm{A}}}{g_{\mathrm{V}}} \equiv \frac{\langle p_{\frac{1}{2}} \mid A_z \mid n_{\frac{1}{2}}\rangle}{\langle p_{\frac{1}{2}} \mid V_0 \mid n_{\frac{1}{2}}\rangle}.$$

利用(20.22),我们发现

$$\frac{g_A}{g_V}=\frac{5}{3}\int\chi_\uparrow^\dagger\sigma_z\chi_\uparrow\,d^3r. \qquad (20.59)$$

前已指出,显式解χ_s与(20.42)的一个单参数n有关,它可以从0变到∞. 当$n\to0$时我们得到MIT极限,其中χ_s系由(20.32)和(20.44)所给出的球贝塞尔函数决定. 当$n\to\infty$时,我们就有SLAC极限,其中χ_s只是在表面上才不为零. 在原来的建议中,MIT袋没有表面张力,而SLAC袋没有任何压强p. 因此,在这两种情况下,只有一个常数:对MIT袋是p,而对SLAC袋是s. 这独一的常数提供了系统的全部质量标度;因此,在这两个模型中没有自由参数. 利用夸克波函数的显式解χ_s,可以直接计算r_p, μ_p和g_A/g_V. 结果在下表中列出;由于MIT和SLAC袋代表所有这一类模型的两个极端的限,这也给出了强子孤立子模型的变化范围.

物理观测量	实验值	MIT 袋	SLAC 袋
r_p	$3.86/m_N$	$4.25/m_N$	$3.21/m_N$
μ_p	$2.79/(2m_N)$	$2.36/(2m_N)$	$2.14/(2m_N)$
μ_n	$-0.685\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$
g_A/g_V	1.25	1.09	$\frac{5}{9}$

从g_A/g_V的值我们看到实验结果对MIT型的袋模型更加有利. 但是,到现在为止,我们只用了零夸克质量近似. 由(20.59)我们知道在非相对论极限下$\int\chi_\uparrow^\dagger\sigma_2\chi_\uparrow\,d^3r\to1$, 因而

$$g_A/g_V\to5/3.$$

这样,如果我们考虑到夸克质量的效应,则不难在任何这样的袋模型中把比值g_A/g_V从零质量夸克的极限值提高到观测值1.25上去.

20.6 一级修正

在零级近似中,强子质量由(20.11)给出,那是SU_6对称的. 现在我

们将转到对称破缺的问题；我们对强子能级的谱特别感兴趣，就像下面表中所列的那些（以 MeV 做单位）：

$\pi(140)$	$\eta(549)$	$\eta'(958)$
$\rho(770)$	$\omega(783)$	$\phi(1\,020)$
$N(940)$	$\Delta(1\,232)$	等等.

以前曾经指出过，SU_6 的破坏部分是由于胶子的交换，部分是由于这一事实，即 s 夸克的“质量”比起 u 和 d 的来要重约～200 MeV. 前者破坏了自旋 SU_2 对称，而后者破坏了味 SU_3 对称，结果导致了熟知的盖尔曼-大久保质量公式，这在 12.3 节中已经讨论过. 我们将要研究的一级修正包含了这两种效应.

1. *胶子交换和质量公式*　对于 u，d 和 $\bar{u}$ 和 $\bar{d}$ 所组成的强子，零夸克质量近似是一个好的近似 *. 我们假定

$$m_u \cong m_d \cong 0. \tag{20.60}$$

因此，对于这些强子，一级修正只有胶子交换的效应，它引入了一种自旋有关的相互作用从而消除了 π 和 ρ 以及 N 和 Δ 之间的简并，下面我们将看到这一点. 为简单计，我们将首先集中讨论这四个强子态. 令 g 是强子内部夸克胶子的耦合. 图 20.3 给出了

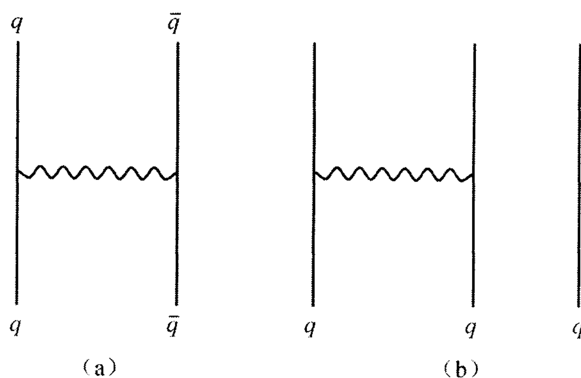


图 20.3　(a) 介子和 (b) 重子的最低级胶子交换图

* 见下(20.73)和(20.74)式.

$$\alpha_c = \frac{g^2}{4\pi}$$

的一级过程的图.

像在(20.15)中一样,强子 h 质量能够写作

$$m_h = M = N\frac{\xi_r}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 p + 4\pi R^2 s. \tag{20.61}$$

以下,我们将首先证明,在所考虑的胶子交换图中,ξ_r 确实与 N 无关,并由下式给出

$$\xi_r = \xi - \frac{2}{3}\alpha_c[I_{el} - \zeta I_{mag}] + O(\alpha_c^2) \tag{20.62}$$

这里 I_{el}和 I_{mag}是正数$\sim O(1)$,

$$\zeta = \begin{cases} -3 & \text{对于 } \pi \\ 1 & \text{对于 } \rho \\ -1 & \text{对于 N} \\ 1 & \text{对于 } \Delta \end{cases} \tag{20.63}$$

而由(20.40)所决定的 ξ 是 ξ 的零级值. 在 MIT 和 SLAC 袋的极限下,ξ 由(20.14)给出. 常数 I_{el}和 I_{mag}与色电和色磁的相互作用有关,可以用图 20.3 来加以计算.

我们注意到在质量公式(20.61)—(20.63)中有四个参数 ξ, α_c, p 和 s. 假定为简单起见我们令表面张力

$$s = 0,$$

并且选定某一特殊的孤立子解来固定 ξ,例如可以是 MIT 或 SLAC 袋极限. 即使这样,仍然有两个未知参数 p 和 α_c. 因此,在(20.62)式中,假定两个常数 I_{el}和 I_{mag}已经用图 20.3 计算出来,则在 π, ρ, N 和 Δ 的四个质量值 m_π, m_ρ, m_N 和 m_Δ 中,至多可预测两个. 我们还将证明,根据图(a)和(b)的一般性质,我们能够简单地导出对这两个质量的预测,而不需要实际计算这些常数. 最后的质量公式是

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{m_\Delta}{m_\rho} = \begin{cases} 1 & \text{理论} \\ 1.180 & \text{实验} \end{cases} \tag{20.64}$$

和

$$\frac{3(m_\rho^{4/3}-m_\pi^{4/3})}{4(m_\Delta^{4/3}-m_N^{4/3})}=\begin{cases}1 & \text{理论}\\ 1.187 & \text{实验}.\end{cases} \tag{20.65}$$

这些结果的成立与 ξ 的假定以及 I_{el} 和 I_{mag} 的数值无关. 这样,不经过详细的计算,这个模型就能得到某种程度成功的保证.

证明. 在零夸克质量的近似下,根据纯量纲分析的理由,图 20.3 中的两个图解都正比于 α_c/R;它们的系数依赖于夸克和反夸克数 N,以及自旋组态. 为了导出与 N 的关系,让我们用 λ_i^l 表示第 i 个夸克(或反夸克)的八个盖尔曼矩阵,这里 $l=1, 2, \cdots, 8$. 两个图都有一个幅与下述和成正比.

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\lambda_i^l\cdot\frac{1}{2}\lambda_j^l=\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}\lambda_i^l\lambda_j^l,$$

其中第一个$\frac{1}{2}$的因子是由于在和式中每一对(i, j)计算了两次,而另两个$\frac{1}{2}$因子是由于 19.6 节所给出的夸克胶子顶角的费恩曼定则. 因为强子是色单态,它们的态矢$|\rangle$满足

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^l\,|\rangle=0.$$

因此,我们有期望值

$$\langle|\,(\sum_i\lambda_i^l)^2\,|\rangle=0,$$

因而,由于(12.22),

$$\left\langle\left|\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}\sum_{l=1}^{8}\lambda_i^l\lambda_j^l\right|\right\rangle=-\left\langle\left|\frac{1}{8}\sum_{i}\sum_{l=1}^{8}(\lambda_i^l)^2\right|\right\rangle=-\frac{2}{3}N.$$

为了获得与自旋的关系,我们注意到,每一个图有一个自旋无关的电部分 I_{el} 和一个磁部分 I_{mag}. 与后者相乘的系数依赖于

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j\qquad.$$

的平均值,这里 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 是第 i 个夸克(或反夸克)的泡利自旋矩阵.

就介子而言,π 是一个自旋单态,而 ρ 是一个自旋三重态. 自旋单态

的 π 满足

$$\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \, |\pi\rangle = 0,$$

因而 $\left(\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i\right)^2$ 的平均值是 0. 因此

$$\left\langle \pi \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \right| \pi \right\rangle = -\left\langle \pi \left| \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i^2 \right| \pi \right\rangle = -3.$$

对于三重态,由于矩阵 $\sum_{i \neq j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j$ 的迹为 0,它的平均值必定是单态的 $-\frac{1}{3}$. 这样,我们得出

$$\zeta \equiv \left\langle \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \right| \right\rangle = \begin{cases} -3 & \text{对于 } \pi \\ 1 & \text{对于 } \rho. \end{cases}$$

同样,对于重子态,我们得到

$$\zeta \equiv \left\langle \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \right| \right\rangle = \begin{cases} -1 & \text{对于 N} \\ 1 & \text{对于 } \Delta. \end{cases}$$

把这些因子加在一起,我们得出色电能等于 $-\frac{2}{3}\alpha_c N/R$ 乘以一个与自旋无关的常数 I_{el}. 因为它是由吸引力产生的,I_{el} 是正. 与此相似,色磁能能够被写作 $\frac{2}{3}\alpha_c \zeta N I_{mag}/R$. 由于在一个自旋单态中磁力是吸引力,对 π 而言相应的能量应当是负;因而 I_{mag} 也是正的. I_{el} 和 I_{mag} 两者都是 $\sim O(1)$. 方程式(20.62)和(20.63)于是成立.

其次,我们注意到因为对于 ρ 和 Δ 而言,两者的 $\zeta = 1$, 所以,Δ 和 ρ 的 ξ_r 值也必须相同. 根据(20.61),就得出这样的结论,即 m_ρ 和 m_Δ 之间的差别只能是由于 ρ 的 $N = 2$ 和 Δ 的 $N = 3$. 在表面张力为零的情况下,(20.61)中改变 R 使质量为极小,我们发现它是 $\propto N^{3/4}$,这就导致质量公式(20.64).

在(20.62)式中,ξ 和 $\alpha_c I_{el}$ 只以组合 $\left(\xi - \frac{2}{3}\alpha_c I_{el}\right)$ 的形式出现. 这样,即使我们把 I_{el}, I_{mag}, ξ, α_c 和 p 都当作未知参数,在 $s = 0$ 的情况下,(20.61)式实际上只依赖于三个组合的参数 $\left(\xi - \frac{2}{3}\alpha_c I_{el}\right)$, $\alpha_c I_{mag}$ 和 p. 从

四个强子质量 m_π, m_ρ, m_N 和 m_Δ 中消去这三个,我们导出(20.65)式.这就完成了(20.61)—(20.65)式的证明.

因此,袋模型的成功处,对 QCD 的详细情况,以及对特定的孤立子解,并不敏感.从而,由轻夸克组成的强子谱不是决定 α_c 的最好的地方.[见下面(20.72)和(20.79).]

2. *夸克质量*　夸克的质量项可以被写作

$$H_m = m_u \psi_u^{c\dagger} \beta \psi_u^c + m_d \psi_d^{c\dagger} \beta \psi_d^c + m_s \psi_s^{c\dagger} \beta \psi_s^c + \cdots \tag{20.66}$$

这里像以前一样,色上标是求和的,而…代表重质量的夸克(粲夸克,底夸克,等等).为了保持同位旋不变性,我们假定

$$m_u \cong m_d.$$

与此相反,味的 $SU(3)$对称是破坏了的,因为 s 和 u(或 d)之间的质量不同.

(i) 矢量介子

矢量九重态由 $\rho(770)$, $\omega(783)$, $K^*(892)$和 $\phi(1\,020)$组成.它们当中,ϕ 是 $s\bar{s}$,四个 K^* 是 $u\bar{s}$, $d\bar{s}$和它们的电荷共轭态;ρ 和 ω 是 $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $u\bar{d}$ 和 $d\bar{u}$的同位旋三重态和单态.利用(20.66)和 $m_u = m_d$, 我们导出下面的质量公式:

$$m_\rho = m_\omega$$

和

$$m_\phi - m_\rho = 2(m_{K^*} - m_\rho), \tag{20.67}$$

这与实验数据符合良好.注意根据观测的质量值

$$\frac{m_\omega - m_\rho}{m_\omega + m_\rho} \cong 0.008\,4$$

和

$$\frac{m_\phi + m_\rho - 2m_{K^*}}{m_\phi + m_\rho + 2m_{K^*}} \cong 0.001\,7.$$

s 和 u(或 d)的质量差由下式给出

$$\frac{1}{2}(m_\phi - m_\rho) = 125 \text{ MeV} = (m_s - m_u)\langle\beta\rangle \tag{20.68}$$

这里$\langle\beta\rangle$是 $\psi^\dagger \beta \psi$ 的期望值.如果我们用零级近似的夸克波函数(20.32),

则

$$\langle\beta\rangle=\int(u^2-v^2)\mathrm{d}^3r$$

例如,在 MIT 袋的极限下,这由下式给出

$$\langle\beta\rangle=\frac{\int[j_0^2(\rho)-j_1^2(\rho)]\rho^2\mathrm{d}\rho}{\int[j_0^2(\rho)+j_1^2(\rho)]\rho^2\mathrm{d}\rho}\cong 0.48, \tag{20.69}$$

这里,$j_0(\rho)$和 $j_1(\rho)$是 0 和 1 级球贝塞尔函数,积分是从 $\rho=0$ 到 $\rho=\xi=2.0428$. 因此,根据(20.68)和(20.69),我们得出

$$m_s-m_u\sim 260\ \mathrm{MeV}. \tag{20.70}$$

(ii) 重子十重态

由(12.50),我们看到下列重子之间

$$\Delta(1\,232),\ \Sigma^*(1\,382),\ \Xi^*(1\,530)\text{和}\ \Omega^-(1\,672)$$

质量间隔相等能够很容易地用质量差 (m_s-m_u) 来加以说明. 根据实验值,我们定出

$$145\ \mathrm{MeV}\cong(m_s-m_u)\langle\beta\rangle. \tag{20.71}$$

与(20.68)比较,由介子态得出的平均值$\langle\beta\rangle$与由重子态得出的有些差异. 百分差是

$$\cong(145-125)/(145+125)\cong 7.4\%,$$

这并非不合理,因为这里只用了零级近似的夸克波函数.

(iii) 重子八重态

在自旋$\frac{1}{2}$的八重态中,N(940)没有 s, $\Lambda(1\,115)$和 $\Sigma(1\,193)$各有一个,而 $\Xi(1\,318)$有两个. 显然,Λ 与 Σ 的质量差~78 MeV 不是由于(20.66)所给出的 H_m 的期望值;必须把它归属于与胶子交换有关的效应. 利用图 20.3 中的(b)图,我们能够计算两个有质量的夸克之间的色电磁能量差,以及一个有质量而一个没有质量,和两个都没有质量的夸克之间的色电磁能量差. 这些和 H_m 一起能够说明所有八重态的质量差. 我们将不给出这些计算,只是要说明做到与实际相符是容易的,因为大部分的质量差

$$m_\Lambda - m_N \cong 175\ \text{MeV} \quad \text{和} \quad \frac{1}{2}(m_\Xi - m_N) \cong 189\ \text{MeV}$$

与十重态之间的间隔 145 MeV 差别不大.

(iv) 赝标九重态

九个低位的赝标粒子 $\pi(140)$, $K(495)$, $\eta(549)$和 $\eta'(958)$是很不相同的,因为比起其他的强子来,π 介子的质量几乎是零. 而且,不像矢量介子中的 $\rho-\omega$ 简并,没有赝标同位旋单态的质量与 π 介子的质量相近. 为什么?

a. 近于零的 π 介子质量

由(20.61)—(20.62),我们看到如果参数 ξ_r 在 π 介子态中近于零,则 π 介子质量 $m_\pi \cong 0$. 唯象地说,这是可能的,如果 QCD 的精细结构常数 α_c 有如下的值

$$\alpha_c \cong \frac{3\xi}{2(I_{el} + 3I_{mag})}.$$

常数 I_{el}, I_{mag}和 ξ 都是正且都是 O(1);其中,ξ 可以在 2 以内的一个因子中变化,这视袋模型而定,如(20.14)所示. 如果我们假定这些常数大小差不多,则我们有

$$\frac{\xi}{(I_{el} + 3I_{mag})} \approx \frac{1}{4}.$$

因此,近于零的 π 介子质量导致

$$\alpha_c \approx \frac{3}{8}. \tag{20.72}$$

在第 24 章中,当我们讨论手征对称时,将给出当夸克质量

$$m_u = m_d = 0.$$

时,期望 π 介子的质量

$$m_\pi = 0$$

的论据. 进一步,在用 $m_u \cong m_d$ 和 m_s 所表示出的一级近似中,π 介子和 K 介子的质量之比与夸克的质量之比有如下的关系

$$\frac{m_u}{m_s} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{m_K}\right)^2 \cong \frac{1}{25}. \tag{20.73}$$

[将在 24.6.2 节中导出.]

联合(20.70)和(20.73),我们得出 *

$$m_s \sim 250\ \text{MeV} \tag{20.74}$$

和

$$m_u \cong m_d \sim 10\ \text{MeV}.$$

b. $\eta - \eta'$反常.

$\rho - \omega$ 简并是由于

$$\rho^0 = \frac{(u\bar{u} - d\bar{d})}{\sqrt{2}},$$

$$\omega^0 = \frac{(u\bar{u} - d\bar{d})}{\sqrt{2}}$$

以及 $m_u \cong m_d$. 改变 ρ^0 的自旋组态由自旋三重态变到自旋单态,我们就得到了赝标 π^0 介子. 如果我们对 ω^0 作相同的改变,似乎应当有希望得到一个同位旋赝标粒子,它将与 π 介子近似地简并. 但是,不存在这样一种粒子. η 和 η'的质量都高得太多. 这就是所谓的 U_1 问题. 这个问题的解决,也许部分地由于某种非微扰效应**的反常,部分地由于图 20.4 中所

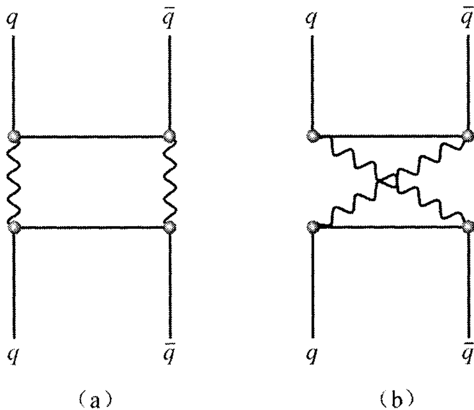


图 20.4 不存在一个低质量的同位旋单态的赝标量粒子可能是部分地由于它与双胶子态(胶子球)的耦合

* Weinberg S. A Festschrift for I. I. Rabi [M]// Motz L. New York: New York Academy of Sciences, 1977. 其中还估计了 u 夸克和 d 夸克之间的质量差.

** 'tHooft G. *Phys Rev Lett*, 1976, **37**:8.

给出的湮没图,后者因为内部对称性 * 而具有很大的系数,因而只存在于味,色和自旋的单态中.

20.7　重夸克的强子

由于 J/ψ(3 100)能级的迅速发现**,我们关于夸克轻子系统的知识大大地扩展到增加*** c, b 和 τ. 关于这些,只有 c 夸克曾经在理论上通过一个令人信服的论证(叫做 GIM 机理,它将在下一章中讨论)预言过. 在我们以前对于轻夸克强子的讨论中,夸克是相对论性的;因此,我们近似地把"袋"当作缓慢运动的,而夸克是在强子内部的自由粒子,对于重夸克系统,应该作相反的考虑. 按照康奈尔(Cornell)小组**** 所发展的观点,我们将把重夸克当作非相对论性的粒子,而唯象地只用一个长程的禁闭势来代替"袋". 这样,为导出 $c\bar{c}$(J/ψ 族)和 $b\bar{b}$(γ 族)的能级,我们考虑如下的薛定谔方程,其中夸克和反夸克用在 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的两个非相对论性的粒子表示

$$\left[-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\nabla}_1^2+\boldsymbol{\nabla}_2^2)+U(r)\right]\psi=E\psi \tag{20.75}$$

这里

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{\nabla}_i=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

而 m 可以是 c 夸克的质量 m_c,或者是 b 夸克的质量 m_b. 令 $\boldsymbol{p}$ 是和 $\boldsymbol{r}$ 共轭的相对动量. $\boldsymbol{s}_i=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$ 是第 i 个粒子的自旋算符. 势能 $U(r)$可以写成一个和式

---

* 见 Friedberg R, Lee T D. *Phys Rev*, 1978, **D18**:2623 以及其中提到的参考文献.

** Aubert J J, *et al*. *Phys Rev Lett*, 1974, **33**:1404; Augustin JE, *et al*. *ibid*, 1406. 由这些实验我们推断出粲夸克 c 的存在.

*** 底夸克 b 的存在是从 S. W. Herb 等人对 γ 的发现中推断出来的. *Phys Rev Lett*, 1977, **39**:252. 重轻子系由 M. L. Perl 等人所发现. *Phys Rev Lett*, 1975, **35**:1489.

**** Eichten E, *et al*. *Phys Rev Lett*, 1975, **34**:369.

$$U(\boldsymbol{r}) = U_c(r) + U_s(\boldsymbol{r}), \tag{20.76}$$

这里 $U_c(r)$是一个与自旋无关的有心位势,其中 $r = |\boldsymbol{r}|$, 而 $U_s(\boldsymbol{r})$依赖于 $\boldsymbol{r}$ 的取向和自旋组态. 我们可以把自旋有关的位势 $U_s(\boldsymbol{r})$分类如下:

$$U_s(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2) U_{ls}(r) + \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 U_{ss}(r)$$
$$+ [\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 - 3(\boldsymbol{s}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{s}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})] U_t(r) \tag{20.77}$$

这里 $U_{ls}(r)$; $U_{ss}(r)$和 $U_t(r)$分别代表在自旋-轨道,自旋-自旋和张量相互作用中与角度无关的因子. 有趣的是要知道由现有的实验数据能够在多大的程度上决定这些势函数.

有心位势 $U_c(r)$通常被写成一个库仑部分$\propto \frac{-1}{r}$和一个禁闭部分$\propto r$之和,

$$U_c(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_c}{r} + \frac{r}{a^2}. \tag{20.78}$$

为了与实验数据相符,假定参数 α_c, a 和夸克质量是 *

$$\alpha_c = 0.39,$$

$$a = 2.34\ \mathrm{GeV}^{-1},$$

$$m_c = 1.84\ \mathrm{GeV} \tag{20.79}$$

和

$$m_b = 5.17\ \mathrm{GeV}.$$

已知的 $c\bar{c}$(J/ψ 族)和 $b\bar{b}$(Υ 族)能级在图 20.5 和 20.6 中给出. 令 $E(nS)$为自旋三重态 S 轨道能级,n^3S_1. 由这些图可以看出下面的关系近似地成立:

$$\frac{E_\Upsilon(2S) - E_\Upsilon(1S)}{E_\psi(2S) - E_\psi(1S)} \cong 1 \tag{20.80}$$

---

* Eichten E, *et al*. *Phys Rev*, 1980, **D21**:203. 在该文中参数 $K = 0.52$ 相当于 $4\alpha_c/3$. 这里的因子 4/3 是由于(20.62)中的 2/3 因子和(20.61)中的 $N = 2$ 的乘积. 参考(20.72)式的估值,和由高能表式(23.123)对 α_c 的另一种确定方法.

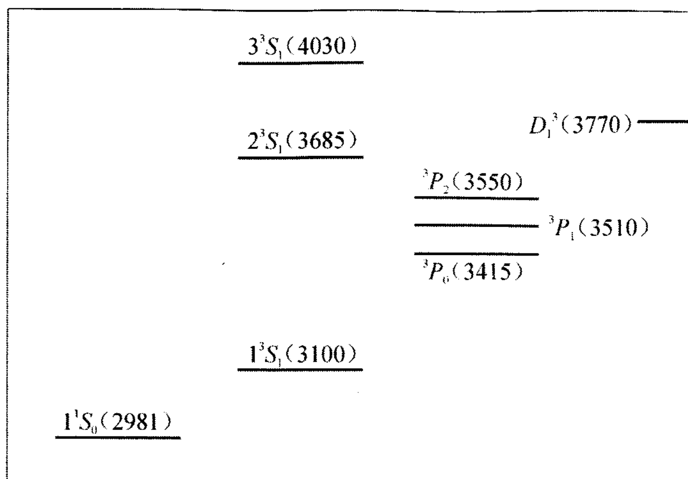


图 20.5　J/ψ 族的能级

和

$$\frac{E_\Upsilon(3S)-E_\Upsilon(1S)}{E_\psi(3S)-E_\psi(1S)}\cong 1,$$

4^3S_1 (10 500)

3^3S_1 (10 400)

2^3S_1 (10 020)

1^3S_1 (9 460)

图 20.6　Υ 族的能级

这里下标 ψ 表示 $c\bar{c}$系统而 Υ 是 $b\bar{b}$系统. 如果取(20.79)式给出的参数,则这些能级之间近于相等的间隔可以由位势(20.78)来满足. 同样的这些数据也可以用一种不同种形式* 的禁闭位势来说明;这种位势不是 r 的线性函数,而是$\propto\ln(r/常数)$,对此我们期望得到能级的间隔与夸克的质量无关如(20.80)式. 这样,这些能级并不能唯一地决定 $U_c(r)$的形状.

现在,我们转到与自旋有关的位势 $U_s(\boldsymbol{r})$. 在^3P_J 诸态中,不同的 J 态之间的间隔依赖于自旋有关的位势. 我们定义精细结构比

$$F\equiv\frac{E_\psi(^3P_2)-E_\psi(^3P_1)}{E_\psi(^3P_1)-E_\psi(^3P_0)},\tag{20.81}$$

它的实验值 $\cong\frac{1}{2}$. 如果我们唯象地假定位势(20.76)是由一个有心位势

* Quigg C, Rosner J L. *Phys Lett*, 1977, **71B**:153.

乘两个粒子的狄拉克矩阵 $\gamma_\mu(1)\gamma_\mu(2)$之积所生成，像在一个单矢量介子的交换过程一样，则(20.77)中的 U_{ls}，U_{ss}和 U_t 将完全由有心位势 U_c 所决定. 我们发现

$$U_{ls} = \frac{3}{2m^2 r}\frac{d}{dr}U_c,$$

$$U_{ss} = \frac{2}{3m^2}\nabla^2 U_c \tag{20.82}$$

和

$$U_t = \frac{1}{3m^2}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)U_c.$$

由这些方程，能够证明当 $U_c \propto r^n$，比 F 是

$$\frac{2}{5}\frac{(13+n)}{(5-n)},$$

这给出

$$F = \frac{7}{5} \quad 当\ n = 1,$$

和

$$F = \frac{4}{5} \quad 当\ n = -1;$$

两者都与实验值很不相同. 因此，(20.82)这个简单的假定似乎与实验值 $F \cong \frac{1}{2}$ 不相符.

在(20.78)式中，短程的库仑部分 $-\frac{4}{3}\alpha_c/r$ 假定是由于一个单胶子交换；因此有一个由(20.82)所给出的自旋有关的位势. 另一方面，禁闭位势是由于多重胶子交换所产生的. 这样，并不奇怪，位势的长程分量可能与(20.82)有所不同；它至少包含这样一部分其变换性质唯象地类似于一个单标量粒子的交换*. 因此，可以想见在非相对论性的薛定谔方程中用到

---

* 如果我们用一个标量-标量因子 1·1 来代替矢量-矢量因子 $\gamma_\mu(1)\cdot\gamma_\mu(2)$，则(20.82)式要由下式来代替

$$U_{ls} = -\frac{1}{2m^2 r}\frac{d}{dr}U_c \quad 和 \quad U_{ss} = U_t = 0.$$

的两个唯象的位势 U_c 和 U_s，它们之间的关系不同于由一个单矢量介子的交换所得的结果.

其他重夸克强子，例如 D 介子($c\bar{u}$, $c\bar{d}$和它们的电荷共轭态)和带粲粒子的重子也已经被观察到，这些都在附录中列出.

参 考 文 献

Chand R. ed. Symmetries and Quark Models. New York: Gordon and Breach, 1970.

Barbour I M, Davies A T, eds. Fundamentals of Quark Models. Edinburgh: The Scottish Universities Summer School in Physics, 1977.

Marpurgo G, ed. Quarks and Hadronic Structure. New York: Plenum Press, 1977.

Hasenfratz P, Kuti J. *Physics Reports*, 1978, **40 C**:75.

Quigg C, Rosner JL. *Physics Reports*, 1979, **56 C**:167.

我们关于轻夸克强子的讨论直接取材于下文

Friedberg R, Lee TD. *Phys Rev*, 1977, **D16**:1096 and 1978, **D18**:2623.

第21章 弱相互作用

虽然β衰变的现象约在上世纪末就已发现,但是,弱相互作用应成为诸种物理相互作用力中独立的一种,这一概念的发展却是很缓慢的.只是在发现了其他的弱作用反应,如μ衰变和μ俘获等等过程,以及发现*了所有这些反应都可以近似地用同样的耦合常数来描述后,上述概念才逐步清晰起来.从粒子数据组网站给出的粒子性质可以看出,截至目前为止,已经发现了大量的、各种不同类型的弱作用反应.

为了掌握正在发展的这一领域的全貌,本章中我们将大致按照历史的线索,对弱作用的现象给出全面的评述.

所有已知的弱作用,根据反应中轻子出现的情况,唯象地可分为三类:即纯轻子的、半轻子的和无轻子的.到目前为止,它们的振幅都能用下面的有效拉氏量的一阶矩阵元来描述:

$$\mathscr{L}_{\text{有效}} = \mathscr{L}_{\text{轻子}} + \mathscr{L}_{\text{半轻}} + \mathscr{L}_{\text{无轻}} \tag{21.1}$$

其相应的形式将在以后讨论.

在本章中,我们将设所有中微子质量为零,轻子数L_e, L_μ和L_τ的守恒律成立.这些假设与已有的实验事实是相符的.现有的关于ν_e, ν_μ和ν_τ的质量限**分别约是35 eV, 0.56 MeV和0.25 GeV.由于对b夸克强子的弱衰变知道极少,我们的讨论将只限于由u, d, s和c夸克组成的强

---

* Klein C. *Nature*, 1948, **161**:897. Lee T D, Rosenbluth R, Yang C N. *Phys Rev*, 1949, **75**:9905. Puppi G. *Nuovo Cimento*, 1949, **6**:194. Tiomno J, Wheeler J A. *Revs Mod Phys*, 1949, **21**:153.

** 本章中所有实验值,如不标明直接出处,都取自**粒子性质综述**, Barash-Schmidt N, *et al*. *Revs Mod Phys*, 1980, **52**, No. 2, Part Ⅱ, and/or Kirk TBW, Abarbanel HDI. Proceedings of the Ⅸ International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Fermilab, 1979.

子. 此外, CP 和 T 的破坏将认为是由不同于弱作用的另一作用引起. 仅在 21.10 节中讨论 Kobayshi-Maskawa 模型时,我们才研究 b 夸克的弱作用,同时探讨能兼容 T 和 CP 不守恒的弱强子流的可能性.

21.1 纯轻子的相互作用

1. **唯象的拉氏量** 在(21.1)中, $\mathscr{L}_{轻子}$ 可写为

$$\mathscr{L}_{轻子} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left(j_\lambda^+ j_\lambda^- + \frac{1}{2} j_\lambda^0 j_\lambda^0\right), \tag{21.2}$$

这里

$$j_\lambda^- = \mathrm{i} \sum_l \psi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_l}, \tag{21.3}$$

$$j_\lambda^+ = \mathrm{i} \sum_l \psi_{\nu_l}^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_l$$

以及

$$j_\lambda^0 = \mathrm{i} \sum_l [\psi_{\nu_l}^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda g_\nu (1+\gamma_5) \psi_{\nu_l} + \psi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (g_v + g_a \gamma_5) \psi_l], \tag{21.4}$$

式中求和号代表对三种带电轻子 $l = \mathrm{e}$, μ 和 τ 求和, G 是费米常量 $\sim 10^{-5}/m_p^2$, g_ν, g_v 和 g_a 都是无量纲实常数. 上标+, −和 0 代表由轻子流 j_λ 引起的电荷 Q 的改变. 例如 j_λ^- 将 ν_l 变为 e^-,相应的电荷改变

$$\Delta Q \equiv Q_{末态} - Q_{初态}$$

等于−1;同样,对于 j_λ^+ 有 $\Delta Q = +1$,对于 j_λ^0 有 $\Delta Q = 0$.

2. **μ 子衰变** 下面的 μ 衰变对应的流-流相互作用矩阵元是分析得最好的:

$$\mu^- \to \mathrm{e}^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mathrm{e},$$

$$\mu^+ \to \mathrm{e}^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mathrm{e}.$$

μ 子寿命和下面的未经修正的费米常量

$$G_{\mathrm{uncor}} \equiv (G_\mu)_{\mathrm{uncor}}$$

以及电子和 μ 粒子质量 m_e，m_μ 有如下关系(见习题 21.1)：

$$(\text{寿命})_\mu^{-1} = (G_\mu)^2_{\text{uncor}} m_\mu^5 \left(1 - \frac{8m_e^2}{m_\mu^2}\right)(192\pi^3)^{-1}, \tag{21.5}$$

这样由 μ 子寿命的实验值可以定出：

$$(G_\mu)_{\text{uncor}} = (1.4320 \pm 0.0002) \times 10^{-49} \text{erg cm}^3 \tag{21.6}$$

注意这里的下标 μ 提醒我们相应数值是从 μ 衰变中得到的，而下标uncor则指明没有辐射修正. 方程(21.5)可以作为 $(G_\mu)_{\text{uncor}}$ 的定义. 由四费米子相互作用(21.2)—(21.3)可以计算出 μ 衰变的辐射修正*. 由此得到经过修正的费米常数值是

$$\begin{aligned} G \equiv G_\mu &= \left[1 + \frac{\alpha}{4\pi}\left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right)\right](G_\mu)_{\text{uncor}} \\ &= (1.4350 \pm 0.0002) \times 10^{-49} \text{ erg cm}^3, \end{aligned} \tag{21.7}$$

或者，用自然单位表示，$G \cong 1.029 \times 10^{-5}/m_p^2$.

在习题 21.1 中，要求读者证明，在完全极化的 μ 子的静止系中，其衰变出的电子谱(已经归一化的)有如下形式**：

$$d^2 N_e = x^2[3 - 2x \pm \cos\theta(1 - 2x)]dx d\cos\theta \tag{21.8}$$

式中上面的符号是对 e^- 辐射，下面的对 e^+ 辐射，计算中已将 m_e/m_μ 近似取作零，变量 x 和 θ 的定义如下：

$$x = \text{电子动量} \Big/ \frac{1}{2}m_\mu,$$

$$\theta = \text{电子动量和 } \mu \text{ 介子极化矢量的夹角}.$$

因此有

$$\int_0^1 dx \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{d^2 N_e}{dx d\cos\theta} = 1.$$

公式(21.8)在很高的精度内已为实验所证实.

---

* Kinoshita T, Sirlin A. *Phys Rev*, 1959, **113**:1652. Berman SM. *Phys Rev*, 1958, **112**:267.

** Lee TD, Yang CN. *Phys Rev*, 1957, **105**:1671.

说明.

(i) 由(21.8)式所给出的确定的谱形和角分布是二分量理论和轻子守恒律的结果. 这两条在(21.2)的拉氏密度中是假定成立的. 如果没有这些假设,那末不带微商项的四费米子相互作用最一般形式将含有 10 个复常数. 这时电子谱形不是唯一确定的. 例如,归一化的电子能谱将由下式给出:

$$\frac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}x} = 6x^2\left[\left(2-\frac{4}{3}\rho\right)-\left(2-\frac{16}{9}\rho\right)x\right] \tag{21.9}$$

式中 ρ 称为米歇尔(Michel)参量*,是 0 与 1 之间的任一实数值. $\left[\text{式 (21.8) 对应 } \rho = \frac{3}{4}.\right]$ 不同 ρ 值时(21.9)式给出的不同谱形在图 21.1 中给出. 可以看出,ρ 确定端点 $x = 1$ 处的谱形高度.

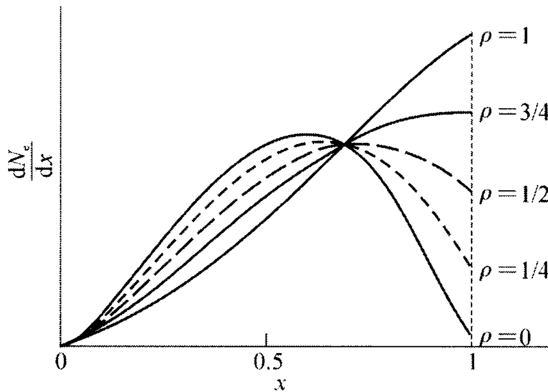


图 21.1 不同 ρ 值时(21.9)式对应的谱形

将实验测得的 ρ 值随测定时间的变化作图表示出来是很发人深省的. 从图 21.2 可以看出,历史上 ρ 值从 $\simeq 0$ 开始,慢慢增长,直到 1957 年有了理论预测后,才逐渐变为 $\rho = \frac{3}{4}$. 但是,值得注意的是,每一次"新"的实验值都从来没有落在前一次实验所标的误差限之外.

---

* Michel L. *Proc Roy Soc* (London), 1950, **A63**:514.

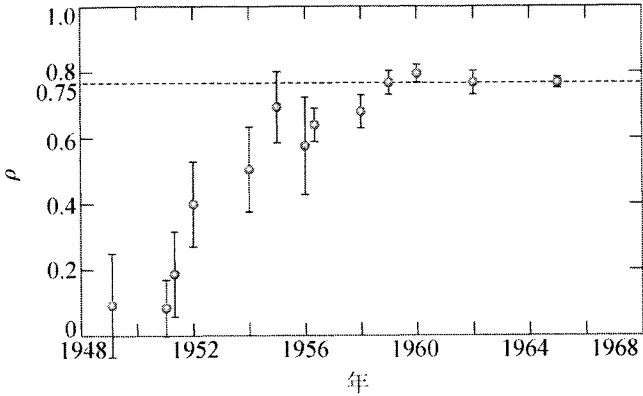


图 21.2 实验测定的米歇耳参量 ρ 随时间的变化

(ii) 当 $x = 1$ 时(21.8) 式的分布变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 N_e}{\mathrm{d}x\mathrm{d}\cos\theta} = 1 \mp \cos\theta.$$

我们将会看到,上式无需作任何详细计算就可以推导出. 在 μ 的静止参考系中,e 的动量 $\boldsymbol{p}_e$ 在 $x = 1$ 时最大. 中微子和反中微子的动量 $\boldsymbol{p}_\nu$ 和 $\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}}$ 这时应互相平行,并都与 $\boldsymbol{p}_e$ 反平行. 但是 ν 是左旋的,$\bar{\nu}$是右旋的,因此当它们向同一方向运动时,在洛伦兹变换下可当作一自旋为 0,动量是

$$\boldsymbol{p}_\nu + \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}} = -\boldsymbol{p}_e$$

的粒子作变换. 又由于 μ 和 e 都是自旋为$\frac{1}{2}$的粒子,因此和(13.101)式一样,e 的角分布必须是 $\cos\theta$ 的线性函数.

在 μ^- 衰变中,终态 e^- 是左旋的. 从图 21.3 可以看出:角动量守恒要求 $\theta = 0$ 禁戒,而 $\theta = \pi$ 是允许的. 这样,e^- 的角分布就一定是 $1 - \cos\theta$;同样,对 e^+,就一定是 $1 + \cos\theta$.

3. **中性轻子流** 其次,让我们看一下 e^- 与 ν 或 $\bar{\nu}$ 的散射. 此后,我们用不带下标的 ν 代表 ν_e, ν_μ 和 ν_τ 族中任一种,同时将 $\mathrm{i}\psi_l^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}$ 简写为 $\bar{l}\nu_l$ 流. 从式(21.3)和图 21.4,我们看出在带电流的乘积 $j_\lambda^+ j_\lambda^-$ 中,$\bar{e}\nu_e$ 流的平方项给出下列过程:

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-, \quad \bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-,$$

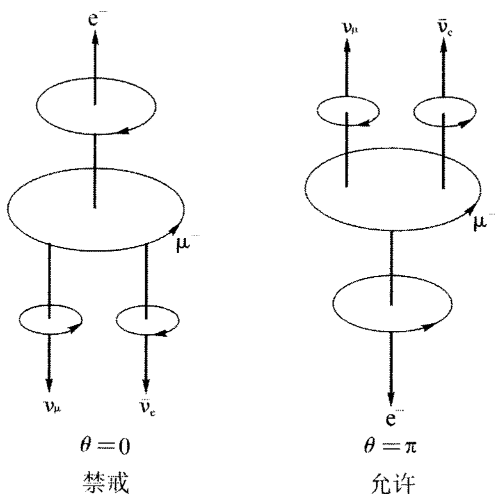


图 21.3 环形箭头指示 μ^- 衰变中自旋转动的方向

而$\bar{e}\nu_e$ 流和$\bar{\mu}\nu_\mu$ 流的交叉乘积又给出

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-.$$

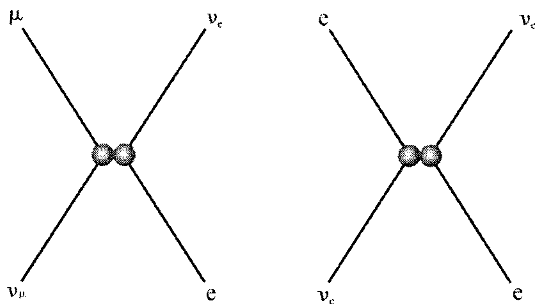


图 21.4 在 $O(G)$ 量级内，带电流之间的耦合 $j_\lambda^+ j_\lambda^-$ 只能给出 ν+e 和 $\bar{\nu}$+e 的两个图来，如果没有中性流，ν_μ + e → ν_μ + e 和 $\bar{\nu}_\mu$ + e → $\bar{\nu}_\mu$ + e 是禁戒的.

然而在 G 的同一量级下，下面的弹性散射过程

$$\left.\begin{matrix}\nu_\mu \\ \bar{\nu}_\mu\end{matrix}\right\} + e^- \to \left.\begin{matrix}\nu_\mu \\ \bar{\nu}_\mu\end{matrix}\right\} + e^-$$

只能通过中性流的乘积 $j_\lambda^0 j_\lambda^0$ 而产生.

利用(21.4)和习题 5.4,我们看到 * ,如果和 1 相比,将量级为 $O(m_e/E_\nu)$ 的量略去,则反应

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$$

和

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$$

的总截面可由下式给出:

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \mid g_\nu \mid^2 \left(\mid g_v + g_a \mid^2 + \frac{1}{3} \mid g_v - g_a \mid^2 \right)$$

和

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) = \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \mid g_\nu \mid^2 \left(\mid g_v - g_a \mid^2 + \frac{1}{3} \mid g_v + g_a \mid^2 \right) \tag{21.10}$$

这里 E_ν 是在实验室系中的中微子能量. 从(21.7)就得到

$$\frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} = 4.3 \times 10^{-42} (E_\nu/\text{GeV}) \text{cm}^2.$$

上述 $\nu_\mu e^-$ 和 $\bar{\nu}_\mu e^-$ 弹性散射过程均已观测到. 其截面的实验值是:

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = (1.6 \pm 0.4) \times 10^{-42} (E_\nu/\text{GeV}) \text{cm}^2$$

以及

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) = (1.3 \pm 0.6) \times 10^{-42} (E_\nu/\text{GeV}) \text{cm}^2, \tag{21.11}$$

这就证明了中性流的存在,并且表明 g 的量级是 $O(1)$.

$\tau^\pm$ 介子是 1975 年由珀尔等人(Perl *et al.*)在对产生过程 $e^+ + e^- \to \tau^+ + \tau^-$ 和下面的衰变过程中发现的:

$$\tau^\pm \to \mu^\pm + \begin{cases} \bar{\nu}_\tau + \nu_\mu \\ \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu \end{cases}$$

和

---

* 要导出式(21.10),我们首先将(5.128)中的 C_V 和 C_A 用 $g_\nu g_v G$ 和 $g_\nu g_a G$ 来代替,然后注意到在习题 5.4 中(质心系能量)^2 是 $2E_\nu m + m^2 \cong 2E_\nu m$, 式中的 m 在这里应换作 m_e,最后,对变量 y 从 0 到 1 积分. 进一步讨论将在第 22 章给出;参看(22.87)和(22.92).

$$\tau^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \begin{cases} \bar{\nu}_{\tau} + \nu_{e} \\ \nu_{\tau} + \bar{\nu}_{e}. \end{cases}$$

正如10.4节中所讨论的，从高能中微子反应中我们知道有

$$\nu_{\mu} + n \not\rightarrow e^{-} + p,$$

因而 $\nu_{\mu} \neq \nu_{e}$. 同样，因为发现了

$$\nu_{\mu} + n \not\rightarrow \tau^{-} + p,$$

由此也得到另一个结论，即

$$\nu_{\mu} \neq \nu_{\tau}. \tag{21.12}$$

虽然认为 ν_e 应不同于 ν_τ 这一想法，看起来似乎合理，但现在仍然须要直接的实验检验，如果 $\nu_e \neq \nu_\tau$，那末除了以前讨论过的 L_e 和 L_μ 外，还要加上第三种轻子数 L_τ 的守恒. L_τ 的取值是(和10.4节中 L_e 和 L_μ 的取值类似)

	τ^-	τ^+	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	其他粒子
$L_\tau =$	$+1$	-1	$+1$	-1	0

21.2 半轻子相互作用的唯象拉格朗日量

半轻子弱反应可以用一唯象的拉格朗日量来描述

$$\mathscr{L}_{\text{半轻}} = \frac{G}{\sqrt{2}}(J_{\lambda}^{+} j_{\lambda}^{-} + J_{\lambda}^{-} j_{\lambda}^{+} + J_{\lambda}^{0} j_{\lambda}^{0}), \tag{21.13}$$

这里 G 仍然代表费米常数，$j_{\lambda}^{\pm,0}$ 代表由(21.3)—(21.4)所给出的同样的轻子流，而 $J_{\lambda}^{\pm,0}$ 则代表相应的强子流. 和前面一样，上标±和0对应着相应的电荷变化

$$\Delta Q = Q_{\text{终}} - Q_{\text{始}}. \tag{21.14}$$

拉格朗日量的厄米性要求

$$(J_{\lambda}^{\pm})^{\dagger} = \begin{cases} +J_{\lambda}^{\mp} & \text{若 } \lambda \neq 4 \\ -J_{\lambda}^{\mp} & \text{若 } \lambda = 4, \end{cases}$$

$$(J_\lambda^0)^\dagger = \begin{cases} +J_\lambda^0 \text{ 若} \lambda \neq 4 \\ -J_\lambda^0 \text{ 若} \lambda = 4, \end{cases} \tag{21.15}$$

这里的±号是和我们的习惯用法 $x_4 = it$ 相联系的.

流 $J_\lambda^{\pm,0}$ 可以分拆成矢量和轴矢量两部分之和 *

$$J_\lambda^{\pm,0} = V_\lambda^{\pm,0} + A_\lambda^{\pm,0}. \tag{21.16}$$

还有另一种分拆 $J_\lambda^{\pm,0}$ 的办法,即根据奇异数改变的选择定则

$$\Delta S = S_{\text{终}} - S_{\text{始}} \tag{21.17}$$

将 $J_\lambda^{\pm,0}$ 写成

$$J_\lambda^{\pm,0} = [J_\lambda^{\pm,0}]_{\Delta S=0} + [J_\lambda^{\pm,0}]_{\Delta S\neq 0}. \tag{21.18}$$

在我们分析 K—$\overline{\text{K}}$ 系统时知道,与(15.49)相适应,弱作用的拉氏量满足

$$\Delta S \neq \pm 2.$$

而 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = \pm 1$ 的分量都存在.这在 π 和 K 的衰变中将要看到.在下节中将讨论这些问题.

21.3 π_{l2} 和 K_{l2} 衰变

1. π 衰变　二体的轻子衰变

$$\pi^\pm \to l^\pm + \nu_l (\text{或} \bar{\nu}_l)$$

只与带电流 $J_\lambda^\pm$ 中 $\Delta S = 0$ 的部分有关.我们立即就会看到,按照(21.16)式分拆时,π 介子和真空之间的 $V_\lambda^\pm(x)$ 矩阵元一定是零,即

$$\langle \text{真空} \mid V_\lambda^\pm(x) \mid \pi^\mp \rangle = 0.$$

---

* Feynman R, Gell-Mann M. *Phys Rev*, 1958, **109**:193; Marshak R E, Sudarshan E C G. *ibid*, 1860; Sakurai J J. *Nuovo Cimento*, 1958, **7**:649.

(21.6)中矢量流和轴矢流的分类是利用强作用和电磁作用中定义出的宇称算符来实现的.

在 π 介子静止系中，因为 π 介子的转动不变性和零自旋的原因，上述方程对 $\lambda=1, 2, 3$ 都是成立的；对于 $\lambda=4$ 的分量，则因为空间反演和 π 是一赝标粒子(在强和电磁作用下)，上述方程也同样成立.

根据(11.80)，$A_\lambda^\pm(x)$矩阵元随 x 的依赖关系是已知的：

$$\langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(x) \mid \pi^\mp \rangle = \langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(0) \mid \pi^\mp \rangle e^{ik\cdot x}$$

这里 k 是 π 态的 4 动量，和通常一样，

$$k \cdot x = k_\lambda x_\lambda.$$

由于 π 是 0 自旋粒子，从洛伦兹不变性我们有：

$$\langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(0) \mid \pi^\mp \rangle \propto k_\lambda$$

所以有这一结果，是因为在这里只有一个 4 矢量，即 k. 而相应的比例常数就是能决定 $\pi_{l2}^\pm$ 衰变振幅的惟一参量. 根据下面就会清楚的理由，我们将这一比例常数写成 $F_\pi \cos\theta_c$ 的形式. 其中 F_π 称为带电 π 衰变常量，θ_c 是卡比玻角(Cabibbo angle). [见 21.5 节.]于是我们写出 *

$$\langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(x) \mid \pi^\mp \rangle = i \cos\theta_c F_\pi k_\lambda \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} e^{ik\cdot x} \tag{21.19}$$

式中 ω 是 π 的能量 ($k_4 = i\omega$)，Ω 是这一系统的体积.

利用(21.13)，(21.16)和(21.19)，可以容易地算出 $\pi_{l2}^\pm$ 的衰变率来；结果是：

$$衰变率(\pi_{l2}) = \frac{G^2 F_\pi^2 m_l^2}{8\pi m_\pi^3}(m_\pi^2 - m_l^2)^2 \cos^2\theta_c. \tag{21.20}$$

[见习题 21.2]利用观测到的 π 介子寿命

$$\tau_\pi = (2.6030 \pm 0.0023) \times 10^{-8}\ \text{sec}$$

---

* (21.19)中的因子 $(2\omega\Omega)^{-\frac{1}{2}}$ 是由于我们采用的量子化是在一大而有限的体积 Ω 内. 如果我们引入一唯象的赝标量场 $\phi_\pi(x)$ 代表 π，则根据(2.20)有

$$\langle 真空 \mid \phi_\pi(x) \mid \pi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} e^{ik\cdot x} \tag{21.19a}$$

其中出现同样的因子.

和(21.7),我们就能定出

$$F_\pi \cos\theta_c \cong 128\ \mathrm{MeV}. \tag{21.21}$$

理论上的 $\pi_{e2}^{\pm}$ 和 $\pi_{\mu2}^{\pm}$ 衰变速率比是

$$\frac{衰变率(\pi_{e2})}{衰变率(\pi_{\mu2})} = \frac{m_e^2(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \cdot 0.965$$
$$= 1.23 \times 10^{-4}, \tag{21.22}$$

式中因子 0.965 是因为辐射修正是 -3.5%. 还可以直接得出,这两种衰变的相空间之比是

$$\frac{相空间(\pi_{e2})}{相空间(\pi_{\mu2})} = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)(m_\pi^2 + m_e^2)}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)(m_\pi^2 + m_\mu^2)} \cong 3.5.$$

(21.22)给出的比值 1.23×10^{-4} 如此之小,是因为轻子流 $j_\lambda^{\pm}$ 要求 $\bar{\nu}_l$ 的螺旋度永远是 1/2(即右手的圆周极化);如果轻子质量 m_l 也是 0,则要求 l^- 的螺旋度为 $-1/2$(即左手的圆周极化). 但另一方面,从图 21.5 我们可以看出,由于角动量守恒,在

$$\pi^- \to l^- + \bar{\nu}_l$$

衰变中 $\bar{\nu}_l$ 和 l^- 必须具有相同的圆周极化. 因为 $m_l \neq 0$, 所以在 π 介子静止系中 l^- 处于右手圆周极化的概率是

$$1 - \boldsymbol{v}_l = \frac{2m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2}$$

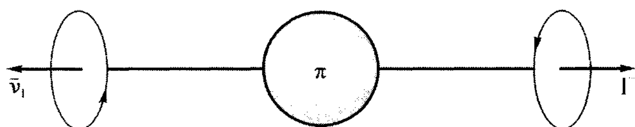


图 21.5 在 π^- 静止的参考系中,角动量守恒要求 l^- 和 $\bar{\nu}_l$ 的螺旋度必须相同

式中 v_l 是 l^- 在 π^- 静止系中的速度. 因子 $1 - v_l$ 对 u 将比对 e 大得多. 正如芬克尔斯坦(Finkelstein)和鲁德曼(Ruderman)* 所第一次指出的,将

---

* Finkelstein R, Ruderman MA. *Phys Rev*, 1949, **76**:1458.

前面的相空间之比乘以 $1-v_{l}$ 的比值，就得到(21.22)所给的 1.23×10^{-4}.

实验上对这一小比值的证实正好支持弱作用流的 $V-A$ 的性质. 这一实验也是对 e 和 μ 流对称的很灵敏的检验；也就是说，拉格朗日量在下面的对换下不变：

$$\mathrm{e}\rightleftharpoons\mu \quad 和 \quad \nu_{\mathrm{e}}\rightleftharpoons\nu_{\mu}.$$

2. K 衰变　与前面完全相同的分析可以用到下面的衰变过程：

$$\mathrm{K}^{\pm}\to\mathrm{l}^{\pm}+\nu_{\mathrm{l}}(或\bar{\nu}_{\mathrm{l}}).$$

正如在(21.19)中一样，K 的衰变振幅只依赖一个常量，可写成 $F_{\mathrm{K}}\sin\theta_{\mathrm{c}}$，$F_{\mathrm{K}}$ 是 K 介子衰变常量，θ_{c} 和前面一样，是卡比博角. 于是我们得出

$$\langle 真空 \mid A_{\lambda}^{\pm} \mid K^{\mp}\rangle = \mathrm{i}\sin\theta_{\mathrm{c}}F_{\mathrm{K}}k_{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \tag{21.23}$$

这里 k 是 K 介子态的 4 动量，$\omega=-\mathrm{i}k_{4}$. 衰变率则是

$$衰变率(\mathrm{K}_{l2})=\frac{G^{2}F_{\mathrm{K}}^{2}m_{\mathrm{l}}^{2}}{8\pi m_{\mathrm{K}}^{3}}(m_{\mathrm{K}}^{2}-m_{\mathrm{l}}^{2})^{2}\sin^{2}\theta_{\mathrm{c}}.$$

从实验的衰变率我们得到：

$$F_{\mathrm{K}}\sin\theta_{\mathrm{c}}\cong 35\ \mathrm{MeV} \tag{21.24}$$

在 21.5 节中我们将要讨论到，卡比博理论要求

$$F_{\mathrm{K}}=F_{\pi},$$

因此

$$\tan\theta_{\mathrm{c}}\cong 0.27. \tag{21.25}$$

然而由于新近发现的 b 夸克强子，对卡比博理论要有所修正，这些在 21.10节中将再讨论. [关于 π 和 K 的半轻子衰变振幅的进一步分析请看第 24 章.]

21.4　经典(原子核)β 衰变

在各种强子弱作用流中，研究得最为广泛详尽的，是引起原子核 β 衰

变的弱流. 在这些跃迁中我们有 $\Delta S=0$ 和 $\Delta Q=\pm 1$. 现在,我们将全面评论这种流的主要性质. 为简单起见,我们将略去下标 $\Delta S=0$*,将这种流记作 $J_\lambda^\pm$.

1. **电荷对称** 正如(21.15)中所示,流 J_λ^+ 和 J_λ^- 互为厄米共轭. 电荷对称的性质则要求它们之间应通过同位旋空间的 180°转动而联系起来:

$$e^{-i\pi I_2} J_\lambda^\pm e^{i\pi I_2} = -J_\lambda^\mp, \tag{21.26}$$

式中算符 $\exp(i\pi I_2)$是由(11.49)—(11.50)定义的.

2. **第一类流和第二类流** 假定有时间反演 T 下的不变性,我们就有

$$TJ_\lambda^\pm T^{-1} = -J_\lambda^\pm. \tag{21.27}$$

再考虑 T 和电荷对称算符的乘积,

$$e^{-i\pi I_2} T. \tag{21.28}$$

从(21.26)—(21.27),我们得到

$$e^{-i\pi I_2} TJ_\lambda^\pm T^{-1} e^{i\pi I_2} = J_\lambda^\mp. \tag{21.29}$$

所有满足这一等式的流,不管其电荷共轭或 T 的对称性质如何,均称作"第一类"流.

但是还有另一种表示这同一性质的办法**. 利用(11.48)所示的 G 宇称算符

$$G = C \cdot e^{i\pi I_2},$$

我们无须作任何对称性的假设而将流算符

$$J_\lambda^\pm = V_\lambda^\pm + A_\lambda^\pm$$

分拆成下面诸项之和:

$$J_\lambda^\pm = (J_\lambda^\pm)_1 + (J_\lambda^\pm)_2,$$

这里

$$(J_\lambda^\pm)_1 \equiv \frac{1}{2}(V_\lambda^\pm + GV_\lambda^\pm G^{-1}) + \frac{1}{2}(A_\lambda^\pm - GA_\lambda^\pm G^{-1}) \tag{21.30}$$

---

* 参看(21.18) 所用符号.

** Weinberg S. *Phys Rev*, 1958, **112**:1375.

就是第一类流，而

$$(J_\lambda^\pm)_2 \equiv \frac{1}{2}(V_\lambda^\pm - GV_\lambda^\pm G^{-1}) + \frac{1}{2}(A_\lambda^\pm + GA_\lambda^\pm G^{-1})$$

称作第二类流. 再利用 CPT 定理和根据(14.19)，有

$$(CPT)V_\lambda^\pm(CPT)^{-1} = -(V_\lambda^\pm)^\dagger = \begin{cases} -V_\lambda^\mp & 若 \quad \lambda \neq 4 \\ V_\lambda^\mp & 若 \quad \lambda = 4 \end{cases}$$

以及

$$(CPT)A_\lambda^\pm(CPT)^{-1} = -(A_\lambda^\pm)^\dagger = \begin{cases} -A_\lambda^\mp & 若 \quad \lambda \neq 4 \\ A_\lambda^\mp & 若 \quad \lambda = 4. \end{cases}$$

又因为在空间反演下

$$PV_\lambda^\pm P^{-1} = \begin{cases} -V_\lambda^\pm & 若 \quad \lambda \neq 4 \\ V_\lambda^\pm & 若 \quad \lambda = 4 \end{cases}$$

和

$$PA_\lambda^\pm P^{-1} = \begin{cases} A_\lambda^\pm & 若 \quad \lambda \neq 4 \\ -A_\lambda^\pm & 若 \quad \lambda = 4, \end{cases}$$

所以得出$(J_\lambda^\pm)_1$ 应满足(21.29)，也即

$$e^{-i\pi I_2} T(J_\lambda^\pm)_1 T^{-1} e^{i\pi I_2} = (J_\lambda^\mp)_1,$$

而
$$e^{-i\pi I_2} T(J_\lambda^\pm)_2 T^{-1} e^{i\pi I_2} = -(J_\lambda^\mp)_2. \tag{21.31}$$

这样一来，如果 T 不变和电荷对称同时成立，则第二类流必定为零，

$$(J_\lambda^\pm)_2 = 0. \tag{21.32}$$

关于第二类流在弱作用中是否存在的问题，在 β 衰变领域中搅扰了近十年之久，只在最近才弄清楚：现有的全部实验数据与**不存在**第二类流的结论相一致*.

---

* 见 Unification of Elementary Forces and Gauge Theories (Ben Lee Memorial Conference on Parity Nonconservation, Weak Neutral Currents and Gauge Theoies, Fermi National Accelerator Laboratory, October 1977), ed. Cline D B, Mills F E. London: Harwood Academic Publishers, 1978 中，特别是 549—592 页.

3. CVC和同位旋三重态流的假定　由费恩曼(Feynman)和盖尔曼(Gell-Mann)所建议的守恒的矢量流的结构,包含着两个互有关联的部分:

(i) CVC,即提出矢量流应是守恒的,也就是

$$\frac{\partial V_\lambda^\pm}{\partial x_\lambda} = 0. \tag{21.33}$$

(ii) 同位旋三重态流的假说,即提出下面三个流算符(包含了卡比玻修正在内)

$$\frac{V_\lambda^+}{\sqrt{2}\cos\theta_c},\ (J_\lambda^{\mathscr{A}})_{I=1}\quad 和\quad \frac{V_\lambda^-}{\sqrt{2}\cos\theta_c} \tag{21.34}$$

将分别按照 $I = 1$ 的三重态的三个分量 $I_3 = 1$, 0 和 -1 作变换,这里 $(J_\lambda^{\mathscr{A}})_{I=1}$ 是强子电磁流算符的同位旋矢量部分,并且 e 已取为一单位电荷,θ_c 是卡比博角,这些将在 21.5 节中再讨论. 只是注意这里的因子 $(\cos\theta_c)^{-1}$ 可简单地看作是一归一化常数,因而(21.34)在传递 4 动量为零时是成立的. 正如(21.50)将指出的,$\cos\theta_c$ 的精确值是 $\cong 0.974$.

重要的是要注意到:(ii)中已隐含了(i),但是**反过来**不行. 例如,我们可以考虑一矢量流

$$K_\mu \equiv \lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi_n^\dagger \gamma_4 \sigma_{\mu\nu}\psi_p$$

这里 λ 是一常数,ψ_n 和 ψ_p 分别是 n 和 p 的场算符,还有

$$\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$$

已由(14.15)给出. 由于 $\sigma_{\mu\nu}$是反对称张量,流算符 K_μ 满足

$$\frac{\partial K_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

然而 K_μ 与 $(J_\lambda^{\mathscr{A}})_{I=1}$ 却完全无关.

同位旋三重态流的假设也可以推广到轴矢流部分,这时,因为电磁流是纯矢量的,我们只要要求

$$A_\lambda^+ \text{ 和 } A_\lambda^- \tag{21.35}$$

是同一 $I = 1$ 三重态中的 $I_3 = 1$ 和 -1 的分量. 从这些性质,(21.34)—

(21.35)中就能得到电荷对称的条件(21.26).

练习. 对于流算符 $V_\lambda \equiv V_\lambda^-$ 和 $A_\lambda \equiv A_\lambda^-$ 在物理的核子态之间的矩阵元,试证明以下几个结论:

(a) 从洛伦兹不变性和空间反演对称(对强作用)性,我们可以得出

$$\langle n \mid V_\lambda(x) \mid p \rangle = \mathrm{i}u_n^\dagger \gamma_4 [\gamma_\lambda f_1 + \mathrm{i}(n+p)_\lambda f_2 + \mathrm{i}(n-p)_\lambda f_3] u_p e^{-\mathrm{i}q\cdot x} \tag{21.36}$$

和

$$\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p \rangle = \mathrm{i}u_n^\dagger \gamma_4 \gamma_5 [\gamma_\lambda h_1 + \mathrm{i}(n-p)_\lambda h_2 + \mathrm{i}(n+p)_\lambda h_3] u_p e^{-\mathrm{i}q\cdot x},$$

式中 p_λ 和 n_λ 代表始态 p 和末态 n 的 4 动量,u_p 和 u_n 则分别是它们的狄拉克 c 数旋量,

$$q_\lambda = (n-p)_\lambda,$$

γ_λ 是由(3.11)给出的狄拉克矩阵,f_i, $h_i (i = 1, 2, 3)$ 则是 6 个 q^2 的复函数.

(b) 如果电荷对称条件(21.26)成立,则 f_1, f_2, h_1, h_2 是实的,而 f_3 和 h_3 是虚的.

(c) 如果 T 不变性成立,则所有 f_i, h_i 六个函数都是实的.

(d) 如果只存在第一类流(即(21.32)成立,或者等价地说对称条件(21.29)成立),则 $f_3 = h_3 = 0$,但 f_1, f_2, h_1 和 h_2 可以仍是复的.

(e) 如果 T 不变和电荷对称条件都成立,则 f_1, f_2, h_1 和 h_2 都是实函数,而 $f_3 = h_3 = 0$. 当然这种情况下只存在第一类流.

(f) 如果 CVC(21.33)成立,则 $f_3 = 0$,但 f_1 和 f_2 可以仍是复的(如果我们略去 n 和 p 的质量差).

(g) 如果同位旋三重态的矢量流假设成立,则 $f_3 = 0$,而 f_1 和 f_2 都是实的;而且,它们与核子的电荷形状因子 F_Q 及磁矩形状因子 F_M 有如下关系:

$$f_1 = F_Q + (\mu_p - \mu_n) F_M,$$

$$f_2 = (m_p + m_n)^{-1} (\mu_p - \mu_n) F_M, \tag{21.37}$$

式中 F_Q 和 F_M 都是 q^2 的实函数,并在 $q^2 = 0$ 时归一到 1,还有

$$\mu_p \cong 1.79,\ \mu_n = -1.90 \tag{21.38}$$

代表 p 和 n 的反常磁矩.

(h) 普遍情况下,(21.36)也可以写为:

$$\langle n \mid V_\lambda(x) \mid p\rangle = \mathrm{i}u_n^\dagger\gamma_4[\gamma_\lambda g_V + q_\mu\sigma_{\mu\lambda}g_M + \mathrm{i}q_\lambda g_S]u_p e^{-\mathrm{i}q\cdot x} \tag{21.39}$$

和

$$\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p\rangle = \mathrm{i}u_n^\dagger\gamma_4\gamma_5[\gamma_\lambda g_A + \mathrm{i}q_\lambda g_P + \mathrm{i}(n+p)_\lambda g_E]u_p e^{-\mathrm{i}q\cdot x}$$

这里 $\sigma_{\mu\nu}$ 由(14.15)给出,

$$g_V + (m_n + m_p)g_M = f_1,\ g_M = f_2,\ g_S = f_3,$$
$$g_A = h_1,\ g_P = h_2\ \text{以及}\ g_E = h_3. \tag{21.40}$$

4. **实验验证** 有几组实验验证了矢量流的同位旋三重态的假定,因而也同时验证了 CVC(21.33).历史上看,这些实验最先将电磁观测量与弱作用观测量联系起来作定量检验,因而成为我们寻求统一理论的重要推动力.

(i) π 介子 β 衰变

根据同位旋三重态的矢量流假设,下面两过程的矩阵元

$$\pi^\pm \to \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$$

和

$$\pi^\pm \to \pi^\pm + \gamma$$

是互相有关的.在 π 介子 β 衰变中略去对 4 动量传递的依赖是很好的近似,因此,相应的振幅也就完全确定了.理论上的分支比是

$$b_{\text{理}} = \frac{\text{衰变率}(\pi^\pm \to \pi^0 e^\pm \nu)}{\text{衰变率}(\pi^\pm \to \mu^\pm \nu)} = 1.07\times 10^{-8}, \tag{21.41}$$

与实验值*

---

* Bacastow R, Elioff T, Larsen R, Wiegand C, Ypsilantis T. *Phys Rev Lett*, 1962, **9**:400; DePommier P, Heintze J, Rubbia C, Soergel V. *Phys Lett*, 1963, **5**: 61; Dunaitsev A F, Petrukhin V I, Prokoshkin Yu D, Rykalin V I. Proceedings of the International Conference on the Fundamental Aspects of Weak Interactions, 1963.

$$b_{实验} = (1.02 \pm 0.07) \times 10^{-8}$$

符合很好.

(ii) B^{12}与N^{12}的β衰变

另一个灵敏的检验是B^{12}和N^{12}的$\beta^{\pm}$谱. 如图21.6所示,B^{12}, N^{12}和C^{12}的激发态C^{12*}组成同位旋三重态,其自旋-宇称是1+. 这三个态到C^{12}基态的跃迁提供了比较$\beta^{\mp}$及γ矩阵元的极好的机会.

对于这种1+→0+跃迁,4动量传递$q_\lambda = 0$时,$\beta^{\mp}$衰变的振幅只由轴矢流贡献,然而在q_λ的一次方量级内,矢量流也有贡献. 假定同位旋三重态的矢量流和时间反演不变后,可令(21.39)中$g_S = 0$,即不存在第二类流. 因此,V_λ的矩阵元可写为:

$$\langle n \mid V_\lambda(x) \mid p \rangle = \mathrm{i} u_n^\dagger \gamma_4 (\gamma_\lambda g_V + q_\mu \sigma_{\mu\lambda} g_M) u_p.$$

根据(21.37)和(21.40),当$q_\lambda \to 0$时,有

$$g_M = (m_p + m_n)^{-1}(\mu_p - \mu_n)$$

由于p和n有(21.38)所给出的反常磁矩,此项就贡献出一个反常大的因子. 因此,在这一跃迁中与q_λ有关的项中主要起作用的项是$q_\mu \sigma_{\mu\nu} g_M$.

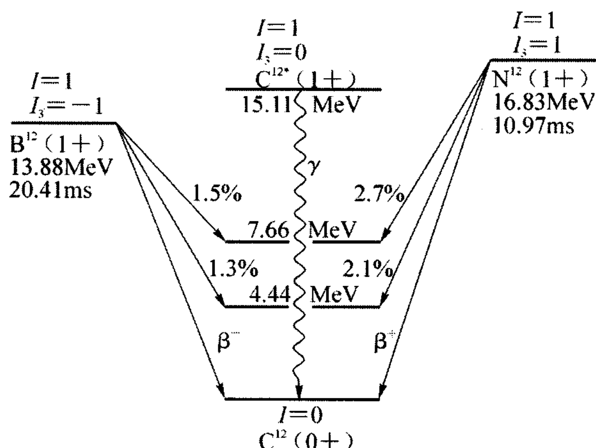


图21.6 A = 12的能级衰变图

我们可以将$\beta^{\mp}$谱形写成一常数乘以下面的项:

$$1+a_{\mp}E,$$

这里 E 是在实验室系中的 β 粒子能量. 同位旋三重态矢量流的假定给出

$$a_{\mp}\cong\pm\frac{8}{3}\frac{\mu_{\mathrm{p}}-\mu_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{n}}}\left|\frac{G_{\mathrm{V}}}{G_{\mathrm{A}}}\right|,\tag{21.42}$$

式中 G_{V} 和 G_{A} 是通常的矢量和轴矢 β 衰变常量. [见下面(21.45)—(21.46).]利用(21.42)和实验值 $G_{\mathrm{A}}/G_{\mathrm{V}}\cong-1.25$,我们得到

$$(a_{-}-a_{+})_{理}\cong 0.84\%(\mathrm{MeV})^{-1},$$

而这与实验观测值*

$$(a_{-}-a_{+})_{实}=0.86\pm0.24\%(\mathrm{MeV})^{-1}$$

符合得很好. 而且,作为一个推论,这一符合的结果也支持第二类流不存在的结论.

5. **β 衰变中的费米常量** 原子核 β 衰变的拉氏量 $\mathscr{L}_{\beta}$ 可以从(21.13)中抽出:

$$\mathscr{L}_{\beta}\equiv\frac{G}{\sqrt{2}}(J_{\lambda}^{+}j_{\lambda}^{-}+J_{\lambda}^{-}j_{\lambda}^{+})\tag{21.43}$$

这里 $j_{\lambda}^{\pm}$ 中只包含轻子流(21.3)中 $l=\mathrm{e}$ 的部分,$J_{\lambda}^{\pm}$ 则只有强子流(21.18)中 $\Delta S=0$ 的部分. 和前面一样,我们可以简单地将 $J_{\lambda}^{\pm}$ 写成

$$J_{\lambda}^{\pm}=V_{\lambda}^{\pm}+A_{\lambda}^{\pm},$$

即略去 $\Delta S=0$ 的下标. 因为轻子流 $j_{\lambda}^{\pm}$ 是一直接的实验观测量,所以强子部分可以测量的是乘积 $GV_{\lambda}^{\pm}$ 和 $GA_{\lambda}^{\pm}$. 没有第二类流时,(21.39)就变为

$$\langle n\mid V_{\lambda}\mid p\rangle=\mathrm{i}u_{\mathrm{n}}^{\dagger}\gamma_{4}(\gamma_{\lambda}g_{\mathrm{V}}+q_{\mu}\sigma_{\mu\lambda}g_{\mathrm{M}})\mu_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x},\tag{21.44}$$

而

$$\langle n\mid A_{\lambda}\mid p\rangle=\mathrm{i}u_{\mathrm{n}}^{\dagger}\gamma_{4}(\gamma_{\lambda}g_{\mathrm{A}}+\mathrm{i}q_{\lambda}g_{\mathrm{P}})\gamma_{5}u_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}.$$

当 4 动量传递 $q_{\lambda}=0$ 时,矢量流(费米)和轴矢流(伽莫夫-特勒(Gamow-Teller))的耦合常数 G_{V} 和 G_{A} 按传统是这样定义的:

---

* Wu C S, Lee Y K, Mo L W. *Phys Rev Lett*, 1977, **39**:72.

$$G_V \equiv G \cdot \lim_{q=0} g_V(q^2)$$

同时

$$G_A \equiv -G \cdot \lim_{q=0} g_A(q^2). \tag{21.45}$$

现在有关这两者之比的实验值是

$$\frac{G_A}{G_V} = -1.253 \pm 0.007. \tag{21.46}$$

历史上在对 β 衰变振幅早期的分析中没有考虑二分量中微子理论和宇称不守恒;(21.43)中的因子 $1/\sqrt{2}$,以及(21.45)—(21.46)中的负号正是这一过去时期的痕迹.[见习题 21.4 中的(21.136)]

在下节中我们将会看到,卡比博理论要求

$$\lim_{q=0} g_V(q^2) = \cos\theta_c, \tag{21.47}$$

式中 θ_c 即(21.25)所给的同样的角.又由于根据(21.7) $G = G_\mu$,我们就得到

$$G_V = G_\mu \cos\theta_c. \tag{21.48}$$

从实验上看,G_μ 由 μ 衰变可以定出,G_V 则可由原子核 β 衰变定出.逻辑上最简单是将(21.48)看成是 $\cos\theta_c$ 的定义.要指出的是:在 4 动量传递为零的极限下,由(21.34)式同位旋三重态矢量流的归一条件,也给出同样的定义.卡比博理论要求同样的 θ_c 也可从比较 π_{l2} 和 K_{l2} 的衰变率,或者是原子核和超子的 β 衰变率而得到.[然而,正如我们将在 21.10 节中看出,由于最近发现了 b 夸克,卡比博理论在这一点上很可能要作某些修正.]

为了从(21.48)中精确地定出 θ_c 来,有必要研究一下辐射修正的问题.

首先,我们看到,核子有强作用,而 μ 子却没有.利用高斯定理,并对(21.33)积分,则从 CVC 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int V_4^{\pm}\,\mathrm{d}^3 r = -\mathrm{i}\int \nabla_i V_i^{\pm}\,\mathrm{d}^3 r = 0$$

这里表面项消失的原因是因为不存在零质量的强子*.如果我们设想强

* 在 QED 中因为光子质量为零,所以尽管电磁流守恒,电荷的重正化十分重要,这里矢量流的"荷"G_V 却不被重正化.

作用是很缓慢地加进来的，则空间积分 $\int V_4 \mathrm{d}^3 r$，因而也就是 G_V，必须是不变的. 所以强作用不影响(21.48).

其次，让我们来研究一下电磁作用的影响*. 令 $(G_V)_{\mathrm{uncor}}$ 代表 β 衰变中未经辐射修正的矢量耦合常数. 从不同的 β 衰变 ft 值(特别从 Al^{26} 的*)我们得到

$$(G_V)_{\mathrm{uncor}} = (1.42233 \pm 0.0005) \times 10^{-49}\ \mathrm{erg\ cm}^3. \qquad (21.49)$$

在将 n 和 p 都用定域场算符来描写的近似下，点状 4 费米子 β 衰变的相互作用含有发散的辐射修正，其结果是

$$(G_V)_{\mathrm{cor}} = (G_V)_{\mathrm{uncor}}\left[1 - \frac{\alpha}{4\pi}\left(6\ln\frac{\lambda}{m_p} + 3\ln\frac{m_p}{2E_m} + \frac{207}{20} - \frac{4\pi^2}{3}\right)\right]$$

式中 E_m 是 β 粒子最大能量，λ 是紫外截断参数. 但是，如果弱相互作用是由中间玻色子传递时，辐射修正就是有限的. 正如瑟林(Sirlin)所证明，在一特殊的规范模型中，$\lambda = m_Z$，即中性中间玻色子的质量，考虑了相应的 G_V 和 G_μ 的辐射修正后，从(21.48)可得到修正后的 θ_c 值来：

$$\cos\theta_c = 0.974 \pm 0.002 \qquad (21.50)$$

这一数值，在卡比博理论所要求的 SU_3 对应的范围内，从(21.25)可以看出，与从 K_{l2} 及 π_{l2} 中得出的结果符合得相当好.

为看清辐射修正的重要，我们注意在没有辐射修正前，利用(21.6)，(21.48)和(21.49)，得到的是

$$(\sin\theta_c)_{\mathrm{uncor}} \cong 0.12,$$

这与上面经过修正的值

$$\sin\theta_c = 0.228 \pm 0.01$$

相差是很显著的.

---

* Sirlin A. *Nucl Phys*, 1974, **B71**:21 and 1975, **B100**:291, *Revs Mod Phys*, 1978, **50**:573，及私人通信.

21.5 卡比博理论(包括 GIM 修正)

最初的卡比博理论*,只涉及由 u, d 和 s 夸克组成的强子的弱相互作用.经格拉肖(Glashow),依里奥波罗斯(Iliopoulos)及迈央尼(Maiani)**修改后,它才扩充到包括 c 夸克.假定在半轻子拉格朗日量(21.13)中带电强子的弱流算符 $J_\lambda^\pm$ 有以下形式:

$$\begin{aligned} J_\lambda^+ &= \mathrm{i}\psi_\mathrm{u}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)(\cos\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{d}+\sin\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{s}) \\ &\quad + \mathrm{i}\psi_\mathrm{c}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)(-\sin\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{d}+\cos\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{s}) \end{aligned} \qquad (21.51)$$

以及

$$\begin{aligned} J_\lambda^- &= \mathrm{i}(\cos\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{d}^\dagger+\sin\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{s}^\dagger)\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mathrm{u} \\ &\quad + \mathrm{i}(-\sin\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{d}^\dagger+\cos\theta_\mathrm{c}\psi_\mathrm{s}^\dagger)\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mathrm{c}, \end{aligned}$$

式中 θ_c 是卡比博角.算符 ψ_u, ψ_d, ψ_s, ψ_c 代表相应的夸克场 ψ_f^i(f = 味道,i = 颜色 = 1, 2, 3),但颜色指标 i 这里省略了,所以对任何狄拉克矩阵 Γ 有

$$\psi_\mathrm{u}^\dagger\Gamma\psi_\mathrm{d} \equiv \psi_\mathrm{u}^{i\dagger}\Gamma\psi_\mathrm{d}^i,\ \psi_\mathrm{s}^\dagger\Gamma\psi_\mathrm{c} \equiv \psi_\mathrm{s}^{i\dagger}\Gamma\psi_\mathrm{c}^i, \qquad (21.52)$$

等等,式中按常规,重复的 i 指标代表已求和掉.相应的电磁流算符(在以 e 为 1 的单位中)是

$$\begin{aligned} J_\lambda^\mathrm{el} &= \mathrm{i}\,\frac{2}{3}(\psi_\mathrm{u}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_\mathrm{u}+\psi_\mathrm{c}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_\mathrm{c}) \\ &\quad - \mathrm{i}\,\frac{1}{3}(\psi_\mathrm{d}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_\mathrm{d}+\psi_\mathrm{s}^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_\mathrm{s}). \end{aligned} \qquad (21.53)$$

[在 21.10 节中将讨论如何将 b 夸克包括进来.]

1. *原子核 β 衰变* 相应的矢量及轴矢量流算符是

---

* Cabibbo N. *Phys Lett*, 1963, **10**:513.

** Glashow S L, Itiopoulos J, Maiani L. *Phys Rev*, 1970, **D2**:1258.历史上正是这篇文章,在实验真正发现前好几年,从理论上充分地论证了为什么应该存在 c 夸克强子.见 22.3 节.

$$V_\lambda^+ \equiv \mathrm{i}\cos\theta_c\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_d,$$

$$A_\lambda^+ \equiv \mathrm{i}\cos\theta_c\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5\psi_d \tag{21.54}$$

以及它们的厄米共轭算符.相应的电磁流算符可以分拆成同位旋矢量部分

$$(J_\lambda^{el})_{I=1} = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_u - \psi_d^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_d) \tag{21.55}$$

和同位旋标量部分

$$(J_\lambda^{el})_{I=0} = \mathrm{i}\,\frac{1}{6}(\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_u + \psi_d^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_d)$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{2}{3}\psi_c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_c - \mathrm{i}\,\frac{1}{3}\psi_s^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_s, \tag{21.56}$$

所以它们的和是

$$J_\lambda^{el} = (J_\lambda^{el})_{I=1} + (J_\lambda^{el})_{I=0}.$$

利用(21.51),我们看出半轻子拉氏量 $\mathscr{L}_{半轻}$(21.13)满足 T 不变.假定强作用有同位旋不变性,则由(21.54)给出的 $V_\lambda^\pm$ 和 $A_\lambda^\pm$ 满足电荷对称,$|\Delta \boldsymbol{I}|=1$ 定则以及第二类流不存在的条件.除此以外,同位旋对称还意味着 u 夸克和 d 夸克应具有相同的质量;因此,V_λ 满足 CVC 以及同位旋三重态流的假设.

2. **π_{l2} 和 K_{l2} 衰变** 相应的流算符对 π_{l2}^- 衰变是

$$\mathrm{i}\cos\theta_c\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5\psi_d, \tag{21.57}$$

而对 K_{l2}^- 衰变则是

$$\mathrm{i}\sin\theta_c\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5\psi_s. \tag{21.58}$$

这样,在 SU_3 对称的假定下,θ_c 角就将 π_{l2} 和 K_{l2} 衰变率联系起来,从而得到(21.25).

3. **奇异数不守恒流** 从(21.51),我们看到 $\Delta S \neq 0$ 的强子流是

$$\mathrm{i}(\sin\theta_c\psi_u^\dagger + \cos\theta_c\psi_c^\dagger)\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_s \tag{21.59}$$

及它的厄米共轭.现在 s 夸克的奇异数 $S=-1$,电荷 $Q=-\frac{1}{3}$,而 u 和 c 夸克的 S 都为 0,$Q=\frac{2}{3}$.所以上面的流,因而也即 $\mathscr{L}_{半轻}$,满足

$$|\Delta S|<2$$

和

$$\Delta Q=\Delta S. \tag{21.60}$$

在(21.59)中引起超子β衰变的部分是

$$\mathrm{i}\sin\theta_c\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_s.$$

又因为s夸克的同位旋 $I=0$，u夸克 $I=\dfrac{1}{2}$，所以超子β衰变，及相应的 $\mathscr{L}_{\text{半轻}}$，满足

$$|\Delta \boldsymbol{I}|=\frac{1}{2}. \tag{21.61}$$

在前面关于对称性破坏的章节(21.60)和(21.61)中都讨论过. [见11.4节、15.6节.]

4. **重子八重态的β衰变** 相应的流是

$$\begin{aligned} g_\lambda^+(x) &\equiv \mathrm{i}\psi_u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)(\cos\theta_c\psi_d+\sin\theta_c\psi_s) \\ &\equiv \cos\theta_c[V_\lambda(x)_2^1+A_\lambda(x)_2^1]+\sin\theta_c[V_\lambda(x)_3^1 \\ &\quad +A_\lambda(x)_3^1] \end{aligned} \tag{21.62}$$

及其厄米共轭. 用习题12.2中 SU_3 张量的符号，我们看到

$$\begin{aligned} V_\lambda(x)_2^1 &= \mathrm{i}\psi_u(x)^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_d(x), \\ A_\lambda(x)_2^1 &= \mathrm{i}\psi_u(x)^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5\psi_d(x), \\ V_\lambda(x)_3^1 &= \mathrm{i}\psi_u(x)^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_s(x), \\ A_\lambda(x)_3^1 &= \mathrm{i}\psi_u(x)^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5\psi_s(x) \end{aligned} \tag{21.63}$$

都是八重态矢量流和八重态轴矢流各分量的算符. 根据(21.55)，电磁流的同位旋矢量部分和八重态的关系是

$$(J_\lambda^{\mathrm{el}}(x))_{I=1}=\frac{1}{2}[V_\lambda(x)_1^1-V_\lambda(x)_2^2]. \tag{21.64}$$

正如在(12.87)中一样，让我们讨论传递4动量 $q\to 0$ 的极限情况. 和(12.86)类似，我们可以写出

$$\lim_{q\to 0}\langle B_a^i \mid V_\lambda(x)_b^j \mid B_c^k\rangle = \mathrm{i}(D'd_{abc}^{ijk} + F'f_{abc}^{ijk})u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda u \quad (21.65)$$

$$\lim_{q\to 0}\langle B_a^i \mid A_\lambda(x)_b^j \mid B_c^k\rangle = \mathrm{i}(Dd_{abc}^{ijk} + Ff_{abc}^{ijk})u'^{\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5 u$$

这里 u 和 u' 分别是始末态 c 数狄拉克旋量，d_{abc}^{ijk} 和 f_{abc}^{ijk} 由(12.82)—(12.83)给出，D, F, D', F' 都是常数. 根据定义，在 $q=0$ 时，$(J_\lambda)_{I=1}^{\mathrm{el}}$ 的对角元素正比于状态电荷的同位旋矢量部分. 这样，例如就有

$$\lim_{q\to 0}\frac{\langle \mathrm{p} \mid (J_\lambda^{\mathrm{el}})_{I=1} \mid \mathrm{p}\rangle}{\langle \Xi^- \mid (J_\lambda^{\mathrm{el}})_{I=1} \mid \Xi^-\rangle} = -1. \quad (21.66)$$

根据(12.48)，

$$\mid \mathrm{p}\rangle = \mid B_3^1\rangle,\ \langle \mathrm{p}\mid = \langle B_1^3 \mid,$$
$$\mid \Xi^-\rangle = \mid B_1^3\rangle \text{ 和 } \langle \Xi^- \mid = \langle B_3^1 \mid.$$

利用(21.64)—(21.65)，我们发现(21.66)可写成

$$\frac{D'(d_{113}^{311} - d_{123}^{321}) + F'(f_{113}^{311} - f_{123}^{321})}{D'(d_{311}^{113} - d_{321}^{123}) + F'(f_{311}^{113} - f_{321}^{123})} = -1$$

而又因为(12.82)—(12.83)，就成为

$$\frac{D' - F'}{D' + F'} = -1.$$

这样就得到

$$D' = 0. \quad (21.67)$$

同样，考虑到对角元素有

$$\lim_{q=0}\langle \mathrm{p} \mid (J_\lambda^{\mathrm{el}})_{I=1} \mid \mathrm{p}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{i}u\gamma_4\gamma_\lambda u,$$

就得到

$$F' = -1. \quad (21.68)$$

考虑下面的 β 衰变振幅：

$$B' \to B + \mathrm{e}^{\mp} + \bar{\nu}_\mathrm{e}(\nu_\mathrm{e}).$$

当 4 动量传递 $q\to 0$ 时，我们可以写出

$$\lim_{q\to 0}\langle B' \mid g_\lambda^{\mp} \mid B\rangle \equiv \mathrm{i}u'^{\dagger}\gamma_4 M u \quad (21.69)$$

此处M是一依赖于B, B'和指标λ的4×4矩阵. 利用(21.62)—(21.68)和习题12.2的结果, M可以用θ_c和两常数D和F来表示. 结果列在下面的表中.

表21.1 由(21.69)定义的M矩阵表

反　应	M
$n\to pe^-\bar\nu_e$	$\cos\theta_c[\gamma_\lambda^+ + (D-F)\gamma_\lambda\gamma_5]$
$\Sigma^-\to\Lambda^0e^-\bar\nu_e$	$\cos\theta_c\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}D\gamma_\lambda\gamma_5\right]$
$\Sigma^+\to\Lambda^0e^+\nu_e$	$\cos\theta_c\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}D\gamma_\lambda\gamma_5\right]$
$\Sigma^-\to\Sigma^0e^-\bar\nu_e$	$\cos\theta_c[\sqrt{2}\gamma_\lambda-\sqrt{2}F\gamma_\lambda\gamma_5]$
$\Xi^-\to\Xi^0e^-\bar\nu_e$	$\cos\theta_c[-\gamma_\lambda+(D+F)\gamma_\lambda\gamma_5]$
$\Lambda_0\to pe^-\bar\nu_e$	$\sin\theta_c\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_\lambda+\sqrt{\frac{1}{6}}(D-3F)\gamma_\lambda\gamma_5\right]$
$\Sigma^-\to ne^-\bar\nu_e$	$\sin\theta_c[-\gamma_\lambda+(D+F)\gamma_\lambda\gamma_5]$
$\Xi^-\to\Lambda^0e^-\bar\nu_e$	$\sin\theta_c\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_\lambda+\sqrt{\frac{1}{6}}(D+3F)\gamma_\lambda\gamma_5\right]$
$\Xi^-\to\Sigma^0e^-\bar\nu_e$	$\sin\theta_c\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_\lambda+\sqrt{\frac{1}{2}}(D-F)\gamma_\lambda\gamma_5\right]$
$\Xi^0\to\Sigma^+e^-\bar\nu_e$	$\sin\theta_c[\gamma_\lambda+(D-F)\gamma_\lambda\gamma_5]$

比较一下这些理论的表达式与列在附录中的有关原子核及各种超子β衰变的实验结果,我们发现

$$D\cong0.82,\ F\cong-0.43 \tag{21.70}$$

以及

$$\sin\theta_c=0.219\pm0.011.$$

最后这一个等式与(21.50)符合极好. [见(21.133)因b夸克流而引起的修正.]

历史上,关于强作用用的SU_3味对称的许多实验证明,都来自卡比博理论对这些弱衰变成功的描述.

5. **D介子的轻子衰变** D^0和D^+是$c\bar u$和$c\bar d$的组合体,而$\bar D^0$及D^-则是它们的共轭态. D介子的轻子衰变可通过下列过程发生

$$c\to d+l^++\nu_l$$

或
$$c \to s + l^{+} + \nu_{l}$$

相应的衰变率比 $\cong \tan^{2}\theta_{c} \cong 5\%$，又因为 K^{-} 和$\overline{K}^{0}$ 是 $s\bar{u}$及 $s\bar{d}$组成，我们可以预期

$$\frac{(D \to l^{+} + \nu_{l} + \overline{K} + \cdots)}{(D \to l^{+} + \nu_{l} + \cdots)} \cong 95\%, \qquad (21.71)$$

这里…代表任何粒子，D 代表 D^{+} 或 D^{0}，$\overline{K}$代表 K^{-} 与$\overline{K}^{0}$. 在目前，要检验这一预测，D 介子轻子衰变的事例还太少.

21.6 高能中微子反应

1. *运动学* 考虑一高能中微子(或反中微子)与核子 N 的碰撞：

$$\nu + N \to l + h \qquad (21.72)$$

这里初始的 ν 代表 ν_{l} 或 $\bar{\nu}_{l}$($l = e, \mu$ 或 τ)，末态 l 可以是任何中性或带电的轻子，h 代表任何强子或强子的组合体. 让我们取图 21.7 中所用的符号：

$$\begin{gathered} k = \nu(\text{或 } \bar{\nu}) \text{ 的 4 动量}, k' = l \text{ 的 4 动量}, \\ p = N \text{ 的 4 动量}, p' = h \text{ 的 4 动量}, \\ s_{N}, s_{h}, s_{l} = N, h \text{ 和 } l \text{ 的螺旋度}. \end{gathered} \qquad (21.73)$$

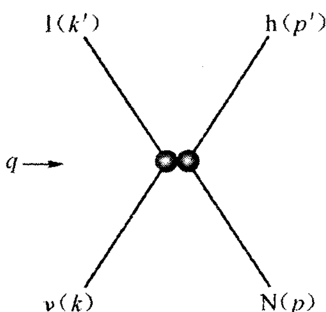


图 21.7 ν + N → l + h 的最低级费恩曼图
拉氏密度由(21.13) 给出.

轻子和强子间的 4 动量传递是

$$q \equiv k - k' = p' - p.$$

在本节中我们将假定初态核子是没有极化的，同时末态的极化则是全部求和掉. 此外，我们还令

$$\text{轻子质量} = 0,$$

并用 M 代表 h 的质量，m_N 是核子质量. 用四个始末态动量的乘积我们可以选出六个标量来，其中的四个是始末态的质量

$$k^2 = 0,\ k'^2 = 0,\ p^2 = -m_N^2,\ p'^2 = -M^2. \tag{21.74}$$

另外两个不变量可取成

$$x \equiv -\frac{q^2}{2p \cdot q} \text{ 以及 } y \equiv \frac{q \cdot p}{k \cdot p}. \tag{21.75}$$

对 $p + q = p'$ 取平方，就得到

$$2p \cdot q + q^2 = -M^2 + m_N^2,$$

因此有

$$x = \frac{q^2}{q^2 + M^2 - m_N^2}. \tag{21.76}$$

如果末态的 h 是单个强子，则 M 是一定的；但如果它是连续态的某一特定道，像 pπ, $n\pi K$，等等，则 M 就是一连续可变量. 有时，将末态一切可能的强子道都求和掉可能更令人有兴趣，这样的反应称为“单举”反应. 于是(21.72)就可写成

$$\nu + \text{N} \to l + \cdots.$$

下面，我们将 M 当作一变量. 这样的问题的运动学就完全依赖于三个独立变量，例如可以取 M, x 和 y，或者取

$$k \cdot p,\ q^2 \text{ 和 } x, \tag{21.77}$$

也可以取其他等价的变量.

在实验室坐标系中初态核子 N 是静止的. (21.73)中各 4 动量的分量则是

$$k = (\boldsymbol{k}_\nu,\ \mathrm{i}E_\nu),\ k' = (\boldsymbol{k}_l,\ \mathrm{i}E_l),$$

$$p=(0,\ \mathrm{i}m_{\mathrm{N}}),\ p'=(\boldsymbol{p},\ \mathrm{i}E_{\mathrm{h}})$$
$$q=(\boldsymbol{q},\ \mathrm{i}q_0). \tag{21.78}$$

因为 $p'=p+q$,我们就有

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q},\text{及 } E_{\mathrm{h}}=m_{\mathrm{N}}+q_0. \tag{21.79}$$

又因为 $k\cdot p=-m_{\mathrm{N}}E_\nu$, (21.77)中三个独立变量就可以写成

$$E_\nu,\ q^2 \text{ 和 } x. \tag{21.80}$$

其他的运动学变量可以很容易地用这三个变量来表示,例如:

$$M^2=m_{\mathrm{N}}^2+q^2(x^{-1}-1),\ y=\frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}E_\nu x},$$
$$E_l=E_\nu-\frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}x},\ q_0=\frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}x},$$
$$s\equiv-(k+p)^2=m_{\mathrm{N}}^2+2m_{\mathrm{N}}E_\nu, \tag{21.81}$$
$$p\equiv|\boldsymbol{p}|=\left[q^2+\left(\frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

以及

$$\cos\theta=1-\frac{q^2}{2E_\nu^2}\left(1-\frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}xE_\nu}\right)^{-1}$$

这里 $\theta=\angle(\boldsymbol{k}_\nu,\ \boldsymbol{k}_l)$. 从 $q^2=(k-k')^2=2E_\nu E_l(1-\cos\theta)$ 可以看出

$$q^2\geqslant 0;$$

就是说,4 动量传递是类空的. 利用(21.76)并考虑到末态强子质量 $M\geqslant m_{\mathrm{N}}$, 我们又得到

$$0\leqslant x\leqslant 1 \tag{21.82}$$

式中当 $M=m_{\mathrm{N}}$ 时

$$x=1 \tag{21.83}$$

变量 $y=q\cdot p/k\cdot p$ 也可以写成

$$y=\frac{q_0}{E_\nu}=\frac{E_{\mathrm{h}}-m_{\mathrm{N}}}{E_\nu} \tag{21.84}$$

这个量代表在实验室系中,入射中微子能量中转移到强子上去的那部分

份额.因此,y 只能在

$$0 \leqslant y \leqslant 1 \tag{21.85}$$

的范围内.

练习.

(i) 证明在给定 E_ν 后,q^2 的范围是

$$0 \leqslant q^2 \leqslant \frac{(2m_{\mathrm{N}}E_\nu)^2}{s} \tag{21.86}$$

这里 s 是(质心能量)$^2 = m_{\mathrm{N}}^2 + 2m_{\mathrm{N}}E_\nu$.

(ii) 给定 E_ν 和 q^2 后,证明

$$M^2 \leqslant M_0^2 \equiv s\left(1 - \frac{q^2}{2m_{\mathrm{N}}E_\nu}\right), \tag{21.87}$$

因此 x 将在以下范围内:

$$\frac{q^2}{q^2 + M_0^2 - m_{\mathrm{N}}^2} \leqslant x \leqslant 1.$$

2. **结构函数** 半轻子拉氏量(21.13)是许多项之和,其中每一项都是"流×流"的形式.由于中微子的二分量理论,中微子反应中不管末态 l 是中性或是带电,轻子流总能写成

$$\mathrm{i}\psi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5)\psi_{\nu_l},$$

或其共轭形式.反应(21.72)的微分截面 $\mathrm{d}^2\sigma$ 依赖于三个变量,例如(21.80)给出的 E_ν, q^2 和 x.轻子流算符的矩阵元是很容易计算的.这就使我们,如将要看到的那样,能将 $\mathrm{d}^2\sigma$ 对 E_ν 的明显的依赖关系抽出来.然后我们又可以不管末态强子是什么,而将 $\mathrm{d}^2\sigma$ 用三个只与剩下的另外两变量 q^2 和 x 有关的函数来表示.这些函数称结构函数*.

为导出这些函数,我们先来考虑 M 是固定的某一给定的末态强子 h 道.[以后,我们允许 M 可变.]然后,定义

$$L_{\alpha\beta} \equiv \pm \sum_{s_l} \langle l \mid j_\alpha \mid \nu\rangle \langle l \mid j_\beta \mid \nu\rangle^* \tag{21.88}$$

---

* Lee T D, Yang C N. *Phys Rev Lett*, 1960, **4**:307; *Phys Rev*, 1962, **126**:2239.

及

$$H_{\alpha\beta} \equiv \pm \sum_{s_N, s_h} \langle h \mid J_\alpha \mid N \rangle \langle h \mid J_\beta \mid N \rangle^*$$

这里 j_α 和 J_α 分别代表相应的轻子和强子流，s_N，s_h，s_l 是在(21.73)中定义的螺旋度. (21.88)中±号的出现与我们沿用的度规约定 $x_\mu = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}t)$ 有关；＋号对应 $\beta \neq 4$，－号对应 $\beta = 4$，这样在洛伦兹变换下

$$\pm \langle l \mid j_\beta \mid \nu \rangle^* \quad 及 \quad \pm \langle h \mid J_\beta \mid N \rangle^*$$

与

$$\langle l \mid j_\beta \mid \nu \rangle \quad 及 \quad \langle h \mid J_\beta \mid N \rangle$$

同样变换.

习题 5.3 中，取 $C_V = C_A = 1$，$m_a = m_b = 0$，并用 k'_μ，k'_λ 代替 a_μ，b_λ，这样在轻子质量为零的极限情况下，当始态中微子是 ν_l 时，我们得到 $L_{\alpha\beta}$ 是

$$L_{\alpha\beta}(\nu_l) = \frac{2}{E_\nu E_l} \cdot (k'_\alpha k_\beta + k_\alpha k'_\beta - \delta_{\alpha\beta} k \cdot k' + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_\mu k'_\nu), \tag{21.89}$$

而当始态中微子是 $\bar{\nu}_l$ 时，$L_{\alpha\beta}$ 是

$$L_{\alpha\beta}(\bar{\nu}_l) = \frac{2}{E_\nu E_l} \cdot (k'_\alpha k_\beta + k_\alpha k'_\beta - \delta_{\alpha\beta} k \cdot k' - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_\mu k'_\nu).$$

从图(21.7)上我们看出，强子部分 $H_{\alpha\beta}$ 因为 $p' = p + q$ 而只依赖于两个独立的 4 动量 p 与 q. 我们可以用 p 和 q 的多项式选出下面的二阶张量来：

$$\delta_{\alpha\beta}, \; p_\alpha p_\beta, \; \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p_\mu q_\nu = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p_\mu p'_\nu \tag{21.90}$$

和

$$p_\alpha q_\beta, \; q_\alpha p_\beta, \; q_\alpha q_\beta.$$

在轻子质量为零的极限下，有轻子流守恒 $\partial j_\alpha / \partial x_\alpha = 0$，所以有

$$q_\alpha L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} q_\beta = 0.$$

因此在(21.90)中的 6 个张量中，只有前 3 个是有用的. 这样我们写出

$$H_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} = \hat{H}_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}$$

以及

$$\hat{H}_{\alpha\beta}=\frac{1}{m_{\mathrm{N}}E_{\mathrm{h}}}\left(m_{\mathrm{N}}^{2}\delta_{\alpha\beta}W_{1}+p_{\alpha}p_{\beta}W_{2}+\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu}'W_{3}\right)\qquad(21.91)$$

式中 W_1, W_2 和 W_3 都是 q^2 和 M 的无量纲标量函数.(21.89)和(21.91)中的因子$(E_\nu E_l)^{-1}$和$(m_N E_h)^{-1}$则是因为我们在(3.30)中所取的归一而来.这样,对于一固定 M 值的强子 h 道,利用(5.107),我们得到

$$\mathrm{d}\sigma=(2\pi)^{2}\int\frac{1}{8\pi^{3}}E_{l}^{2}\mathrm{d}E_{l}\mathrm{d}\cos\theta\left(\frac{G^{2}}{4}\right)L_{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}\delta(E_{\mathrm{h}}+E_{l}-m_{\mathrm{N}}-E_{\nu}),\qquad(21.92)$$

这里$(2\pi)^2$ 则是由(5.107)中的 2π 因子以及

$$\int\mathrm{d}^{3}k_{l}=2\pi\int E_{l}^{2}\mathrm{d}E_{l}\mathrm{d}\cos\theta$$

中的另一 2π 因子而得到的.因子$(G^2/4)$则是由$(G/\sqrt{2})^2$ 乘以始态对核子自旋平均的因子 1/2 而得到的.从(21.84),有

$$y=\frac{(E_\nu-E_l)}{E_\nu}.$$

再利用 $E_h=(E_l^2+E_\nu^2-2E_lE_\nu\cos\theta+M^2)^{\frac{1}{2}}$,可知

$$\mathrm{d}E_{l}\int\mathrm{d}\cos\theta\,\delta(E_{\mathrm{h}}+E_{l}-m_{\mathrm{N}}-E_{\nu})=\frac{E_{\mathrm{h}}}{E_{l}}\mathrm{d}y.\qquad(21.93)$$

然后,利用(21.89)—(21.93),对一固定的末态强子质量 M,我们导出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma=(2\pi q_{0})^{-1}G^{2}m_{\mathrm{N}}E_{\nu}\mathrm{d}y\Big\{&m_{\mathrm{N}}xy^{2}W_{1}\\&+\left[1-y-\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{N}}\frac{xy^{2}}{q_{0}}\right)\right]q_{0}W_{2}\\&\pm xy\left(1-\frac{1}{2}y\right)q_{0}W_{3}\Big\}\end{aligned}\qquad(21.94)$$

这里+号对 ν_l, 一号对 $\bar{\nu}_l$.

其次,我们来考虑对末态强子道已全部求和掉的反应(包括任何给定的强子道的非相干混合态);M 这时是一连续可变量.在给定 E_ν 和 y 后,

从(21.81)就有

$$-\mathrm{d}M^2=\mathrm{d}q^2=(q^2/x)\mathrm{d}x=2m_{\mathrm{N}}q_0\mathrm{d}x.$$

令 J 代表 h 道的总角动量,$\rho(M^2)\mathrm{d}M^2$ 则是其(不变质量)^2 在 M^2 和 $M^2+\mathrm{d}M^2$ 之间的总状态数*. 将(21.94)乘以 $(2J+1)^{-1}\rho(M^2)\times\mathrm{d}M^2$, 我们发现截面可以表示成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma=\frac{m_{\mathrm{N}}E_\nu}{\pi}G^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big[xy^2F_1+\Big(1-y-\frac{m_{\mathrm{N}}}{2q_0}xy^2\Big)F_2\\ \pm xy\Big(1-\frac{1}{2}y\Big)F_3\Big]\end{aligned}\tag{21.95}$$

这里和(21.94)一样,+号对 ν_l,-号对 $\bar{\nu}_l$,用 W_i 表示的结构函数 F_i 则是:

$$F_1(q^2,x)\equiv\sum_h(2J+1)^{-1}m_{\mathrm{N}}^2\rho(M^2)W_1,$$

$$F_2(q^2,x)\equiv\sum_h(2J+1)^{-1}m_{\mathrm{N}}q_0\rho(M^2)W_2\tag{21.96}$$

及

$$F_3(q^2,x)\equiv\sum_h(2J+1)^{-1}m_{\mathrm{N}}q_0\rho(M^2)W_3$$

式中求和遍及 M 相同,但是是不同的末态 h 道的任何非相干混合的状态. 对单举反应,我们又对所有可能的 h 道求和. [见习题 21.2 和 21.3 中对(21.94)—(21.95)的另一种表达形式.]

实验上对这些结构函数作了详细测定. 它们只依赖于两个变量 q^2 和 x 这一事实,有力地支持轻子流的定域性质,即两轻子场

$$\psi_l(\boldsymbol{r},t)\quad 和\quad \psi_{\nu_l}(\boldsymbol{r},t)$$

在轻子流算符 $j_\lambda(\boldsymbol{r},t)$ 中总是在同一时空点上. j_λ 如(21.3)—(21.4)所给,可以是 $j_\lambda=j_\lambda^{\pm}$ 或 j_λ^0. 更进一步讨论将在第 23 章中给出.

* 如果 h 对应质量是 m,自旋为 J 的单个强子,则:

$$\rho(M^2)=(2J+1)\delta(M^2-m^2).$$

21.7 半轻子中性流相互作用

1. $\Delta S=0$ 定则　在半轻子拉格朗日量(21.13)中,中性流部分由

$$\frac{G}{\sqrt{2}}J_\lambda^0 j_\lambda^0 \tag{21.97}$$

给出.我们将要看到有很好的证据说明中性强子流中奇异数 S 守恒;即和带电流 $J^\pm$ 不同,J_λ^0 满足选择定则

$$\Delta S=0.$$

从粒子性质表中我们注意到,对 J_λ^0 的矢量部分,下面的分支比存在上限

$$\frac{\text{衰变率}(K^+\to\pi^+\nu\bar{\nu})}{\text{衰变率}(K^+\to \text{all})}<6\times10^{-7}. \tag{21.98}$$

对于轴矢量部分,我们有

$$\frac{\text{衰变率}(K_L^0\to\mu^+\mu^-)}{\text{衰变率}(K_L^0\to \text{all})}=(9.1\pm1.8)\times10^{-9} \tag{21.99}$$

以及

$$\frac{\text{衰变率}(K_L^0\to e^+e^-)}{\text{衰变率}(K_L^0\to \text{all})}<2\times10^{-9}. \tag{21.100}$$

所有出现在分子上的衰变都因 $\Delta S=0$ 定则而被压低了.如果我们将这些中性流的衰变率与相应的带电流比较一下,则这些实验数值的重要意义就会更清楚:

$$\frac{\text{衰变率}(K^+\to\pi^+\nu\bar{\nu})}{\text{衰变率}(K^+\to\pi^0e^+\nu)}<1.2\times10^{-5}, \tag{21.101}$$

$$\frac{\text{衰变率}(K_L^0\to\mu^+\mu^-)}{\text{衰变率}(K^+\to\mu^+\nu)}=3.4\times10^{-9} \tag{21.102}$$

以及

$$\frac{\text{衰变率}(K_L^0\to e^+e^-)}{\text{衰变率}(K^+\to e^+\nu)}<3\times10^{-5}. \tag{21.103}$$

从 11.3 节 2 的讨论中我们看到，K_L^0 不能通过交换单光子而衰变成一对 μ，即

$$K_L^0 \nrightarrow 虚\ \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-.$$

但是，如图 21.8 所示，

$$K_L^0 \rightarrow 虚\ \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^- \tag{21.104}$$

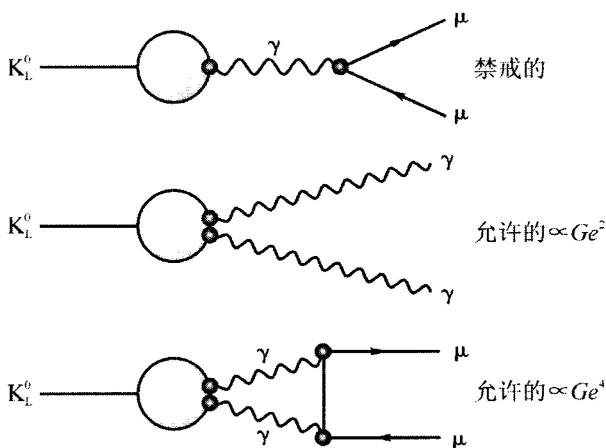


图 21.8 K_L^0 的一些稀有衰变振幅的选择定则

却是允许的. 因此，用精细结构常数 α 表示，我们可估计出

$$\frac{衰变率(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{衰变率(K_L^0 \rightarrow \mathrm{all})} \sim \alpha^4 \sim 10^{-8},$$

这与(21.99)及(21.102)相一致. 而观测到的 K_L^0 的 2γ 衰变率是

$$\frac{衰变率(K_L^0 \rightarrow 2\gamma)}{衰变率(K_L^0 \rightarrow \mathrm{all})} = 4.9 \times 10^{-4}, \tag{21.105}$$

这正是从图 21.8 的研究中所预测的，是 α^2 量级. (21.104)过程中 2γ 的质壳上的中间态将对 $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 的振幅贡献一虚部(即吸收部分)，因此，将有下面的不等式*

---

* Bég M A B. *Phys Rev*, 1963, **132**:426; Pais A, Treiman SB. *Phys Rev*, 1968, **176**:1974.

$$\frac{衰变率(K_L^0 \to \mu^+ \mu^-)}{衰变率(K_L^0 \to 2\gamma)} > \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{v_\mu}\left(\frac{m_\mu}{m_K}\ln\frac{1+v_\mu}{1-v_\mu}\right)^2 \simeq 1.2 \times 10^{-5} \tag{21.106}$$

这里 v_μ 是 K_L^0 静止系中的 μ 粒子速度. 这个极限值与(21. 99)和(21. 105)所给出的分支比是一致的. 如果将(21. 106)中的 μ 粒子质量 m_μ 换成电子质量 m_e,我们就看到过程

$$K_L^0 \to 虚\ \gamma\gamma \to e^+ e^-$$

的分支比会比 $K_L^0 \to \mu^+ \mu^-$ 的分支比小

$$\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \sim 10^{-4}$$

的量级;但这一数值仍比最近的实验上界(21. 100)小很多.

2. **高能中微子反应**　虽然对弱中性流相互作用的实验证实只是在 1973 年通过观测反应*

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + \cdots$$

才得到,但理论的建议却是在更早的时候就已给出了**. 实验发现的这一推迟,部分原因在于将中子背景和真正的中微子事件区分开来十分困难.

中性流的耦合强度可以通过下面的总截面分支比而表示出来:

$$R_\nu \equiv \frac{\sigma(\nu_\mu + N \to \nu_\mu + \cdots)}{\sigma(\nu_\mu + N \to \mu^- + \cdots)} = 0.307 \pm 0.008 \tag{21.107}$$

及

$$R_{\bar\nu} \equiv \frac{\sigma(\bar\nu_\mu + N \to \bar\nu_\mu + \cdots)}{\sigma(\bar\nu_\mu + N \to \mu^+ + \cdots)} = 0.381 \pm 0.025.$$

关于对这些反应的进一步讨论将放在第 23 章中.

3. **极化电子散射**　稍后,又发现在极化电子对氘核的散射

$$e^-\ (极化) + d(非极化) \to e^- + \cdots$$

中,宇称不守恒. 因此,这里一定还存在另一种相互作用,它和在这一过程

---

* Hasert F J, *et al*. *Phys Lett*, 1973, **46B**:121.

** 李政道和杨振宁 *Phys Rev Lett*, 1960, **4**:307; Schwartz M 同前 306.

中占主导地位的，人们熟知的宇称守恒的 QED 不同.

令 $d\sigma_R$ 和 $d\sigma_L$ 分别代表在相同的运动学条件左手和右手的入射 e^- 的微分截面. 如果在半轻子拉氏量(21.13)中中性流相互作用 $J_\mu^0 j_\mu^0$ 破坏宇称守恒，则它们的干涉应引起不对称性.

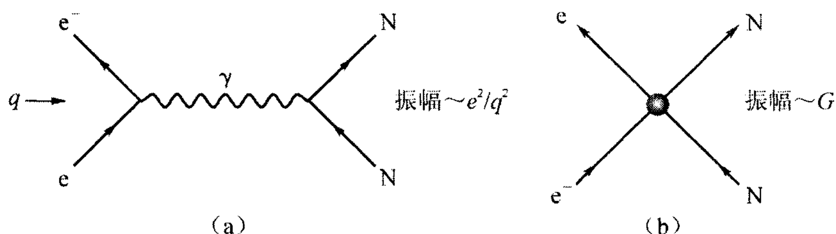


图 21.9 (a) 通过电磁作用，(b) 通过中性流弱作用的 eN 散射的图

$$A \equiv \frac{d\sigma_R - d\sigma_L}{d\sigma_R + d\sigma_L}. \tag{21.108}$$

正如图 21.9 中所示，由于弱相互作用振幅～G，和电磁作用～e^2/q^2，这里 $q^2 = (4\text{ 动量传递})^2$，我们将预期有：

$$A \sim \frac{Gq^2}{e^2} = \frac{Gq^2}{4\pi\alpha} \sim 10^{-4} \cdot q^2/(\mathrm{GeV})^2. \tag{21.109}$$

实验发现*，如果我们将 A 表示为

$$A = \left[a_1 + a_2 \frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right] \cdot q^2/(\mathrm{GeV})^2, \tag{21.110}$$

则

$$a_1 = (-0.97 \pm 0.26) \times 10^{-4}, \tag{21.111}$$

$$a_2 = (0.49 \pm 0.81) \times 10^{-4},$$

而

$$y = \frac{E_{in} - E_f}{E_{in}}$$

其中 E_{in}和 E_f 是实验室中 e^- 的始末态能量. (21.109)的量级估计和实验结果的一致说明在 e 和强子间存在中性弱流的相互作用. 而且，由(21.110)所

* Prescott C Y, *et al*. *Phys Lett*, 1978, **77B**:347; 1979, **84B**:524.

表明的运动学的依赖关系与普遍的理论预测也相符合,这个问题以及关于 J_λ^0 和 j_λ^0 的其他性质将在下一章中再讨论.(见22.3节,特别是习题22.3).

4. ***原子过程的宇称破坏*** 新西伯利亚(Novosibirsk)组* 及伯克利(Berkeley)组**对原子的测量进一步支持了破坏宇称的中性流的存在. 然而,从对实验状况的一些早期的争论看来***,在这一重要领域中进一步的实验检验仍然十分必要.

21.8 无轻子相互作用

根据中间玻色子的假说(而这在下一节中将要讨论到),唯象的无轻子拉格朗日量,在玻色子质量→∞的极限下,通常可写为

$$\mathscr{L}_{\text{无轻}} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left(J_\lambda^+ J_\lambda^- + \frac{1}{2} J_\lambda^0 J_\lambda^0\right) \tag{21.112}$$

这里 $J_\lambda^\pm$ 和 J_λ^0 是和出现在 $\mathscr{L}_{\text{半轻}}$(21.13)中强子流一样的. 正如在前面11.4.2中所讨论的,K, Λ 和其他奇异强子的无轻子衰变满足 $|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}$ 定则. 根据(21.51),$J_\lambda^\pm$ 中 $\Delta S = 0$ 的部分包含一 $|\Delta \boldsymbol{I}| = 1$ 的项,而 $\Delta S \neq 0$ 的部分包含有 $|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}$ 的项,它们的乘积将使同位旋改变为 $|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{3}{2}$,以及 $|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{1}{2}$. 现在不清楚的是:由下面的实验观测值

$$\frac{\text{衰变率}(\mathrm{K}^\pm \to \pi^\pm + \pi^0)}{\text{衰变率}(\mathrm{K}_S^0 \to 2\pi)} = (1.53 \pm 0.07) \times 10^{-3}$$

看出,$|\Delta \boldsymbol{I}| = \frac{3}{2}$ 的流不知为什么却被压低了. 这是在弱相互作用中还留下的几个未解决问题中的一个.

---

* Barkov L M, Zolotoryov MS. *JETP Lett*, 1978, **27**:357.

** Conti R, *et al*. *Phys Rev Lett*, 1979, **42**:343.

*** Baird P E G, *et al*. *Phys Rev Lett*, 1977, **39**:798. Lewis LL, *et al*. *ibid*, 795.

弱相互作用的等效总拉氏量 $\mathscr{L}_{等效}$ 是 $\mathscr{L}_{轻}$，$\mathscr{L}_{半轻}$ 和 $\mathscr{L}_{无轻}$ 的和. 从(21.2)，(21.13)和(21.112)，我们看到

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}\Big[(J_\lambda^+ + j_\lambda^+)(J_\lambda^- + j_\lambda^-) + \frac{1}{2}(J_\lambda^0 + j_\lambda^0)(J_\lambda^0 + j_\lambda^0)\Big]. \tag{21.113}$$

其最低阶的矩阵元就直接给出观测到的反应振幅；高阶矩阵元一般地都是发散的，因此，必须根据有效拉氏量的一般理论观点将其弃去.

21.9 中间玻色子

1. **中间玻色子假设** 还在 β 衰变的早期研究中，弱和电磁相互作用的相似性，就在大部分从事这一领域研究的人的思想中起主导作用. 一开始，最早的费米理论 * 就是根据与二阶电磁作用类比而提出，并由此得到拉氏量的流×流形式. 和电磁情况不同的是：由于观测到弱作用的短程的特点，在费米理论中，拉氏密度中的流都取在同一时空点上. 1940 年代末期，由于发现** 原子核 β 衰变和 μ 俘获以及 μ 衰变具有同一费米耦合常量 G，这两种相互作用的类似性又进一步得到加强. 这就导致了关于中间玻色子的假说***. 所有观察到的弱反应，都可以看作是由发射与吸收一有质量的带电玻色子而引起的二阶过程，这个粒子称为 W(字母 W 代表"弱"的意义). 和 γ 光子一样，在 W-物质的相互作用中存在一普适性，其耦合总是同一无量纲常数. 如果进一步认为这个常数和电子电荷 e 相同，就可以估计出 W 的质量量级应是

$$m_{\text{W}} \sim \sqrt{\frac{G}{2}} \approx 30\ \text{GeV}. \tag{21.114}$$

利用下面我们将会看到的幺正性极限，我们也能得到一个上限****

---

* Fermi E. *Z Physik*, 1934, **88**:161.

** 见 490 页上的引文.

*** Lee T D, Rosenbluth M, Yang C N, *Phys Rev*, 1949, **75**:9905.

**** Lee T D. CERN Report[R]. 1961, 61~30.

$$m_W < \text{大约 } 300\ \text{GeV}. \tag{21.115}$$

2. **费米理论的局限性**　有一个使人不可不信服的理由要对费米理论作修改.即使作为一个等效拉氏量,(21.113)式所给的 $\mathscr{L}_{等效}$ 也不能用到很高的能区. 这一点从下面的分析中可以看清楚. 根据(21.2)—(21.3),反应

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$$

可以发生,而且只有 s 波的散射. 利用习题 5.4 可以算出其截面来:

$$\sigma = \frac{4}{\pi}(Gk)^2, \tag{21.116}$$

k 是在质心系中的 ν_μ 的动量. 由于从幺正性(见习题 21.9)可以导出

$$\sigma \leqslant \frac{\pi}{2k^2}; \tag{21.117}$$

因此(21.116)只在

$$k \leqslant \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}G}\right)^{1/2} \sim 300\ \text{GeV} \tag{21.118}$$

时才适用. 因此,不管弱作用的基础机理是什么,$\mathscr{L}_{有效}$ 的这一具体形式,在高动量传递,也即小距离时,必须加以修改. 例如,(21.2)可以用下式来代替:

$$\mathscr{L}_{轻}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}}\int j_\lambda^+(x) D_{\lambda\mu}(x-x') j_\mu^-(x') \mathrm{d}^4 x' + \cdots \tag{21.119}$$

为产生这种"有效"的非定域性,需要某种中间物将作用从 x 传递到 x'. 一种最简单的可能性就是假定存在中间玻色子.

直到现在,中间玻色子仍然只存在在假说的王国内. 如何将弱作用与电磁作用统一起来,廿多年来始终是粒子物理学的一个主要问题,并最终导致规范场模型. 这些将在下一章中讨论.

21.10　小林-益川模型

b 夸克强子及其弱衰变的发现使卡比博理论的推广和修改成为必要

的.缺乏详细的实验资料的同时,我们却有许多理论上的发明,小林-益川 Kobayashi-Maskawa 模型则是最简单的一个*.

1. **夸克与轻子代** 正如 496 页上所讨论的,我们认为 $\nu_e \neq \nu_\tau$. 共有六种轻子,可以将其分组如下:

$$\begin{aligned} &\text{第一代} \quad \nu_e, \ e \\ &\text{第二代} \quad \nu_\mu, \ \mu \\ &\text{第三代} \quad \nu_\tau, \ \tau. \end{aligned} \tag{21.120}$$

小林-益川模型对夸克也给定了类似的三代结构:

$$\begin{aligned} &\text{第一代} \quad \mathrm{u, \ d} \\ &\text{第二代} \quad \mathrm{c, \ s} \\ &\text{第三代} \quad \mathrm{t, \ b} \end{aligned} \tag{21.121}$$

这里的 t(顶)夸克仍然是一个猜想,现在的 t 夸克质量下限是**

$$m_t > 17.9 \text{ GeV}. \tag{21.122}$$

[和所有夸克质量一样,m_t 只代表在一强子内部的质量.]

为方便起见,可将各代成员按其电荷放在一起,这时我们可以写成:

$$\begin{aligned} \nu^0 \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad l^- \equiv \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \\ q^{\frac{2}{3}} \equiv \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad q^{-\frac{1}{3}} \equiv \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21.123}$$

这里上标代表以 e 为单位的电荷. 轻子流 $j_\lambda^\pm$,即(21.3),就变为:

$$\begin{aligned} j_\lambda^- &= \mathrm{i} l^{-\dagger} \gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \nu^0 \\ j_\lambda^+ &= \mathrm{i} \nu^{0\dagger} \gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) l^- \end{aligned} \tag{21.124}$$

---

* Kobayashi M, Maskawa K. *Progr Theor Phys*, 1973, **49**:652.

** 见"Mark J Collaboration", Phys Reports, 1980, **63**:337 及文中所引文献.

式中 ν^0 与 l^- 代表相应的轻子场算符.

2. **强子流** 在卡比博理论中,带电强子流并没有包括 b 夸克场.最简单的推广办法是用下式取代(21.51):

$$J_\lambda^+ = \mathrm{i}q^{\frac{2}{3}\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)Uq^{-\frac{1}{3}},$$

$$J_\lambda^- = \mathrm{i}q^{-\frac{1}{3}\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)U^\dagger q^{\frac{2}{3}} \qquad (21.125)$$

这里和前面轻子情况一样,$q^{\frac{2}{3}}$ 和 $q^{-\frac{1}{3}}$ 代表相应的夸克场算符.我们将会看到,由于轻子-夸克的对称性,U 是幺正的.

将夸克质量差的起源看作与弱相互作用无关的设想看来是合理的.因此,只要是涉及弱相互作用的对称性质,我们可以在夸克质量相等这一近似下来加以研究,这时,考虑下面的夸克场算符的变换:

$$q^{\frac{2}{3}} \to Q^{\frac{2}{3}} \equiv u^\dagger q^{\frac{2}{3}}$$

$$q^{-\frac{1}{3}} \to Q^{-\frac{1}{3}} \equiv uq^{-\frac{1}{3}}. \qquad (21.126)$$

因为夸克场满足(3.21)—(3.22)的正则反对易关系,所以矩阵 u 必须是幺正的.取

$$u^2 = U,$$

则可以看出,(21.125)可写为

$$J_\lambda^+ = \mathrm{i}Q^{\frac{2}{3}\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)Q^{-\frac{1}{3}}$$

与

$$J_\lambda^- = \mathrm{i}Q^{-\frac{1}{3}\dagger}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)Q^{\frac{2}{3}}.$$

在下面的置换下

$$\nu^0 \rightleftharpoons Q^{\frac{2}{3}} \quad l^- \rightleftharpoons Q^{-\frac{1}{3}}, \qquad (21.127)$$

我们有

$$j_\lambda^\pm \rightleftharpoons J_\lambda^\pm,$$

这正好给出我们所希望的轻子与夸克的对称性.反过来,要求在变换(21.126)下存在轻子-夸克对称(21.127)就导致(21.125).又因为 u 的幺正性意味着 U 的幺正性,这就证明了我们的推测.

3. **U 矩阵** $N\times N$ 的幺正矩阵 U,决定不同味道的夸克之间的弱作用跃迁振幅.在最初的卡比博理论中,即(21.51),$N=2$.而在小林-益川模型(21.125)中,$N=3$.现在我们就来研究需要用多少个独立参数来表

征 U 矩阵.

(i) $N=2$

由于 $U_1\times SU_2=U_2$ 群有 $1+3=4$ 个生成元,任何一个 2×2 的幺正矩阵都只依赖于 4 个实参数. 首先,在卡比博理论中的 4 个夸克场,u, d, c 和 s,每个场都带一任意相因子. 因此,总合起来有三个任意的相对相因子,而这就使 U 只依赖于 $4-3=1$ 个实参数. 我们可将它取为卡比博角 θ_c,同时写出

$$U=\begin{pmatrix}\cos\theta_c & \sin\theta_c\\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c\end{pmatrix}. \tag{21.128}$$

这时,作为对(21.123)的替换,我们有

$$q^{\frac{2}{3}}=\begin{pmatrix}u\\ c\end{pmatrix}\text{以及 } q^{-\frac{1}{3}}=\begin{pmatrix}d\\ s\end{pmatrix},$$

因而(21.125)就简化为卡比博理论中的流(21.51).

(21.128)的参数化形式也可以用下面的方法来构成:首先,取 u 和 d 的相对相因子,使 $U_{11}=\cos\theta_c$ 是正实数,然后取 u 和 s 的相对相因子 $U_{12}=\sin\theta_c$ 也是正实数;类似地,c 的任意相因子使我们有可能选取 U_{21} 为负实数,即 $U_{21}=-\sin\theta_c$. 而 U 的幺正性使 $U_{22}=\cos\theta_c$,因此有 $\det U=1$. 注意用这一手续,我们总可以将卡比博角 θ_c 放在第一象限内.

(ii) $N=3$

由于 $U_1\times SU_3=U_3$ 群共有 $1+8=9$ 个生成元,任何一个 3×3 幺正矩阵必依赖于九个实参数. 在六个夸克场 u, d, s, c, b 和 t 中,有五个任意位相. 因此 3×3 的 U 矩阵依赖于 $9-5=4$ 个实参数. 不失任何普遍性,我们可以选取四个角度 θ_1, θ_2, θ_3 和 δ,其定义是:

$$U=\begin{pmatrix}c_1 & s_1c_3 & s_1s_3\\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\ s_1s_2 & -c_1s_2c_3-c_2s_3e^{i\delta} & -c_1s_2s_3+c_2c_3e^{i\delta}\end{pmatrix} \tag{21.129}$$

这里 $c_i=\cos\theta_i$, $s_i=\sin\theta_i$, $i=1, 2, 3$. 可以很容易验算出:U 幺正,并且

$$\det U=e^{i\delta} \tag{21.130}$$

首先,不失任何普遍性,我们可将 θ_1 取在 0 和 π 之间,θ_2 和 θ_3 在 0 和 2π 之间. 考虑(u, d), (u, s), (u, b), (c, d)和(t, d)之间的相对位相后,很容易看出:我们可以将 c_1, s_1c_3, s_1s_3, s_1c_2 和 s_1s_2 都取作正实数. 因此,我们总可以做到:

$$\text{将 } \theta_1,\ \theta_2 \text{ 和 } \theta_3 \text{ 都放在第一象限内.} \tag{21.131}$$

注意 T 不变性意味着 U 是实的. 因此,$\delta \neq 0$ 或 π 就会给出 T 破坏来.

4. **实验的测定** 利用(21.48), (21.129)以及表 21.1,我们看到,将 μ 衰变常数 G_μ 和原子核 β 衰变的费米常数 G_V 联系起来的 $\cos\theta_c$ 现在为 $\cos\theta_1$ 所代替. 我们有

$$G_V = G_\mu \cos\theta_1,$$

这样,从(21.50)就得到

$$\cos\theta_1 = 0.974 \pm 0.002. \tag{21.132}$$

对于奇异数改变的超子 β 衰变,$\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_3$ 代替了原来卡比玻老理论中的 $\sin\theta_c$. (21.70)就给出

$$\sin\theta_1 \cos\theta_3 = 0.219 \pm 0.011, \tag{21.133}$$

将这一结果与(21.132)综合起来,就得到

$$\theta_1 \cong 13^\circ,\ \theta_3 \leqslant 16^\circ. \tag{21.134}$$

原则上说,利用相应的弱-电规范理论,从 K_L^0-K_S^0 的质量差和顶夸克质量 m_t,我们可以定出 θ_2 来;并且也可以从 K 衰变中的 CP 破坏参数 $\varepsilon \cong 2\times10^{-3}$ 推算出 δ 来. 但是,由于 m_t 仍然未知,以及强相互作用引起的理论上的不确定性,到目前为止只可能给出粗略的估计 *.

说明. 如果我们将真空当作是一种物理介质,那么就有理由认为:卡比博理论中的 θ_c,或者前面给出的 θ_1, θ_2, θ_3 以及 δ 可能都有动力学的起源;它们的数值都代表着真空态中某种长程关联的期待值(粗糙地说,这相当于晶体中的各种光学角度). 在这个意义上,小林-益川模型中,CP

---

* 利用在中微子和反中微子中双 μ 子的产生截面,可以从实验上推算出 $\sin\theta_1\cos\theta_2$ 来. 目前的实验数据给出 $\cos\theta_2 = 1.1 \pm 0.1$. (J. 施泰因贝格尔(J. Steinberger),私人通讯.)

破坏角δ的基础机理,可能与16.4节中相应的角度α具有类似的起源.正是在那节中,我们讨论了自发CP对称破缺的例子.

习题 21.1.

(i) 证明由(21.2)给出的μ衰变的唯象拉氏量,在CP和T下不变.

(ii) 略去辐射修正及电子、中微子的质量,利用这一唯象的拉氏量,证明μ粒子的寿命是

$$\tau_\mu^{-1} = G_\mu^2 m_\mu^5 (192\pi^3)^{-1},$$

而在一完全极化的μ粒子的静止系中,归一化了的末态e分布是:

$$\mathrm{d}^2 N_\mathrm{e} = x^2[3-2x \pm \cos\theta(1-2x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}\cos\theta$$

式中上行的符号对e^-,下行的符号对e^+,

$$x = e\,\text{动量}\Big/\frac{1}{2}m_\mu,$$

$\theta=\mu$粒子极化方向与e动量间的夹角.

习题 21.2. 证明π_{l2}的衰变率由(21.20)给出,

$$\text{衰变率}(\pi_{l2}) = \frac{G^2 F_\pi^2 m_l^2}{8\pi m_\pi^3}(m_\pi^2 - m_l^2)^2 \cos^2\theta_\mathrm{c}$$

式中G和$F_\pi\cos\theta_\mathrm{c}$由(21.13)和(21.19)定义,$\pi^\pm$及$l^\pm$的质量分别由$m_\pi$和$m_l$表示.

习题 21.3. 一自旋为$\frac{1}{2}$粒子的纵向极化由$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}$的平均值决定,这里$\hat{p}$是沿粒子动量方向的单位矢量,$\boldsymbol{\sigma}$的各分量就是泡利矩阵,因此有

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} = 2\times\text{螺旋度},$$

其中螺旋度由(3.29)定义.利用(21.43),试证明对于原子核β衰变,在原子核静止系中,速度为v的β粒子的纵向极化是

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\rangle = \mp v \tag{21.135}$$

式中一号对应e^-,+号对应e^+.

习题 21.4. 在极端非相对论极限下,我们可以将始末态核子都当作是静止的.

(i) 利用(3.26)—(3.27)，证明(21.44)中 4×1 的狄拉克旋量函数 u_n 与 u_p 都可以用它们的上面的两分量 χ_n 和 χ_p 来代替：

$$u_N \to \chi_N = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{对自旋} \uparrow$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{对自旋} \downarrow,$$

这里 $N = n$ 或 p.

(ii) 在这一极限下，证明 $\beta^{\pm}$ 衰变的拉氏量密度(21.43)的矩阵元，在位置坐标为 $\boldsymbol{r}$ 时可写成

$$\langle ne^+ \nu \mid \mathscr{L}(\boldsymbol{r}) \mid p\rangle = -\sqrt{2}[G_V\chi_n^\dagger\chi_p\langle 1\rangle_l + G_A\chi_n^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_p \cdot \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_l]\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_N) \tag{21.136}$$

并且对 $\langle pe^- \bar{\nu} | \mathscr{L} | n\rangle$ 也有类似的方程，这里 $\nu = \nu_e$，$\langle\Gamma\rangle_l$ 代表轻子算符的矩阵元

$$\langle e^+ \nu \mid \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{r})\Gamma\psi_e(\boldsymbol{r}) \mid \text{真空}\rangle,$$

ψ_ν 满足二分量条件 $\gamma_5\psi_\nu = \psi_\nu$，$\Gamma = 1$ 或 $\boldsymbol{\sigma}$. [历史上，G_A/G_V 的符号的取法就是由(21.136)来决定的. 这也就解释了(21.45)—(21.46)中负号出现的原因.]

习题 21.5. 将核子都看作非相对论的，并且与 β 粒子的德布罗意波长相比，原子核的有限大小可以略去.

(i) 证明 Z 原子核衰变

$$Z \to Z' + e^{\mp} + \bar{\nu}_e(\nu_e) \tag{21.137}$$

的衰变率是

$$\frac{\ln 2}{t} = \frac{m_e}{2\pi^3}(|G_V|^2 M_F^2 + |G_A|^2 M_{GT}^2) f\left(\frac{E_m}{m_e}\right) \tag{21.138}$$

式中 $E_m = \sqrt{k_m^2 + m_l^2}$ 是 β 最大能量，t 是半衰期，

$$f(x) = \frac{1}{60}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2x^4 - 9x^2 - 8) + \frac{x}{4}\ln(x + \sqrt{x^2-1}), \tag{21.139}$$

$$M_F^2 \equiv \left| \int \langle Z' \mid \psi_N^\dagger \tau_\pm \psi_N \mid Z \rangle d^3 r \right|^2,$$

$$M_{GT}^2 \equiv \left| \int \langle Z' \mid \psi_N^\dagger \tau_\pm \boldsymbol{\sigma} \psi_N \mid Z \rangle d^3 r \right|^2, \qquad (21.140)$$

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2),$$

$$\tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2),$$

$$\psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

则是量子化的核子场算符，τ_+（或 τ_-）对 β^-（或 β^+）衰变.

(ii) 证明在这一近似下(21.137)选择定则是

$$M_F \neq 0, \text{只当 } P' = P, \text{以及 } J' = J \text{ 时} \qquad (21.140a)$$

以及

$$M_{GT} \neq 0, \text{只当 } P' = P,\ J' = J, \text{或 } J \pm 1 \text{ 时}, \qquad (21.140b)$$

但是 $M_{GT} = 0$，当 $J' = J = 0$ 时，这里 J 和 P 是 Z 的自旋和宇称，J', P' 是 Z' 的自旋和宇称；(21.140a)称作费米选择定则，(21.140b)称为伽莫夫-特勒(Gamow-Teller)选择定则.

(iii) 将不同的允许的及禁戒的 β 衰变中的实验 ft 值作出表来.

习题 21.6. 考虑中微子反应(21.72)

$$\nu + N \to l + h$$

其中末态强子态 h 的质量是 M，螺旋度是 s_h.

(i) 证明由(21.91)定义的结构函数 $W_1(q^2, M)$, $W_2(q^2, M)$ 和 $W_3(q^2, M)$ 与在实验室坐标系中强子流 J_λ 矩阵元的平方

$$\alpha_+ \equiv \sum_{s_h} \frac{1}{2} \left| \langle s_h \mid J_x + iJ_y \mid s_N = s_h - 1 \rangle \right|^2,$$

$$\alpha_- \equiv \sum_{s_h} \frac{1}{2} \left| \langle s_h \mid J_x - iJ_y \mid s_N = s_h + 1 \rangle \right|^2 \qquad (21.141)$$

及

$$q^2\alpha_0 \equiv \sum_{s_h} |\langle s_h | (E_h - m)J_z + i | \boldsymbol{p} | J_4 | s_N = s_h\rangle|^2$$

存在以下关系：

$$W_1 = (\alpha_+ + \alpha_-)\frac{E_h}{m_N}$$

和

$$W_2 = (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0)q^2\frac{E_h}{m_N p^2}, \tag{21.142}$$

$$W_3 = 2(-\alpha_+ + \alpha_-)\frac{E_h}{p},$$

这里 $p = |\boldsymbol{p}|$，而且实验室系的 Z 轴方向选为与 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ 平行，所有其他符号由(21.73) 及(21.78) 给定.

(ii) 证明微分截面(21.94)也可以用下面的形式表示出来：

$$d\sigma = (16\pi m_N E_\nu^2 p^2)^{-1}G^2 q^2 E_h dq^2[(E_\nu + E_l)^2 - p^2] \cdot [\alpha_\pm \xi + \alpha_\mp \xi^{-1} + \alpha_0] \tag{21.143}$$

式中上行的符号对 ν_l，下行的符号对 $\bar{\nu}_l$，以及

$$\xi = \frac{E_\nu + E_l - p}{E_\nu + E_l + p}. \tag{21.144}$$

习题 21.7. 其次我们来考虑一中微子单举反应

$$\nu + N \rightarrow l + \cdots,$$

其中末态强子 h 已全部求和掉. 令 x 和 y 是由(21.75)中给出的无量纲变量. 在 x 和 y 为固定值，但取 $q^2 \rightarrow \infty$ 极限后，定义

$$L(x) \equiv \lim_{q^2\rightarrow\infty} \frac{\sum_h \alpha_-}{\sum_h (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0)},$$

$$R(x) \equiv \lim_{q^2\rightarrow\infty} \frac{\sum_h \alpha_+}{\sum_h (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0)} \tag{21.145}$$

这里的求和号包括同一质量 M 下的所有强子道. 证明在同一极限，即所谓的无**标度极限**下*，

* 进一步讨论见 23.1 节.

$$x\left(F_1+\frac{1}{2}F_3\right)\Big/F_2\to L(x),$$

$$x\left(F_1-\frac{1}{2}F_3\right)\Big/F_2\to R(x);\qquad(21.146)$$

因而(21.95)就变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma(\nu_l)=\pi^{-1}G^2m_{\mathrm{N}}E_\nu\mathrm{d}x\mathrm{d}yF_2(x)[(1-y)\\+yL(x)-y(1-y)R(x)]\end{aligned}\qquad(21.147)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma(\bar{\nu}_l)=\pi^{-1}G^2m_{\mathrm{N}}E_\nu\mathrm{d}x\mathrm{d}yF_2(x)[(1-y)\\+yR(x)-y(1-y)L(x)]\end{aligned}$$

这里 $F_2(x)$就是 $F_2(q^2, x)$的无标度极限,即

$$F_2(x)=\lim_{q^2\to\infty}F_2(q^2, x).$$

习题 21.8.

(i) 证明单举反应

$$\mathrm{e}^-+\mathrm{N}\to\mathrm{e}^-+\cdots$$

的微分截面可以写成为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma=\frac{m_{\mathrm{N}}E_{\mathrm{e}}}{2\pi}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big[xy^2F_1^{\mathrm{el}}(q^2, x)\\+\left(1-y-\frac{m_{\mathrm{N}}}{2q_0}xy^2\right)F_2^{el}(q^2, x)\Big]\end{aligned}\qquad(21.148)$$

在这里我们只考虑了由光子交换而贡献的最低阶图,所用符号与前面两练习一致,只须将 ν 换为 e, J_λ 换为强子电磁流算符 J_λ^{el},以及 F_1, F_2 换为 F_1^{el}, F_2^{el} 即可.(因为宇称守恒,所以有 $F_3^{\mathrm{el}}=0$.)电子质量可令其为零.

(ii) 证明在无标度极限下,(21.148)变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma=4\pi\left(\frac{\alpha}{q^2}\right)^2\mathrm{d}q^2\mathrm{d}\omega\Big[\left(\frac{q^2}{s}\right)^2F_1^{\mathrm{el}}(x)\\+\left(\frac{1}{\omega}-\frac{q^2}{s}\right)F_2^{\mathrm{el}}(x)\Big]\end{aligned}\qquad(21.149)$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \\
&\omega = x^{-1}, \\
&s = -(k+p)^2, \\
&F_1^{el}(x) = \lim_{q^2 \to \infty} F_1^{el}(q^2, x) \\
&F_2^{el}(x) = \lim_{q^2 \to \infty} F_2^{el}(q^2, x).
\end{aligned}
\tag{21.150}
$$

习题 21.9. 反应

$$a + b \to c + d$$

的 s 波散射截面和 S 矩阵有以下关系

$$\sigma = \pi k^{-2} \mid \langle cd \mid S - 1 \mid ab \rangle \mid^2,$$

其中 k 是 a 或 b 在质心系中的动量.

证明.

(i) 对弹性 s 波散射,即 a + b → a + b, 有

$$\sigma = \pi k^{-2} \mid e^{2i\delta} - 1 \mid^2 \leqslant \frac{4\pi}{k^2} \tag{21.151}$$

其中 $\exp(2i\delta)$是 S 的对角矩阵元.

(ii) 对非弹性散射,有

$$\sigma \leqslant \frac{\pi}{k^2}. \tag{21.152}$$

(iii) 考虑在质心系中过程

$$e^- + \nu_\mu \to \mu^- + \nu_e,$$

这一反应中只有左手电子,即 e_L^- 能参与作用. 证明如始态电子 e^- 是非极化的,则有

$$
\begin{aligned}
\sigma(e^- \nu_\mu \to \mu^- \nu_e) &= \frac{1}{2}\sigma(e_L^- \nu_\mu \to \mu^- \nu_e) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2k^2}.
\end{aligned}
\tag{21.153}
$$

参 考 文 献

Siegbahn K. ed. Alpha, Beta and Gamma-ray Spectroscopy. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1965.

Lee T D, Wu C S. *Annual Review of Nuclear Science*, 1965, **15**:381; 1966, **16**:471, 511.

Konopinski E J. The Theory of Beta Radioactivity. Oxford: The Clarendon Press, 1966.

Wu C S, Moszkowski S A. Beta Decay. New York: Wiley-Interscience, 1966.

Marshak R E, Riazuddin, Ryan C P. Theory of Weak Interactions in Particle Physics. New York: Wiley-Interscience, 1969.

第 22 章　弱和电磁规范理论

22.1　南部-戈德斯通和希格斯机理

正如在 21.9 节中就曾提到,从弱作用研究的最初期开始,许多物理学家就希望将弱作用及电磁作用统一起来.但是,设想一个非阿贝尔规范理论的线索虽然很明显,却碰到一些严重的困难:所有规范场的量子,至少一开始都是零质量的.但是中间玻色子,如果存在的话,却必须质量很重,可能如(21.114)—(21.115)所估计的那样,在 30—300 GeV 的范围之间.不仅如此,弱和电磁相互作用所表现出来的对称性质也很不一样.一直到 1960 年代,还不知道如何将这些差异调和起来.解决的方案是逐步实现的.在这一演化过程中"对称性自发破缺"(见 16.4 节)和南部-戈德斯通(Nambu-Goldstone)* 及希格斯(Higgs)机理** 等概念具有特殊的重要性.这些我们都将在本节中加以讨论.

1. **一个例子**　作为一个例子,我们先考虑一 SO_3 的规范理论***.群元素 $\{u\}$ 都是行列式为 1 的 3×3 实正交矩阵:

---

* Nambu Y. *Phys Rev Letters*, 1960, **4**: 380; Goldstone J. *Nuovo Cimento*, 1961, **19**: 154; Nambu Y, Jona-Lasinio G. *Phys Rev*, 1961, **122**: 345; 1961, **124**: 246.

** Higgs P W. *Phys Lett*, 1964, **12**: 132; *Phys Rev Lett*, 1964, **13**: 508; *Phys Rev*, 1966, **145**:1156; Englert F. Brout R. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:321; Guralnik GS, Hagen CR, Kibble TWB. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:585; Kibble TWB. *Phys Rev*, 1967, **155**:1554.

*** Georgi H, Glashow S. *Phys Rev Lett*, 1964, **13**:168. [关于对 SO_3 群的讨论,参看,例如,12.1 节 5(ii)]

$$u^{+}u = 1,\ u^{*} = u$$

及

$$\det u = 1.$$

并有三个生成元

$$T^{x},\ T^{y}\ 及\ T^{z}, \tag{22.1}$$

它们满足对易关系

$$[T^{l},\ T^{m}] = \mathrm{i}\epsilon^{lmn}T^{n} \tag{22.2}$$

其中每个上指标都$=x$, y 或 z, ϵ^{lmn} 由(12.10)给出. SO_3 的变换可以与“同位旋”转动相连系. 为建立这一规范理论,我们将采用 18.1 节的手续及符号. 对应每一个 T^{l} 就有一规范场 V_{μ}^{l};这样,共有三个自旋为 1 的场: V_{μ}^{x}, V_{μ}^{y} 及 V_{μ}^{z},它们组成“同位旋”矢量 $\mathbf{V}_{\mu}$. 除此以外,我们还假设有一自旋为 0 的物质场 $\boldsymbol{\phi}$,它也是一同位旋矢量. 拉氏量密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{V}_{\mu\nu}^{2} - \frac{1}{2}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi})^{2} - U(\phi), \tag{22.3}$$

其中

$$\mathbf{V}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\mathbf{V}_{\nu} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\mathbf{V}_{\mu} + g(\mathbf{V}_{\mu}\times\mathbf{V}_{\nu}),$$

$\boldsymbol{\phi}$ 是厄米的,

$$\phi = |\boldsymbol{\phi}|,$$

$$D_{\mu}\boldsymbol{\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + g\mathbf{V}_{\mu}\times\right)\boldsymbol{\phi} \tag{22.4}$$

并且,和(16.8)中一样,为了得到自发对称性破缺,取

$$U(\phi) = \frac{\mu^{2}}{8\rho^{2}}(\phi^{2} - \rho^{2})^{2}. \tag{22.5}$$

因为要求 $\mathscr{L}$ 厄米,所以常数 μ^{2}, ρ^{2} 和 g 都是实数. 而且,我们还取 μ 和 ρ 都>0. 可以直接证明,和(18.12)类似,$\mathscr{L}$ 在一无穷小定域规范变换

$$\mathbf{V}_{\mu} \rightarrow \mathbf{V}_{\mu} + \delta\mathbf{V}_{\mu}$$

以及

$$\boldsymbol{\phi} \rightarrow \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\phi}$$

下不变,其中

$$\delta \mathbf{V}_\mu = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V}_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu},$$

$$\delta \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\phi} \tag{22.6}$$

$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(x)$ 是一任意的无穷小同位旋矢量的时空函数. 量子化的方案就可以根据标准方法,按第 18 章所给步骤来实现.

正如在(16.12)中,$U(\phi)$的极小决定 $\boldsymbol{\phi}$ 的真空期待值. 从(22.5),或 22.1 图中,我们看出,$\boldsymbol{\phi}$ 的真空期待值是

$$|\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_{\text{vac}}| = \rho > 0, \tag{22.7}$$

即这一值与$\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_{\text{vac}}$的方向无关. 这里,因为 SO_3 是连续群,真空的简并度也是连续的. [相反,16.4 节中所讨论的真空只有断续的二重简并度.]

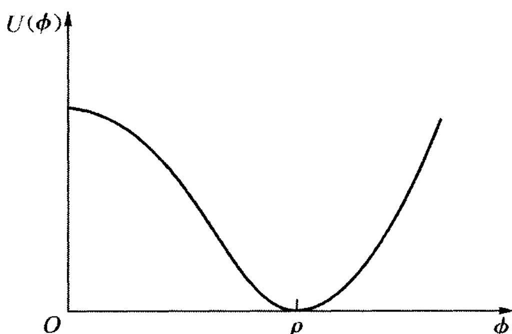


图 22.1　$U(\boldsymbol{\phi}) = \dfrac{\mu^2}{8\rho^2}(\phi^2 - \rho^2)^2$ **的图形,这里** $\phi = |\boldsymbol{\phi}|$

2. **$g = 0$ 的极限**　在这一极限下,矢量场与标量场退耦,拉氏量密度(22.3)变为

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_V + \mathscr{L}_\phi \tag{22.8}$$

式中

$$\mathscr{L}_V = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathbf{V}_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2, \tag{22.9}$$

$$\mathscr{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_\mu}\right)^2 - U(\phi). \tag{22.10}$$

比较(22.9)与(6.3),我们看到 $\mathbf{V}_\mu$ 的每一个同位旋矢量分量都能像自由

的电磁场一样来量子化. 例如,在库仑规范下,我们有横向条件

$$\nabla_i V_i = 0 \tag{22.11}$$

和(6.32)—(6.39)中一样,对一给定的动量和同位旋方向,V_μ 量子只有两个独立的横向模式.

为讨论 0 自旋的 ϕ 场,让我们和以前一样,对体系引进一有限立方体积

$$\Omega = L^3,$$

并假定满足通常的周期性边界条件,而只是在最后才取 $\Omega \to \infty$ 的极限. 在任意给定时刻 t, $\phi(x)$ 的傅氏展开是

$$\phi(x) = Q(t) + \sum_{k \neq 0} \frac{q_k(t)}{\sqrt{\Omega}} \exp(\mathrm{i}k_j x_j) \tag{22.12}$$

这里 x 是四维空间坐标

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, \mathrm{i}t),$$

但 k 只代表三维矢量 k_j,并与(2.13)中一样,满足

$$k_j = \frac{2\pi l_j}{L}$$

且

$$l_j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

在(22.12)中重复的指标 j 代表从 1 到 3 求和. 考虑到(22.7),我们可知 $\langle \phi \rangle_{\text{vac}}$ 量级为 $0(\Omega^0)$,而不是 $0(\Omega^{-\frac{1}{2}})$. 因此,在上面的傅氏展开式中较为方便的是将 $k=0$ 的分量分出并写为 Q,而不是像(2.11)那样写成 $q_0/\sqrt{\Omega}$.

从(22.10),可以得到 $\phi(x)$ 的共轭动量是

$$\Pi = \frac{\partial \mathscr{L}_\phi}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}, \tag{22.13}$$

这就导出哈密顿密度

$$\mathscr{H}_\phi = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla_i \phi)^2 + U(\phi). \tag{22.14}$$

$\Pi(x)$ 的富氏展开是

$$\boldsymbol{\Pi}(x) = \frac{\boldsymbol{P}(t)}{\Omega} + \sum_{k\neq 0} \frac{\boldsymbol{p}_{-k}(t)}{\sqrt{\Omega}} \exp(\mathrm{i}k_j x_j) \tag{22.15}$$

其中 $k=0$ 的分量写成为 p/Ω，而不是像在(2.12)中那样为 $p_0/\sqrt{\Omega}$. 这种写法的好处在将(22.12)代入拉氏量后可以看得更清楚. 我们发现

$$L_\phi = \int \mathscr{L}_\phi \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\Omega \dot{\boldsymbol{Q}}^2 + \cdots$$

这里，由于考虑了(22.10)，…中的项都不依赖于 $\dot{\boldsymbol{Q}}$. $\dot{\boldsymbol{Q}}$ 的共轭动量因此就是

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\boldsymbol{Q}}} = \Omega \dot{\boldsymbol{Q}},$$

而哈密顿量是

$$H_\phi \equiv \int \mathscr{H}_\phi \mathrm{d}^3 r = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\Omega} + \cdots \tag{22.16}$$

这里的…包含与 $\boldsymbol{P}$ 无关的项. 如果我们直接将 $\boldsymbol{\Pi}(x)$ 的傅氏展开式代入哈密顿密度中，也可以得到同样的表达式，这也就解释了(22.15)式右方分出第一项的原因.

为完成量子化，我们利用标准的正则对易关系. 如(2.23)—(2.24)中，我们有

$$[P^l(t),\ Q^m(t)] = -\mathrm{i}\delta^{lm},$$

$$[P^l_k(t),\ q^m_{k'}(t)] = -\mathrm{i}\delta^{lm}\delta_{kk'}$$

而其他的坐标与动量间的等时对易子都为零.

从(22.15)我们看到与 $k=0$ 的模式相联系的"惯性"当 $\Omega\rightarrow\infty$ 时趋向无限. 因此，虽然 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 并不对易，但在无穷大体积近似下，我们可以将 $\boldsymbol{Q}$ 当作经典变量. 这样(22.7)就可写成

$$\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_{\mathrm{vac}} = \langle \boldsymbol{Q} \rangle_{\mathrm{vac}} = \rho \hat{e} \tag{22.17}$$

这里 $\hat{e}$ 是同位旋空间里的任一单位矢量，因为其微商正比于 Ω^{-1}，即当 $\Omega\rightarrow\infty$ 时为零，所以与时间无关. 不失任何普遍性，我们可以取

$$\hat{e} \equiv \hat{z} \tag{22.18}$$

$\hat{z}$ 代表同位旋空间里 z 方向的单位矢量.

其次,如(16.13)式前后所讨论,我们将 $\phi(k)$在其真空期待值附近展开,并写成

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \rho\hat{z} + \delta\boldsymbol{\phi}(x). \tag{22.19}$$

用 $\delta\boldsymbol{\phi}(x)$表示,(22.5)与(22.14)变成

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi^z)^2 + \cdots$$

还有

$$\mathscr{H}_\phi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Pi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla_i\delta\boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi^z)^2 + \cdots \tag{22.20}$$

式中…项中包括所有 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的三次或四次项. 略去这些高次项,考察平方项的哈密顿量后,我们看到:由 $\delta\phi^z$ 的振荡引起的量子的质量与 $\delta\phi^x$ 及$\delta\phi^y$ 的很不一样. 我们得到

$$质量(\delta\phi^z) = \mu \neq 0,$$

而

$$质量(\delta\phi^x) = 质量(\delta\phi^y) = 0. \tag{22.21}$$

这当然是 $U(\phi)$在同位旋转动下不变的一个直接后果. 正如图 22.2 所表明的,由于(22.17)的对称性自发破缺,垂直 $\hat{e}$ 的变化 $\delta\boldsymbol{\phi} \perp \hat{e}$ 代表$\boldsymbol{\phi}$的转动,而 $\delta\boldsymbol{\phi} \,/\!/\, \hat{e}$ 的变化则不是.

如果 ρ 为零,$U(\phi)$就正比于 ϕ^4,这时就会有三个 0 自旋与 0 质量的玻色子(至少是在略去辐射修正的近似下是如此). 这种情况下,真空在 SO_3 的任何转动下都是不变的. 然而,由于对称性自发破缺,$\rho \neq 0$,在同位旋空间中选出了一特定方向 $\hat{e}$. 但在围绕 $\hat{e}$ 的二维转动下真空仍然保持不变. 其结果是:仍然有两个 0 自旋与 0 质量的场,其量子称为戈德斯通(Goldstone)玻色子 *.

在 $g = 0$ 的极限下,这个理论中包含有一个有质量的 0 自旋场 $\delta\phi^z$,

---

* 进一步讨论见 24.3 节.

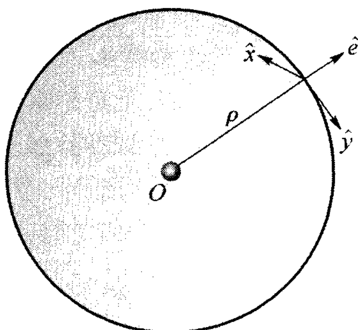


图 22.2　在 $\boldsymbol{\phi}$ 的空间里，真空期待值 $\langle\boldsymbol{\phi}\rangle_{\rm vac}=\rho\hat{e}$ 选出了特定方向 $\hat{e}$. 由于在垂直 $\hat{e}$ 方向的振动下 $U(\boldsymbol{\phi})$ 保持不变，就给出了零质量的戈德斯通玻色子（如果矢量耦合常数 $g=0$）

两个 0 质量的戈德斯通玻色场 $\delta\phi^x$ 和 $\delta\phi^y$，以及三个 0 质量 1 自旋场 V_μ^x，V_μ^y 及 V_μ^z.

3. *希格斯机理*（$g\neq 0$）　我们将会看到，如果耦合常数 g 不为零时，情况将完全不同. 为看清楚这些粒子的质量移动，和以前一样，我们只须考察一下哈密顿量中场量平方项的部分. 将(22.19)代入(22.4)，我们得到

$$-\frac{1}{2}(D_\mu\boldsymbol{\phi})^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\boldsymbol{\phi}\right)^2+g(\rho\hat{z}\times\boldsymbol{V}_\mu)\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\boldsymbol{\phi}$$

$$-\frac{1}{2}g^2(\rho\hat{z}\times\boldsymbol{V}_\mu)^2+\cdots,\tag{22.22}$$

这就使拉氏量密度(22.3)具有下面的形式：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\boldsymbol{V}_\nu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\boldsymbol{V}_\mu\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\boldsymbol{\phi}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}g^2\rho^2[(V_\mu^x)^2+(V_\mu^y)^2]-\frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi^z)^2$$

$$+g\rho\left[V_\mu^x\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^y-V_\mu^y\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^x\right]+\cdots\tag{22.23}$$

式中…项包括所有 $\boldsymbol{V}_\mu$ 及 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的三次或四次项. 定义

$$W_\mu^x \equiv V_\mu^x - \frac{1}{g\rho}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^y$$

及

$$W_\mu^y \equiv V_\mu^y + \frac{1}{g\rho}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^x, \tag{22.24}$$

我们可以将(22.23)改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\sum_{l=x,y}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\nu^l - \frac{\partial}{\partial x_\nu}W_\mu^l\right)^2 - \frac{1}{2}m^2(W_\mu^l)^2\right]\\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}V_\nu^z - \frac{\partial}{\partial x_\nu}V_\mu^z\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^z\right)^2\\ &-\frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi^z)^2 + \cdots\end{aligned} \tag{22.25}$$

其中

$$m = g\rho. \tag{22.26}$$

比较求和号下的项与(4.1)式,我们看到现在的理论中**仅有**一个零质量的场 V_μ^z. 其他的全都有质量;1 自旋的场 W_μ^x 与 W_μ^y 质量为 m, 0 自旋的场 $\delta\phi^z$ 质量为 μ.

正如我们前面所看到的,当 $g = 0$ 时,对一给定的动量,三个零质量、1 自旋的场 V_μ^x, V_μ^y 和 V_μ^z 中,每一个都只有两个横向模;此外,还有三个 0 自旋的场,其中两个无质量,一个有质量. 合起来,在给定的动量下共有

$$2\times 3 + 3 = 9$$

个不同的量子模式,其中,有

$$2\times 3 + 2 = 8$$

个是 0 质量的. 当 $g \neq 0$ 时,有两个有质量的 0 自旋场 W_μ^x 及 W_μ^y;在给定动量下每一个都有三个量子模式. 这些,和零质量、1 自旋场 V_μ^z 及有质量、0 自旋场 $\delta\phi^z$ 合在一起,在给定动量下,同样给出

$$3\times 2 + 2 + 1 = 9$$

个不同的量子模式. W_μ^x 和 W_μ^y 的纵向模式,如(22.24)式中所表明的,由 $\partial\delta\phi^y/\partial x_\mu$ 及 $\partial\delta\phi^x/\partial x_\mu$ 产生. 将"无质量"的规范场和戈德斯通玻色子变为

有质量的 1 自旋介子的，是“希格斯机理”．在上面的例子中，有质量的矢量场就是中间玻色子的雏形，0 质量的规范场 V_μ^z 模拟光子，剩下的有质量的 0 自旋场称为希格斯玻色子．

4．*幺正规范*　上述结果的另一种推导办法是利用拉氏量密度(22.3)的规范不变性．在一任意时空点上，连续作规范变换(22.6)，我们就可将 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 转到使之与同位旋空间的 z 轴平行 *．结果是，到处都有

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \hat{z}\,\phi^z(x), \tag{22.27}$$

这样选取的规范称为幺正规范．因为(22.7)，我们可以写出

$$\phi^z(x) = \rho + \delta\phi^z. \tag{22.28}$$

将(22.27)—(22.28)代入(22.3)—(22.4)，就得到

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^z + g(\mathbf{V}_\mu \times \hat{z})(\rho + \delta\phi^z),$$

因此，相应有

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathbf{V}_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2 - \frac{1}{2}m^2(V_\mu^x V_\mu^x + V_\mu^y V_\mu^y)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi^z\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\delta\phi^z)^2 + \cdots \tag{22.29}$$

式中 m 由(22.26)给定，…的项中包括了所有 $\mathbf{V}_\mu$ 与 $\delta\phi^z$ 的三次或四次方项．在幺正规范下可以直接进行正则量子化．从(22.29)中我们看出：V_μ^x 和 V_μ^y 是有质量的，但 V_μ^z 无质量．在幺正规范下，

$$\phi^x = \phi^y = 0,$$

但 $\delta\phi^z$ 是有质量的．

说明．　在一个规范理论中，规范场 V_μ^l 按(18.9)作变换；这样，它们就必定和群的生成元 T^l 一起属于同一表示．可是另一方面，希格斯机理中 0 自旋的场却又不是．这样的例子将在下一节中讨论．

练习 1．　在幺正规范(22.27)—(22.28)中定义

---

* 这一点仅对没有拓扑孤立子的状态才是可能的．[见 109 页 7.2 节 3.(1)上的讨论．]

$$X \equiv \delta\phi^z,\ A_\mu \equiv V_\mu^z,$$

$$W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^x - \mathrm{i}V_\mu^y),$$

$$\overline{W}_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^x + \mathrm{i}V_\mu^y),$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu, \tag{22.30}$$

$$W_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}gA_\mu\right)W_\nu - \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mathrm{i}gA_\nu\right)W_\mu$$

以及

$$\overline{W}_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mathrm{i}gA_\mu\right)\overline{W}_\nu - \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \mathrm{i}gA_\nu\right)\overline{W}_\mu.$$

因此有

$$\overline{W}_\mu = \begin{cases} W_\mu^\dagger & 若\ \mu \neq 4 \\ -W_4^\dagger & 若\ \mu = 4. \end{cases} \tag{22.31}$$

证明拉氏量密度(22.3)可以写成以下形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\overline{W}_{\mu\nu}W_{\mu\nu} - m^2\overline{W}_\mu W_\mu \\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_\mu}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 x^2 - \mathrm{i}gF_{\mu\nu}\overline{W}_\mu W_\nu \\ &-\frac{g^2}{2}[(\overline{W}_\mu W_\mu)^2 - (\overline{W}_\mu - W_\nu)^2] \\ &-\overline{W}_\mu W_\mu(2mg\chi + g^2\chi^2) - \frac{\mu^2}{2\rho}\chi^3\left(1 + \frac{\chi}{4\rho}\right)\end{aligned} \tag{22.32}$$

其中 m 由(22.26)给出.

练习 2. 在上题中如果将 A_μ 看作电磁场,g 作为电荷 e,证明电磁流是

$$j_\mu = -\mathrm{i}e\left[\overline{W}_\nu W_{\mu\nu} - \overline{W}_{\mu\nu}W_\nu + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\overline{W}_\mu W_\nu - \overline{W}_\nu W_\mu)\right] \tag{22.33}$$

并满足流守恒定律

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

因此,与 W_μ 和 $\overline{W}_\mu$ 相连系的量子是带电的,称为 $W^\pm$,其中上标指明电荷.

练习 3. (i) 按照第 2, 4, 6 章中所给方法,对拉氏量密度(22. 32)进行量子化. 证明算符 W_μ 的作用是湮没 W^+,产生 W^-.

(ii) 证明对一静止的 W^+,其磁矩矢量是

$$\boldsymbol{M} = \frac{e}{m}\boldsymbol{S}, \tag{22.34}$$

$\boldsymbol{S}$ 是其自旋矢量. 又因为习惯上都写成

$$\boldsymbol{M} = (1+\kappa)\frac{e}{qm}\boldsymbol{S},$$

κ 称为反常磁矩. 所以 W 介子的反常磁矩是

$$\kappa = 1. \tag{22.35}$$

(iii) W 介子的四极矩 $\mathscr{Q}$,对于静止的 W^+, $S_z=+1$ 时,定义为下面的积分

$$\int (3z^2 - r^2)\, i\rho \mathrm{d}^3 r$$

其中 $i\rho$ 是流算符第四分量 j_4 的期待值. 证明

$$\mathscr{Q} = -\frac{e}{m^2}. \tag{22.36}$$

22.2 标准模型*

我们现在来讨论一个最简单而现实的将弱、电相互作用统一起来的规范模型**. 到现在为止,由于中间玻色子仍然是一种理论上的发明,我

---

* Weinberg S. *Phys Rev Lett*, 1967, **19**:1264.

** 也可参看 Glashow SL. *Nucl Phys*, 1961, **22**:579; Salam A, Ward JC. *Nuovo Cimento*, 1959, **11**:568; *Phys Lett*, 1964, **13**:168. Cf in addition the articles by Salam A. Proceedings of the Eighth Nobel Symposium. ed. Svartholm N. New York: Wiley-Interscience, 1968, and Veltman M. Proceedings of the Sixth International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies. eds. Rollnik H, Pfeil W. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1974.

们在本节中将要讨论的标准模型的高能行为也并未被实验所证实. 尽管如此,这一模型与所有可用的实验数据的令人注目的相符,已经使它成为一个很好的低能唯象理论.

1. *规范群* 为了选取恰当的统一规范群,我们首先从(e^-, ν_e)系统的已知轻子流出发:对于弱作用,有

$$j_\lambda^- = i\psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu$$

和

$$j_\lambda^+ = i\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e, \tag{22.37}$$

而对电磁作用,有

$$j_\lambda^{el} = - i\psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\psi_e \tag{22.38}$$

式中 ν 代表 ν_e,(22.38)中的负号则是因为 e^- 的电荷为负. 上述流的结构已为实验很好地确定了,其中包括了 β 衰变的大量测量以及许多的 QED 的检验. 让我们看一下这些流的"荷":

$$\begin{aligned} Q^- &\equiv - i\int j_4^- d^3r = \int\psi_e^\dagger(1+\gamma_5)\psi_\nu d^3r, \\ Q^+ &\equiv - i\int j_4^+ d^3r = \int\psi_\nu^\dagger(1+\gamma_5)\psi_e d^3r, \\ Q &\equiv - i\int j_4^{el} d^3r = -\int\psi_e^\dagger\psi_e d^3r \end{aligned} \tag{22.39}$$

其中不带上标的 Q 代表电荷. 很清楚,这些荷都是物理的可观测量;因此,它们的对易子也应该是如此. 正如我们将要看到的,这些可观测量所满足的代数,可以通过将这些荷和其对易子重复对易而确定下来.

为方便起见,可定义

$$\begin{aligned} T^x &\equiv \frac{1}{4}(Q^- + Q^+), \\ T^y &= \frac{i}{4}(Q^- - Q^+) \end{aligned} \tag{22.40}$$

以及将 ψ_e 和 ψ_ν 合并到简单的列矩阵中

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_\nu \\ \psi_e\end{pmatrix}. \tag{22.41}$$

这样，T^x，T^y 和 Q 也可以写成

$$T^x = \frac{1}{4}\int \psi^\dagger (1+\gamma_5)\tau^x \psi \mathrm{d}^3 r,$$

$$T^y = \frac{1}{4}\int \psi^\dagger (1+\gamma_5)\tau^y \psi \mathrm{d}^3 r, \tag{22.42}$$

$$Q = \frac{1}{2}\int \psi^\dagger (\tau^z - 1)\psi \mathrm{d}^3 r,$$

其中 τ^x，τ^y，τ^z 是泡利矩阵，τ_1，τ_2 和 τ_3 的定义见(3.1)．考虑到(3.2)及 $\gamma_5^2=1$，我们有

$$\left[\frac{1}{4}(1+\gamma_5)\tau^i,\ \frac{1}{4}(1+\gamma_5)\tau^j\right] = \mathrm{i}\,\frac{1}{4}(1+\gamma_5)\epsilon^{ijk}\tau^k$$

其中 i，j，k 可以是 x，或 y，或 z．利用(3.24a)我们看到 T^x 和 T^y 的对易子是

$$T^z \equiv -\mathrm{i}[T^x,\ T^y] = \frac{1}{4}\int \psi^\dagger (1+\gamma_5)\tau^z \psi \mathrm{d}^3 r. \tag{22.43}$$

同样，我们可以验证

$$[T^i,\ T^j] = \mathrm{i}\epsilon^{ijk} T^k. \tag{22.44}$$

和一同位旋矢量一样，我们可将 T^i 看做是下面矢量的分量：

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{4}\int \psi^\dagger (1+\gamma_5)\boldsymbol{\tau}\psi \mathrm{d}^3 r. \tag{22.45}$$

从(22.42)—(22.43)我们看出，T^z 与 Q 对易，但 T^x 和 T^y 不与 Q 对易．令 T' 为 Q 与 T^z 之差：

$$\begin{aligned} T' &\equiv Q - T^z \\ &= \int \psi^\dagger \left[\frac{1}{4}(1-\gamma_5)\tau^z - \frac{1}{2}\right]\psi \mathrm{d}^3 r. \end{aligned} \tag{22.46}$$

因为

$$(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0,$$

所以得到 T' 与所有 T_i 对易，即有

$$[T',\ \boldsymbol{T}] = 0. \tag{22.47}$$

这样，从三个可观测荷 Q^-，Q^+，Q 以及它们的对易子中，我们得到四个厄米算符 T' 和 T^i. 因为有(22.45)和(22.47)，它们生成一个 U_1 和 SU_2 直乘的群

$$U_1 \times SU_2 \tag{22.48}$$

其中 T' 是 U_1 的生成元，$\boldsymbol{T}$ 是 SU_2 的生成元.

类似于(3.101)，我们将 ψ_e 分拆成左手分量

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_e \tag{22.49}$$

和右手分量

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_e \equiv R, \tag{22.50}$$

前者将与二分量中微子场 ψ_ν

$$\gamma_5\psi_\nu = \psi_\nu$$

合并组成

$$L \equiv \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \tag{22.51}$$

式中 ψ 由(22.41)给出.

令 ν_e，e_L^- 与 e_R^- 代表由 $\psi_\nu^\dagger$，$\psi_L^\dagger$ 与 $\psi_R^\dagger$ 作用到真空态后产生的单粒子态. 这些态全是 T，T^z 和电荷 Q 的本征态，因而也是 $T' = Q - T^z$ 的本征态. 我们有

	T	T^z	Q	T'
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
e_L^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
e_R^-	0	0	-1	-1

. (22.52)

因此，根据(22.50)—(22.51)，我们看出：

$$\text{对 } L\text{，有 } T = \frac{1}{2},\ T' = -\frac{1}{2},$$

$$\text{以及对 } R\text{，有 } T = 0,\ T' = -1. \tag{22.53}$$

2. **拉格朗日密度** 一旦选定规范群，规范场也就定下了. 对应每一

个生成元就一定有一规范场. 对于 $SU_2 \times U_1$ 群,就应该有四个:

$$\text{生成元}\quad \boldsymbol{T},\ T'$$
$$\text{规范场}\quad \boldsymbol{B}_\mu,\ C_\mu.$$

拉氏量的纯规范场部分是

$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{B}_{\mu\nu}^2-\frac{1}{4}C_{\mu\nu}^2$$

其中,和(18.4)一样

$$\boldsymbol{B}_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\boldsymbol{B}_\nu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\boldsymbol{B}_\mu+g\boldsymbol{B}_\mu\times\boldsymbol{B}_\nu$$

$$C_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}C_\nu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}C_\mu. \tag{22.54}$$

由它们自身决定的四个场量子的质量都是零;对一固定的动量,每个量子只有两个横向极化的自由度.

和在 22.1.3 节中一样,我们引进希格斯机理,对其中三个规范场赋予质量,而只剩下一个无质量的,就是光子. 这意味着,这里应该有三个拟定的戈德斯通玻色子,它们可以并入到三个有质量的矢量粒子中并成为它们的纵向模式. 除此以外,应该至少有一个物理的 0 自旋的希格斯粒子. 这样,我们的系统应该最少包含四个 0 自旋的厄米场,它们等价于两个 0 自旋的复场. 最简单的方案是将这两个复数场 ϕ_1 与 ϕ_2 放入 $SU_2\times U_1$ 变换下的一个二维表示中. 我们写出

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{22.55}$$

而且它们是

$$T=\frac{1}{2}\quad \text{和}\quad T'=\frac{1}{2} \tag{22.56}$$

的表示,这样,因为有(22.53),

$$L^+R\phi\ \text{就是}\ T=T'=0\ \text{的表示}, \tag{22.57}$$

这一体系中的轻子,规范场和 ϕ 的拉氏量密度是:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{B}_{\mu\nu}^2-\frac{1}{4}C_{\mu\nu}^2-R^\dagger\gamma_4\gamma_\mu C_\mu R-L^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu L$$

$$-(\overline{D}_\mu\phi^\dagger)D_\mu\phi - U(|\phi|) - f(L^\dagger\gamma_4 R\phi + R^\dagger\gamma_4 L\phi^\dagger) \tag{22.58}$$

式中 $|\phi|^2 = \phi^\dagger\phi$,

$$\begin{aligned}
D_\mu L &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}g\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu - \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right)g'C_\mu\right]L,\\
D_\mu R &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}(-1)g'C_\mu\right]R,\\
D_\mu\phi &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}g\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\right)g'C_\mu\right]\phi,\\
\overline{D}_\mu\phi^\dagger &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mathrm{i}g\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\right)g'C_\mu\right]\phi^\dagger
\end{aligned} \tag{22.59}$$

式中圆括号内的数字代表场的 T' 值.

练习. 证明上述拉氏量密度在定域的 $SU_2\times U_1$ 变换下

$$\begin{aligned}
&B_\mu \to uB_\mu u^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}u\,\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_\mu},\\
&C_\mu \to C_\mu + \frac{1}{g'}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu},\\
&L \to \exp(\mathrm{i}\alpha T'_L)uL,\\
&R \to \exp(\mathrm{i}\alpha T'_R)R,\\
&\phi \to \exp(\mathrm{i}\alpha T'_\phi)u\phi
\end{aligned} \tag{22.60}$$

不变.这里 $\alpha(x)$是一任意实函数, $u(x)$ 是一任意 $\det u = 1$ 的 2×2 幺正矩阵,

$$\begin{aligned}
&B_\mu \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu,\\
&T'_L = -\frac{1}{2},\quad T'_R = -1,\\
&T'_\phi = \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{22.61}$$

3. **对称性自发破缺** 和(22.5)类似,我们设

$$U(|\phi|) = \frac{\mu^2}{4\rho^2}(\phi^\dagger\phi - \rho^2)^2; \tag{22.62}$$

其形状就和图22.1中所给的一样. U的极小值在$|\phi|=\rho$处. 和(22.7)一样,这说明

$$|\langle 真空 | \phi | 真空 \rangle| = \rho. \tag{22.63}$$

为看清楚这一理论的物理内容,最简单的办法是选取幺正规范. 首先,我们考虑在这一规范下的**经典**理论. 和(22.27)中一样,在任一时空点上我们可以选取规范变换$u(x)$,使(22.60)中最后一个方程式里$\phi(x)$的形式为

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

然后利用相应的$\alpha(x)$我们总能使ϕ_2为实函数. 与(22.28)及(22.30)中第一个方程相类似,我们可以写出

$$\phi_2(x) = \rho + \chi(x),$$

其中$\chi(x)$是一**实数**场. 因此,在幺正规范下,

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho + \chi \end{pmatrix}. \tag{22.64}$$

将此式代入(22.59)中的第三个方程,我们就得到

$$D_\mu \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \chi}{\partial x_\mu} \end{pmatrix} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\rho + \chi) \begin{pmatrix} gB_\mu^x - \mathrm{i}gB_\mu^y \\ -gB_\mu^z + g'C_\mu \end{pmatrix}. \tag{22.65}$$

为方便起见,可定义以下量:

$$W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(B_\mu^x - \mathrm{i}B_\mu^y),$$

$$\overline{W}_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(B_\mu^x + \mathrm{i}B_\mu^y),$$

$$Z_\mu \equiv \cos\theta_w B_\mu^z - \sin\theta_w C_\mu,$$

$$A_\mu \equiv \sin\theta_w B_\mu^z + \cos\theta_w C_\mu$$

以及

$$\tan\theta_w \equiv \frac{g'}{g}, \tag{22.66}$$

这样,(22.65)就成为

$$D_\mu\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial x_\mu} \end{bmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\rho+\chi)g\begin{bmatrix} W_\mu \\ \dfrac{-Z_\mu}{\sqrt{2}\cos\theta_w} \end{bmatrix}. \tag{22.67}$$

拉氏量密度(22.58)是χ, W_μ, $\overline{W}_\mu$, Z_μ, A_μ, ψ_e 和 ψ_ν 的四阶多项式.为找出物理粒子的质量,我们只须研究二阶项部分 $\mathscr{L}_{二阶}$:

$$\mathscr{L}_{二阶} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_m, \tag{22.68}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\overline{W}_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\overline{W}_\mu\right) \\ &\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\lambda\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}Z_\lambda \right.\\ &\left.- \frac{\partial}{\partial x_\lambda}Z_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}A_\mu\right)^2 \\ &- \psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_\nu - \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_e,\end{aligned} \tag{22.69}$$

同时,我们将会看到

$$\mathscr{L}_m = -m_W^2\overline{W}_\mu W_\mu - \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z_\mu - m_e\psi_e^\dagger\gamma_4\psi_e - \frac{1}{2}\mu^2\chi^2,$$

其中

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{g\rho}{\sqrt{2}}, \\ m_Z &= \frac{m_W}{\cos\theta_w}, \\ m_e &= f\rho \end{aligned} \tag{22.70}$$

而 μ 是(22.62)中所定义的.因为 $\mathscr{L}_m$ 中并不包含 A_μ 和 ψ_ν,所以我们得到

$$m_A = 0$$

以及

$$m_\nu = 0; \tag{22.71}$$

即光子和中微子都是零质量的.

4. **轻子与规范场的耦合**　从(22.59),我们看到

$$-L^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu L = -L^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}L + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}L^\dagger\gamma_4\gamma_\mu \cdot \begin{pmatrix} gB_\mu^z - g'C_\mu & gB_\mu^x - \mathrm{i}gB_\mu^y \\ gB_\mu^x + \mathrm{i}gB_\mu^y & -gB_\mu^z - g'C_\mu \end{pmatrix} L \tag{22.72}$$

以及

$$-R^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu R = -R^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}R - \mathrm{i}g'C_\mu R^\dagger\gamma_4\gamma_\mu R.$$

利用(22.66),可将 $\boldsymbol{B}_\mu$ 与 C_μ 按 W_μ, $\overline{W}_\mu$, Z_μ 及 A_μ 的简正模表示出来:

$$B_\mu^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + \overline{W}_\mu),$$

$$B_\mu^y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W_\mu - \overline{W}_\mu),$$

$$B_\mu^z = \sin\theta_\mathrm{w}A_\mu + \cos\theta_\mathrm{w}Z_\mu \tag{22.73}$$

以及

$$C_\mu = \cos\theta_\mathrm{w}A_\mu - \sin\theta_\mathrm{w}Z_\mu.$$

拉氏量密度(22.58)则可写成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{二阶} + \mathscr{L}_{\mathrm{lW}} + \mathscr{L}_{\mathrm{lZ}} + \mathscr{L}_{\mathrm{lA}} + \cdots \tag{22.74}$$

其中的二阶项部分 $\mathscr{L}_{二阶}$ 由(22.68)给出,$\mathscr{L}_{\mathrm{lW}}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{lZ}}$ 及 $\mathscr{L}_{\mathrm{lA}}$ 代表轻子场 ψ_e, ψ_ν 与矢量场 W_μ, Z_μ 及 A_μ 的相互作用. 所有其他的相互作用都放入…中. 将(22.49)—(22.51)和(22.73)代入(22.72),可以验算出

$$\mathscr{L}_{\mathrm{lW}} = \mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}W_\lambda\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e + \mathrm{h.\,c.},$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{lZ}} = \mathrm{i}\,\frac{1}{4}\sqrt{g^2+g'^2}Z_\lambda\{\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu - \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda[(1-4\sin^2\theta_\mathrm{w})+\gamma_5]\psi_e\} \tag{22.75}$$

以及

$$\mathscr{L}_{\text{lA}} = -\,\mathrm{i}g\sin\theta_{\text{w}} A_\lambda \psi_{\text{e}}^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda \psi_{\text{e}}.$$

由于 A_μ 是光子场,电荷 e 和 g, g' 及 θ_{w} 有以下关系,

$$e = g\sin\theta_{\text{w}} = g'\cos\theta_{\text{w}} > 0, \tag{22.76}$$

即如图 22.3 中所示.

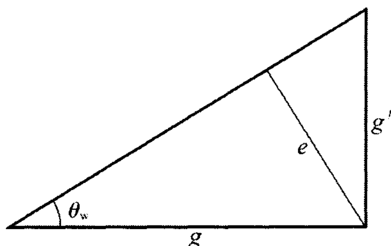


图 22.3 温伯格角 θ_{w} (Weinberg)与耦合常数 e, g 及 g' 的关系 [见(22.66)及(22.76).]

到现在为止,我们只考虑了(e^-, ν_{e})的系统. 为将其他轻子(l^-, ν_l)包括进去,我们用 ψ_{ν_l} 代替 ψ_ν, ψ_l 代替 ψ_{e},以及对任意 4×4 狄拉克矩阵 Γ,用

$$\sum_l \nu_l^\dagger \Gamma \nu_l \equiv \sum_l \psi_{\nu_l}^\dagger \Gamma \psi_{\nu_l}$$

代替 $\psi_\nu^\dagger \Gamma \psi_\nu$,用

$$\sum_l \nu_l^\dagger \Gamma l \equiv \sum_l \psi_{\nu_l}^\dagger \Gamma \psi_l \tag{22.77}$$

代替 $\psi_\nu^\dagger \Gamma \psi_{\text{e}}$,以及用

$$\sum_l l^\dagger \Gamma l \equiv \sum_l \psi_l^\dagger \Gamma \psi_l$$

代替 $\psi_{\text{e}}^\dagger \Gamma \psi_{\text{e}}$,其中求和号包括 $l = e$, μ 和 τ. 这样,(22.74)和(22.75)就变为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{二阶}} + \mathscr{L}_{\text{lW}} + \mathscr{L}_{\text{lZ}} + \mathscr{L}_{\text{lA}} + \cdots$$

其中

$$\mathscr{L}_{\text{lW}} = \frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\lambda j_\lambda^+ + \overline{W}_\lambda j_\lambda^-),$$

$$\mathscr{L}_{\text{lZ}} = \frac{g}{2\sqrt{2}\cos\theta_{\text{w}}} Z_\lambda j_\lambda^0$$

$$\mathscr{L}_{\text{IA}} = -\text{ie}A_\lambda \sum_l l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda l, \tag{22.78}$$

还有

$$j_\lambda^+ = \text{i}\sum_l \nu_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) l,$$

$$j_\lambda^- = \text{i}\sum_l l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \nu_l, \tag{22.79}$$

$$j_\lambda^0 = \frac{\text{i}}{\sqrt{2}} \sum_l [\nu_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \nu_l - l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1 - 4\sin^2\theta_{\text{w}} + \gamma_5) l].$$

[包括夸克在内的 $\mathscr{L}$ 的完整形式参看(22.114).]

5. **二阶过程**　考虑二阶图,如图 22.4 中所给出的,可以导出(22.2)中唯象的拉氏量密度

$$\frac{G}{\sqrt{2}} j_\lambda^+ j_\lambda^- \text{ 和 } \frac{G}{2\sqrt{2}} j_\lambda^0 j_\lambda^0.$$

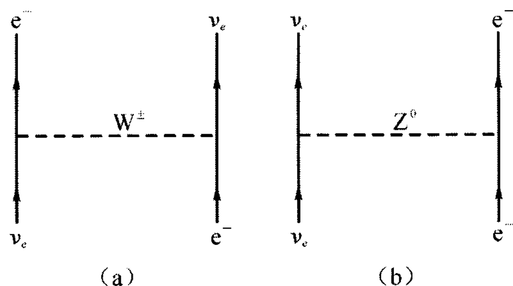


图 22.4　$e\nu_e$ 散射图:(a)交换 $W^\pm$ 的,(b)交换 Z^0 的

从习题 4.2 中,以及按照 5.3 节和 19.1 节上所给论据,我们可以证明,有质量的,1 自旋的玻色子的传播子是

$$-\text{i}\left[\delta_{\lambda\mu} + \left(\frac{q_\lambda q_\mu}{m^2}\right)\right](q^2 + m^2 - \text{i}\epsilon)^{-1} \tag{22.80}$$

其中 $\epsilon = 0^+$. [见本节后面练习 1.]对于像第 21 章中所讨论的低能现象,我们有

$$|q_\lambda| \ll m = m_{\text{W}} \text{ 或 } m_{\text{Z}}.$$

这时,图 22.4 中的玻色传播子就简单地化为

对(a) $-\mathrm{i}\delta_{\lambda\mu}/m_{\mathrm{W}}^2$,

对(b) $-\mathrm{i}\delta_{\lambda\mu}/m_{\mathrm{Z}}^2$.

交换一个 $\mathrm{W}^{\pm}$ 图的二阶振幅可以从 $\mathrm{i}\mathscr{L}_{\mathrm{lW}}(x)\cdot\mathrm{i}\mathscr{L}_{\mathrm{lW}}(y)$ 乘积中将 $\overline{W}_{\lambda}(x)$ 和 $W_{\mu}(y)$ 收缩后得到. 这样的二阶过程可以导出,例如,图 22.4 中(a)图所表示的散射

$$\nu_{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{-}\longrightarrow\nu_{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{-}. \tag{22.81}$$

在 $|q_{\lambda}/m_{\mathrm{W}}|\cong 0$ 的近似下,我们看到这一振幅由下面的矩阵元给出

$$\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{m_{\mathrm{W}}^2}j_{\lambda}^{+}j_{\lambda}^{-}. \tag{22.82}$$

令这一表达式等于(21.2)中相应的唯象密度乘以 i,我们就得到

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_{\mathrm{W}}}\right)^2. \tag{22.83}$$

又因为(22.76),就有

$$m_{\mathrm{W}}^2=\frac{\sqrt{2}e^2}{8G\sin^2\theta_{\mathrm{w}}}\geqslant\frac{\sqrt{2}e^2}{8G}=(37.3\ \mathrm{GeV})^2. \tag{22.84}$$

从(22.70),我们同样还有

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{Z}}^2&=\frac{m_{\mathrm{W}}^2}{\cos^2\theta_{\mathrm{w}}}=\frac{e^2}{\sqrt{2}G\sin^2 2\theta_{\mathrm{w}}}\\&\geqslant\frac{e^2}{\sqrt{2}G}=(74.6\ \mathrm{GeV})^2.\end{aligned} \tag{22.85}$$

同样的,图 22.4 中交换 Z^0 的图所对应的振幅由下面的矩阵元给出:

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{m_{\mathrm{Z}}\cos\theta_{\mathrm{w}}}\right)^2 j_{\lambda}^{0}j_{\lambda}^{0}, \tag{22.86}$$

如果(21.4)中的常数 g_v, g_a 和 g_ν 分别由下式给出:

$$g_v=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-4\sin^2\theta_{\mathrm{w}}),$$

$$g_a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 和 } g_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{22.87}$$

(22.86)就化为(21.2)中的 i 乘以 $Gj_\lambda^0 j_\lambda^0/2\sqrt{2}$.

对于 $\nu_e e^-$ 散射，考虑了(22.79)，(22.83)和(22.85)后，(22.82)和(22.86)中相应的部分就是

$$M_a = -\mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e \cdot \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu$$

和

$$M_b = \mathrm{i}\frac{G}{2\sqrt{2}}\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu \cdot \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda[(1-4\sin^2\theta_w)+\gamma_5]\psi_e.$$

利用菲尔茨(Fierz)恒等式(本节后面的练习 2)

$$\psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu \cdot \psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e = \psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu \cdot \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e, \tag{22.88}$$

我们找到 $\nu_e e^-$ 散射的总振幅是

$$M_a + M_b = -\mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}\psi_\nu^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu \cdot \psi_e^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\left(\frac{1}{2}+2\sin^2\theta_w+\frac{1}{2}\gamma_5\right)\psi_e. \tag{22.89}$$

其次，我们考虑

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$$

以及

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-.$$

这些反应仅由交换 Z^0 的图来决定. 它们的截面，在将(22.87)代入(21.10)后，很容易导出. 从(21.11)的实验值我们发现

$$\sin^2\theta_w = 0.225^{+0.06}_{-0.05}. \tag{22.90}$$

说明.

1. θ_w 的实验值非常接近 30°. 如果我们设

$$\sin^2\theta_w \cong \frac{1}{4} \tag{22.91}$$

则 $g_v \cong 0$，且有

$$j_\lambda^0 \cong \frac{i}{\sqrt{2}}\sum_l [\nu_l^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_l - l^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5 l]. \tag{22.92}$$

这样，带电轻子 $l^\pm$ 的中性流就是纯轴矢的.

2. 按照(22.83)，费米常数 G 的符号为正. 实验上，通过精确测定，例如，下面反应的散射振幅

$$e + e \rightarrow e + e,$$

我们能分析出光子交换与 Z^0 交换图的干涉项，从而定出 G 的符号. [见(22.126).]

练习 1. 利用路径积分收缩(19.70)定义质量为 m 的矢量介子传播子

λ ●------ q ------● μ

证明(22.80). [可参看(24.142)—(24.144).]

练习 2. 对于任意 4×1 c 数列矩阵 ψ_e 与 ψ_ν，证明菲尔茨恒等式(22.88)成立.

22.3 推广到强子

因为强子是复合粒子，它们的流算符要通过夸克场 ψ_q 来表示. 但是 ψ_q 和物理的强子的联系并不像轻子场和物理的轻子那样直接. 这就使得将上述结果从轻子推广到强子变得复杂起来. 为了得到正确的概貌，我们将重复导至现有理论形式的各个步骤.

在 1950 年以前，人们可能设想通过轻子二重态(ν_e, e)和核子二重态(p, n)朴素的相似性将轻子与强子联系起来. 奇异粒子和近似的 SU_3 对称性发现以后，出现了卡比博理论，提出我们应该用(u, d_c)代替(p, n)，这里 u 代表上夸克场 ψ_u，d_c 代表如(21.51)中卡比玻转动的场

$$\psi_{d_c} = \cos\theta_c \psi_d + \sin\theta_c \psi_s, \tag{22.93}$$

其中 θ_c = 卡比玻角.

如果对强子我们只采用(u, d_c)系统,然后利用 22.2.1 节中所给的一些论据,我们将发现,代替轻子弱荷(22.39)的,是强子弱荷*

$$Q^- \sim \int d_c^\dagger(1+\gamma_5) u \mathrm{d}^3 r$$

$$Q^+ \sim \int u^\dagger(1+\gamma_5) d_c \mathrm{d}^3 r. \tag{22.94}$$

它们的对易子是

$$Q^0 \equiv [Q^-, Q^+] \sim 2\int [d_c^\dagger(1+\gamma_5) d_c - u^\dagger(1+\gamma_5) u] \mathrm{d}^3 r \tag{22.95}$$

这里,将和下面一样,夸克场 ψ_q 将简单地记为 q. 因为

$$d_c^\dagger(1+\gamma_5) d_c = \cos^2\theta_c d^\dagger(1+\gamma_5) d + \sin^2\theta_c s^\dagger(1+\gamma_5) s + \cos\theta_c \sin\theta_c [d^\dagger(1+\gamma_5) s + s^\dagger(1+\gamma_5) d],$$

中性"荷"Q^0 将能使奇异数 S 改变为 0 或 ±1. 由于 Q^0 和(22.43)中的 T^z 起同样作用,这就使中性强子流 j_λ^0 满足同样的选择定则:

$$\Delta S = 0 \text{ 和 } \pm 1.$$

但 $GJ_\lambda^0 J_\lambda^0$ 的二阶振幅将包含有 $\Delta S = \pm 2$ 的分量,这却与实验事实不符. [见 15.3 节 2.]而且,还会有强子-轻子中性流相互作用 $GJ_\lambda^0 j_\lambda^0$,这将使下面过程的振幅不可能被压低

$$\mathrm{K}_L^0 \to \mu^+ + \mu^- \text{ 或 } \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-.$$

这一结果和这些衰变极小的分支比 $<10^{-8}$ 相矛盾. [见 523 页.]

1. **GIM 机理**　为克服这一困难,格拉肖,依里奥波洛斯和迈洋尼**

---

* 本章中我们将不明显地给出颜色上标. [见(21.52).]

** 见 511 页上的引文.

建议有粲夸克的存在.带电强子弱流由(21.51)给出,即

$$J_\lambda^- = \mathrm{i}d_c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u + \mathrm{i}s_c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)c$$

以及

$$J_\lambda^+ = \mathrm{i}u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)d_c + \mathrm{i}c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)s_c, \tag{22.96}$$

此处 c 代表粲夸克场 ψ_c, s_c 是

$$\psi_{s_c} = -\sin\theta_c\psi_d + \cos\theta_c\psi_s. \tag{22.97}$$

强子电磁流算符和(21.53)一样,是

$$J_\lambda^{el} = \mathrm{i}\,\frac{2}{3}(u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda u + c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda c) - \mathrm{i}\,\frac{1}{3}(d^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda d + s^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda s) \tag{22.98}$$

代替(22.94),现在强子弱荷是

$$Q^- \equiv -\mathrm{i}\int J_4^- \mathrm{d}^3r = \int[d_c^\dagger(1+\gamma_5)u + s_c^\dagger(1-\gamma_5)c]\mathrm{d}^3r$$

$$Q^+ \equiv -\mathrm{i}\int J_4^+ \mathrm{d}^3r = \int[u^\dagger(1+\gamma_5)d_c + c^\dagger(1-\gamma_5)s_c]\mathrm{d}^3r. \tag{22.99}$$

强子电荷是

$$Q \equiv -\mathrm{i}\int J_4^{el}\mathrm{d}^3r = \int\left[\frac{2}{3}(u^\dagger u + c^\dagger c) - \frac{1}{3}(d^\dagger d + s^\dagger s)\right]\mathrm{d}^3r. \tag{22.100}$$

从(22.93)和(22.97),对任意 4×4 狄拉克矩阵 Γ,可以得到

$$d_c^\dagger\Gamma d_c + s_c^\dagger\Gamma s_c = d^\dagger\Gamma d + s^\dagger\Gamma s. \tag{22.101}$$

这样,Q^- 与 Q^+ 的对易子现在就是

$$\begin{aligned}Q^0 &\equiv [Q^-, Q^+]\\ &= 2\int[d^\dagger(1+\gamma_5)d + s^\dagger(1+\gamma_5)s\\ &\quad - u^\dagger(1+\gamma_5)u - c^\dagger(1+\gamma_5)c]\mathrm{d}^3r,\end{aligned}$$

并将保持奇异数守恒.

和(22.40),(22.43)及(22.46)类似,我们引入

$$T^x \equiv \frac{1}{4}(Q^- + Q^+),$$

$$T^y \equiv \frac{i}{4}(Q^- - Q^+),$$

$$T^z \equiv -i[T^x, T^y]$$

以及

$$T' \equiv Q - T^z. \tag{22.102}$$

因而有

$$\begin{aligned} T^z &= -Q^0/8 \\ &= \frac{1}{4}\int [u^\dagger(1+\gamma_5)u + c^\dagger(1+\gamma_5)c \\ &\qquad - d^\dagger(1+\gamma_5)d - s^\dagger(1+\gamma_5)s]\mathrm{d}^3 r. \end{aligned} \tag{22.103}$$

再让我们定义

$$\psi_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}$$

$$\psi_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}. \tag{22.104}$$

这样，和(22.45)中一样，我们就有

$$T^i = \sum_h \int \psi_h^\dagger \frac{1}{4}(1+\gamma_5)\tau^i \psi_h \mathrm{d}^3 r \tag{22.105}$$

式中 τ^i 是泡利矩阵，求和包括 $h = 1$ 和 2. 利用(22.100)和(22.102)—(22.103)，我们看到

$$T' = \sum_L \int \psi_h^\dagger \left[\frac{1}{4}(1-\gamma_5)\tau^z + \frac{1}{6}\right]\psi_h \mathrm{d}^3 r \tag{22.106}$$

生成元 T^i 和 T'满足对易关系(22.44)和(22.47). 这样，就和以前一样，我们有同样的 $SU_2 \times U_1$ 群. 和(22.51)类似，我们引进

$$L_h \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_h \tag{22.107}$$

使 $h = 1$ 时，

$$L_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}$$

和 $h = 2$ 时

$$L_2 = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}.$$

和在(22.50)中一样,我们定义

$$R_q \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q, \tag{22.108}$$

其中 q = u, d, s 和 c.

用 q_L 和 q_R 代表产生算符$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)q^\dagger$ 和$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)q^\dagger$ 作用到真空上产生的单粒子态. 这些态都是 T, T^z, Q,因而也是 T'的本征态. 我们有

	T	T^z	Q	T'
u_L 或 c_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
d_L 或 s_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
u_R 或 c_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R 或 s_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

. (22.109)

由于夸克有强相互作用,这些态同时也是同位旋 I,它的 z 分量 I^z,重子数 N,奇异数 S,粲数 C,以及一新的超荷 Y 的本征态. 超荷 Y 定义为*

$$Y = N + S + C.$$

将这些态的强作用量子数列出表来也很有意思:

	I	I^z	N	S	C	Y
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
s	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{2}{3}$
c	0	0	$\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$

.

* 与(11.89)比较.

因为强相互作用保持宇称守恒,这些量子数就仅仅依赖于夸克状态 q,而与其螺旋度 L 或 R 的下标无关. 从(21.121)我们看到:同一代的夸克有着相同的 Y.

在小林-益川模型(21.10 节)范围内将理论推广到 b 和 t 夸克是直截了当的,因而此处从略.

2. **拉格朗日密度**　除了(22.107)—(22.108)所给出的夸克场 L_h 和 R_q 外,还有轻子场 L_l, R_l,规范场 $\boldsymbol{B}_\mu$, C_μ 以及希格斯场 ϕ. 为了和(22.77)所用符号相一致,我们定义

$$L_l \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu_l\\ l\end{pmatrix}$$

$$R_l \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)l \tag{22.110}$$

并从而将(22.50)和(22.51)加以推广. 式中 $l=\mathrm{e}$, μ 和 τ. 和以前一样,对应每一个生成元 T^i 或 T'有一规范场 B_μ^i 或 C_μ. 希格斯场 ϕ 仍由(22.55)给定. 而且,引进希格斯场的共轭场 $\bar{\phi}$ 将十分有用:

$$\bar{\phi} \equiv \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}\tau^y\right)\cdot \phi^\dagger \text{ 的转置}. \tag{22.111}$$

这样,对于

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix};\ \phi^\dagger = (\phi_1^\dagger,\ \phi_2^\dagger)$$

相应的 $\bar{\phi}$ 是

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix}\phi_2^\dagger\\ -\phi_1^\dagger\end{pmatrix} \tag{22.112}$$

从(11.38)—(11.39)我们看到 $\bar{\phi}$ 和 ϕ 一样,同属于 $T=\dfrac{1}{2}$ 表示;然而

$$T'(\bar{\phi}) = -T'(\phi).$$

在整体的 $SU_2\times U_1$ 变换下,$\boldsymbol{B}_\mu$, C_μ, L_l, … 中每一个场都属于 $(T,\ T')$的不可约表示,从(22.53),(22.56)和(22.109),我们发现

	$\boldsymbol{B}_\mu$	C_μ	ϕ	$\bar{\phi}$	L_l	R_l
T	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
T'	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

以及 (22.113)

	L_h	R_u	R_d	R_s	R_c
T	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
T'	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

.

对于这一系统,完整的拉氏量密度(QCD 除外)是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}= & -\frac{1}{4}\boldsymbol{B}_{\mu\nu}^2-\frac{1}{4}C_{\mu\nu}^2-R_1^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu R_1 \\ & -L_1^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu L_1-R_q^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu R_q \\ & -L_h^\dagger\gamma_4\gamma_\mu D_\mu L_h-(\bar{D}_\mu\phi^\dagger)D_\mu\phi \\ & -U(|\phi|)+\mathscr{L}_{1\phi}+\mathscr{L}_{q\phi}\end{aligned} \tag{22.114}$$

式中 $\boldsymbol{B}_{\mu\nu}$ 和 $C_{\mu\nu}$ 由(22.54)给定,$\bar{D}_\mu\phi^\dagger$ 和协变微商 D_μ 由(22.59)给出,即

$$D_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu T-\mathrm{i}g'C_\mu T' \tag{22.115}$$

其中的 T 和 T' 已在(22.113)中列出. 在(22.114)中重复指标代表求和,并且和以前一样,$\mathrm{l}=\mathrm{e}$, μ 和 τ, $h=1, 2$, $\mathrm{q}=\mathrm{u}, \mathrm{d}, \mathrm{s}, \mathrm{c}$. 位势 $U(|\phi|)$ 由(22.62)给定,因而幺正规范(22.64)仍然适用,即是

$$\phi=\begin{pmatrix}0\\ \rho+\chi\end{pmatrix} \tag{22.116}$$

其中 χ 是一厄米场,ρ 是正实数常数. 这样,从(22.112)可得出

$$\bar{\phi}=\begin{pmatrix}\rho+\chi\\ 0\end{pmatrix} \tag{22.117}$$

利用(22.58)以及(22.70)最后一个方程,我们看到轻子-希格斯相互作用 $\mathscr{L}_{l\phi}$ 是

$$\mathscr{L}_{l\phi} = -\sum_{l} \frac{m_l}{\rho}(L_l^{\dagger}\gamma_4 R_\lambda \phi + \text{h. c.}), \tag{22.118}$$

式中 m_l 是带电轻子 $l^{\pm}$ 的质量.[中微子质量全部假定为零.]因为没有一个夸克是真正无质量的,所以夸克-希格斯相互作用 $\mathscr{L}_{q\phi}$ 较为复杂.令 m_q 代表夸克 q 的质量*,我们能写下

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{q\phi} = & -\frac{m_u}{\rho}[L_1^{\dagger}\gamma_4 R_u \bar{\phi} + \text{h. c.}] \\ & -\frac{m_d}{\rho}[(\cos\theta_c L_1 - \sin\theta_c L_2)^{\dagger}\gamma_4 R_d \phi + \text{h. c.}] \\ & -\frac{m_s}{\rho}[(\sin\theta_c L_1 + \cos\theta_c L_2)^{\dagger}\gamma_4 R_s \phi + \text{h. c.}] \\ & -\frac{m_c}{\rho}[L_2^{\dagger}\gamma_4 R_c \bar{\phi} + \text{h. c.}].\end{aligned} \tag{22.119}$$

从(22.113)我们看到 $\mathscr{L}_{q\phi}$ 在 T' 转动下不变.在 $\overline{T}$ 的转动下,ϕ, $\bar{\phi}$, L_1 和 L_2 的变换相同,因而 $\mathscr{L}_{q\phi}$ 也不变.这一点是很容易验证的,因为有(22.107)—(22.108),(22.110)以及(22.116)—(22.117),

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{l\phi} &= -\sum_{l} m_l l^{\dagger}\gamma_4 l + \cdots \\ \mathscr{L}_{q\phi} &= -\sum_{q} m_q q^{\dagger}\gamma_4 q + \cdots\end{aligned} \tag{22.120}$$

这里…代表希格斯场 χ 与费米场 l 及 q 的三次项.

和(22.60)中一样,拉氏量密度(22.114)在下面的定域规范变换下也是不变的

$$B_\mu \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu \to u B_\mu u^{\dagger} + \frac{\mathrm{i}}{g} u \frac{\partial u^{\dagger}}{\partial x_\mu},$$

$$C_\mu \to C_\mu + \frac{1}{g'}\frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu},$$

---

* 此处和第 20 章中一样,m_q 只代表在强子内部的夸克质量.

$$L_1 \to e^{i\alpha T'} u L_1,\ R_1 \to e^{i\alpha T'} R_1,$$

$$R_h \to e^{i\alpha T'} u R_h,\ R_q \to e^{i\alpha T'} R_q,$$

$$\phi \to e^{i\alpha T'} u \phi, \tag{22.121}$$

其中不同场的 T' 值已在(22.113)中列出. W_μ, Z_μ 和 A_μ 的简正模仍然由(22.66)给定,它们的质量由(22.70)—(22.71)给定.

3. **夸克和规范场耦合** 轻子与规范场的相互作用项 $\mathscr{L}_{lW}$, $\mathscr{L}_{lZ}$和 $\mathscr{L}_{lA}$ 已由(22.78)—(22.79)给出. 同样,我们也能导出相应的夸克与规范场的相互作用项 $\mathscr{L}_{qW}$, $\mathscr{L}_{qZ}$和 $\mathscr{L}_{qA}$来. 注意到如果我们将每个夸克的电荷都平均地移动 $-\frac{2}{3}$,则 u 和 d_c(或 c 与 d_s)的 Q 就会和 ν_e 及 e(或者 ν_μ 与 μ)的一样. 这样的移动不改变 T,而仅使每个夸克的 T' 同样改变 $-\frac{2}{3}$. 由于这一移动,在拉氏量密度中也有一相应的变化

$$i\,\frac{2}{3}\,g'C_\lambda\Big[\sum_h L_h^\dagger \gamma_4\gamma_\lambda L_h + \sum_q R_q^\dagger \gamma_4\gamma_\lambda R_q\Big]$$

$$= i\,\frac{2}{3}g'(\cos\theta_w A_\lambda - \sin\theta_w Z_\lambda)\sum_q q^\dagger \gamma_4\gamma_\lambda q, \tag{22.122}$$

因此,在(22.78)—(22.79)中作如下变动:

$$(\nu_e,\ e) \to (u,\ d_c)$$

及

$$(\nu_\mu,\ \mu) \to (c,\ s_c).$$

并且将(22.122)包括进来,我们发现

$$\mathscr{L}_{qW} = \frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\lambda J_\lambda^+ + \overline{W}_\lambda J_\lambda^-),$$

还有

$$\mathscr{L}_{qZ} = \frac{g}{2\sqrt{2}\cos\theta_w} Z_\lambda J_\lambda^0, \tag{22.123}$$

$$\mathscr{L}_{qA} = eA_\lambda J_\lambda^{el},$$

其中 $g = e/\sin\theta_w$, 而且与(21.51)及(21.53)中一样,

$$J_\lambda^+ = \mathrm{i}u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)d_c + \mathrm{i}c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)s_c,$$

$$J_\lambda^- = \mathrm{i}d_c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u + \mathrm{i}s_c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)c$$

以及

$$J_\lambda^{el} = \mathrm{i}\,\frac{2}{3}(u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda u + c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda c) - \mathrm{i}\,\frac{1}{3}(d^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda d + s^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda s); \qquad (22.124)$$

并且还有

$$\begin{aligned} J_\lambda^0 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big[& u^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w+\gamma_5\right)u \\ & + c^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w+\gamma_5\right)c \\ & - d^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w+\gamma_5\right)d \\ & - s^\dagger\gamma_4\gamma_\lambda\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w+\gamma_5\right)s\Big]. \end{aligned}$$

在导出 J_λ^{el} 及 J_λ^0 中,我们利用了恒等式

$$g'\cos\theta_w = e \text{ 以及 } g' = g\tan\theta_w.$$

4. **二阶过程**　在很小的 4 动量传递时,交换 $W^\pm$ 和 Z^0 的二阶图和(21.113)类似,给出下面的有效拉氏量

$$\mathscr{L}_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left[(J_\lambda^+ + j_\lambda^+)(J_\lambda^- + j_\lambda^-) + \frac{1}{2}(J_\lambda^0 + j_\lambda^0)(J_\lambda^0 + j_\lambda^0)\right], \qquad (22.125)$$

作为对 J_λ^0 及 j_λ^0 形式的一个灵敏的检验,就是 21.7.3 节中所讨论过的电子-氘核散射实验中的宇称破坏. 可以证明*,(21.110)的不对称参数 A 由下式(见习题 22.3)给出:

* Cahn RN, Gilman FJ. *Phys Rev*, 1978, **D17**: 1313.

$$\frac{A}{k^2}=-\frac{9G}{5\sqrt{2}e^2}\left[\left(1-\frac{20}{9}\sin^2\theta_w\right)\right.$$

$$\left.+(1-4\sin^2\theta_w)\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right], \qquad (22.126)$$

其中 $k^2=(4$ 动量传递$)^2$. 从(21.111)所给的实验值中,我们定出

$$\sin^2\theta_w=0.224\pm0.02, \qquad (22.127)$$

这与(22.90)是相符的.

习题 22.1. 令

$$\mathscr{L}_{lZ}+\mathscr{L}_{qZ}\equiv eZ_\lambda\mathscr{J}_\lambda^0$$

是由(22.78)—(22.79)和(22.123)—(22.124)所给出的轻子-Z 与夸克-Z 的相互作用之和.

(i) 证明与 Z 耦合的弱中性荷

$$Q^Z\equiv-i\int\mathscr{J}_4^0\,d^3r,$$

与 T^z 及电荷 Q 有以下关系

$$Q^Z=\frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}(T^z-Q\sin^2\theta_w). \qquad (22.128)$$

(ii) 对于不同的左手及右手的轻子与夸克,作出下面的表:

	$Q^Z\sin\theta_w\cos\theta_w/e$
ν_l	$\frac{1}{2}$
l_L	$-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_w$
l_R	$\sin^2\theta_w$
u_L 或 c_L	$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_w$
u_R 或 c_R	$-\frac{2}{3}\sin^2\theta_w$
d_L 或 s_L	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_w$
d_R 或 s_R	$\frac{1}{2}\sin^2\theta_w$

习题 22.2 考虑一电子和一夸克的弹性散射

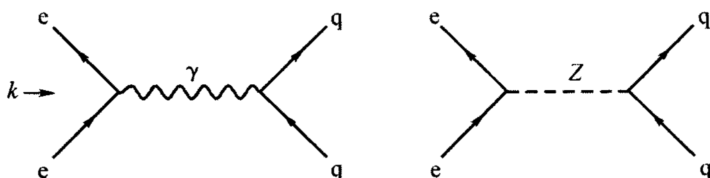


图 22.5 经由 γ 与 Z 的 e+q → e+q 的费恩曼图

$$e + q \to e + q.$$

其费恩曼图在图 22.5 中给出. 在高能时以及在质心系中我们可略去所有质量. 因此, 这些粒子的螺旋度, 左(L)及右(R)在碰撞时保持不变.

(i) 证明对于左手的电子和左手的夸克, 其微分截面 $d\sigma(e_L q_L)$ 正比于

$$\left| \frac{Q(e)Q(q)}{k^2} + \frac{Q^Z(e_L)Q^Z(q_L)}{k^2 + m_Z^2} \right|^2$$

这里 k 是 4 动量传递, Q^Z 代表弱中性荷, Q 代表电荷.

(ii) 利用习题 5.4, 证明对于不同的螺旋度, 微分截面满足

$$d\sigma(e_L q_R) \propto \left| \frac{Q(e)Q(q)}{k^2} + \frac{Q^Z(e_L)Q^Z(q_R)}{k^2 + m_Z^2} \right|^2 (1-y)^2,$$

$$d\sigma(e_R q_R) \propto \left| \frac{Q(e)Q(q)}{k^2} + \frac{Q^Z(e_R)Q^Z(q_R)}{k^2 + m_Z^2} \right|^2,$$

$$d\sigma(e_R q_L) \propto \left| \frac{Q(e)Q(q)}{k^2} + \frac{Q^Z(e_R)Q^Z(q_L)}{k^2 + m_Z^2} \right|^2 (1-y)^2,$$

其中的比例常数完全一样. 和(21.110)—(21.111)中一样, 参量 y 和始末态电子在实验室中能量 E_{in}, E_f 有以下关系

$$y = \frac{E_{in} - E_f}{E_{in}}.$$

习题 22.3. 在极化电子对-非极化氘核的散射中, 不对称参数 A 由(21.108)定义为

$$A = \frac{d\sigma(e_R) - d\sigma(e_L)}{d\sigma(e_R) + d\sigma(e_L)}.$$

略去强相互作用, 证明到 $\frac{k^2}{m_Z^2}$ 的一阶, 不对称参数 A 由(22.126)给定,

即是：

$$A=-\frac{9}{10}\frac{k^2}{m_Z^2\sin^2 2\theta_w}\left[1-\frac{20}{9}\sin^2\theta_w\right.$$
$$\left.+\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}(1-4\sin^2\theta_w)\right].$$

参 考 文 献

Proceedings of the IX International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Fermilab, 1979. ed. Kirk TBW, Abarbanel HDI.

第 23 章　夸克-部分子模型及高能过程

23.1　无标度近似

先考虑单举轻子反应

$$l^- + N \rightarrow l^- + \cdots \tag{23.1}$$

及

$$\nu_l(\text{或 } \bar{\nu}_l) + N \rightarrow l^{\mp} + \cdots, \tag{23.2}$$

其中 N 表示核子 n 或 p，l 可以是 e、μ 或 τ，"…"表示对所有可能的终态强子道求和. 图 23.1 中给出了这些反应的费恩曼图. 与(21.71)式一样，设

$$\begin{aligned} k,\ k' &= \text{初态及终态轻子的 4 动量}, \\ p &= \text{初态核子的 4 动量}, \\ p' &= \text{终态强子体系的 4 动量}, \\ q &= k - k' = p' - p \text{ 是 4 动量传递}. \end{aligned} \tag{23.3}$$

本章全都采用 21.6 节中所用的记号.

对于 l^- 反应(23.1)，Z 交换图(a')的振幅与 γ 交换图(a)的振幅之比是

$$\approx \frac{q^2}{q^2 + m_Z^2}.$$

其中 m_Z 是 Z^0 的质量. 因此，$q^2 \ll m_Z^2$ 时，Z 交换图可以忽略. 按照(21.148)式，在轻子质量为零的极限下，单举截面为

$$d^2\sigma_{lN} = \frac{m_N E_l}{2\pi}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 dx dy\Big[xy^2 F_1^{el}(q^2, x) + \left(1 - y - \frac{m_N}{2q_0}xy^2\right)F_2^{el}(q^2, x)\Big] \tag{23.4}$$

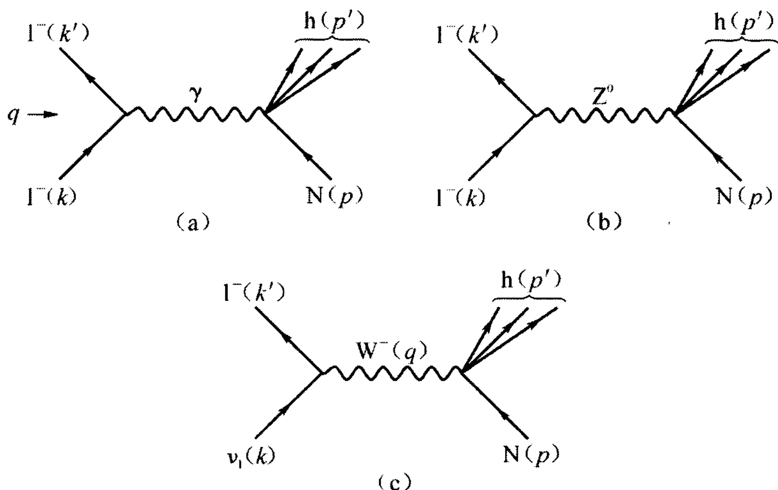


图 23.1 轻子反应(23.1)—(23.2)的图

其中 m_N 是核子质量,E_l 是实验室系中初态 l^- 的能量,

$$x = -\frac{q^2}{2q \cdot p} \quad \text{及} \quad y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p} \tag{23.5}$$

与(21.75)式定义的一样. x 和 y 两者都无量纲,并且都可以在 0 与 1 之间变化.

同样,在轻子质量为零的极限下,并且忽略 $q^2/(W\text{ 质量})^2$ 时,按照(21.95)式,单举中微子(或反中微子)反应(23.2)的微分截面是

$$d^2\sigma_{\nu N} = \frac{m_N E_\nu}{\pi}G^2 dx dy\Big[xy^2 F_1(q^2, x) + \left(1 - y - \frac{m_N}{2q_0}xy^2\right)F_2(q^2, x) \pm xy\left(1 - \frac{1}{2}y\right)F_3(q^2, x)\Big] \tag{23.6}$$

其中 E_ν 是实验室系中初态中微子的能量,G 是费米常数. 上面的符号是

ν_l 反应的,下面的是 $\bar{\nu}_l$ 反应的.

上面的表达式中, $F_a^{el}(q^2, x)$ 及 $F_i(q^2, x)$ $(a=1, 2;\ i=1, 2, 3)$ 称为核子的结构函数.[见(21.96)式及习题 21.6—21.8].无标度近似 * 假定,在任一给定的 x 处,当 $q^2 \gg m_N^2$ 时,这些结构函数可以近似地看成与 q^2 无关,即

$$F_a^{el}(q^2, x) \cong F_a^{el}(x),$$

$$F_i(q^2, x) \cong F_i(x). \tag{23.7}$$

既然可以直接测量 F_a^{el} 及 F_i,这一近似的正确性就容易检验. 372—373 页画出了对于不同的 x 值某些结构函数的实验值与 q^2 的关系. 正如我们可以看到的,对于 q^2 从几$(\mathrm{GeV})^2$ 到大约 $20(\mathrm{GeV})^2$ 这一区域,无标度近似相当好,在 $20(\mathrm{GeV})^2$ 以上则有系统的偏离. 量子色动力学中,由于胶子造成的辐射修正,可期望有这样的偏离. 遵循类似于 8.7 节中给出的那些论证,我们可以证明,修正项是

$$\frac{g^2}{4\pi}\ln q^2 \tag{23.8}$$

量级,其中 g 是强子内部的夸克-胶子耦合. 按照(20.72)及(20.79)式, $\alpha_c = g^2/4\pi$ 不是大数. 因为 $\ln q^2$ 是 q^2 的慢变函数,(23.8)式几乎是常数,至少对于有限的 q^2 区域是这样,这就解释了无标度假设的近似正确性**.

对于 $q^2 \gg m_N^2$, 从(21.81)式,我们有 $\dfrac{m_N}{q_0} \ll 1$, 因此,在无标度近似下,(23.4)及(23.5)式成为

$$\mathrm{d}^2\sigma_{lN} = \frac{m_N E_l}{2\pi}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y[xy^2 F_1^{el}(x) + (1-y)F_2^{el}(x)] \tag{23.9}$$

及

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\nu N} = \frac{m_N E_\nu}{\pi} G^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big[xy^2 F_1(x) + (1-y)F_2(x)$$

* Bjorken JD. *Phys Rev*, 1969, **179**: 1547.

** 593—594 页上进一步提到此点.

$$\pm xy\left(1-\frac{1}{2}y\right)F_3(x)\Big] \tag{23.10}$$

其中,如前面一样,对于 ν_l 反应是+号,对于 $\bar{\nu}_l$ 反应是一号.

回想起为了描写单举中微子反应(23.2)的运动学特征,需要三个独立变量,它们可以取为

$$E_\nu,\ x\ 及\ y.$$

既然 x 及 y 的定义域都是从 0 到 1,与 E_ν 无关,无标度近似(23.10)式意味着总单举中微子(或反中微子)截面必定正比于 E_ν. 其比例常数等于

$$(0.63\pm0.02)\times10^{-38}\ \mathrm{cm^2/GeV}\ (对于\ \nu_\mu\ 反应), \tag{23.11}$$

$$(0.30\pm0.01)\times10^{-38}\ \mathrm{cm^2/GeV}\ (对于\ \bar{\nu}_\mu\ 反应), \tag{23.12}$$

两个数值都是对单个靶核子而言,且对其同位旋取了平均. [亦见 8.5 节给出的讨论.]

如(21.146)式一样,我们可以定义

$$L(x)\equiv x\left(F_1+\frac{1}{2}F_3\right)\Big/F_2$$

及 (23.13)

$$R(x)\equiv x\left(F_1-\frac{1}{2}F_3\right)\Big/F_2,$$

于是(23.10)式成为:

对于中微子反应

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\nu\mathrm{N}}=\frac{m_\mathrm{N}E_\nu}{\pi}G^2\mathrm{d}x\mathrm{d}yF_2[1-y+yL-y(1-y)R], \tag{23.14}$$

对于反中微子反应

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\bar{\nu}\mathrm{N}}=\frac{m_\mathrm{N}E_\nu}{\pi}G^2\mathrm{d}x\mathrm{d}yF_2[1-y+yR-y(1-y)L]. \tag{23.15}$$

练习.

考虑 $q^2=O(m_\mathrm{W}^2)$ 及 $O(m_\mathrm{Z}^2)$ 区域. 假定无标度近似对于核子是正确的,

用图 23.1 并且包括进整个 Z 及 W 传播子，导出 $d^2\sigma_{lN}$ 及 $d^2\sigma_{\nu N}$ 的表达式.

23.2　夸克-部分子模型

我们现在将考察在无标度近似下结构函数 $F_a^{el}(x)$ 及 $F_i(x)$ 的物理解释.

1. **部分子图像**　让我们将(23.1)或(23.2)表示为

$$l(k)+N(p)\to l(k')+\cdots, \tag{23.16}$$

其中 $l(k)$ 及 $l(k')$ 代表初态和终态轻子，每个轻子都既可以是中性的，也可以是带电的. k, p 及 k' 仍然表示(23.3)式给出的 4 动量. 在夸克模型中，核子是三个 u 或 d 夸克加上夸克对及胶子(即颜色规范场量子)的复合粒子：

$$\begin{aligned}\text{质子}&=\text{uud}+\text{夸克对}+\text{胶子},\\ \text{中子}&=\text{ddu}+\text{夸克对}+\text{胶子},\end{aligned} \tag{23.17}$$

其中前三个，即质子中的 uud 或者中子中的 ddu，称为价夸克，其余的称为海. 与夸克不同，胶子不直接与电磁场及弱中间玻色场作用. 因为胶子是无味的，在海中，对于每个味为 f 的夸克，必有一个味为 $\bar{f}$ 的反夸克. 有时，采用质心系是方便的. 在此系统中，当总能量很高时，初态核子的三维动量 $\boldsymbol{p}$ 也很高. 当

$$\boldsymbol{p}\to\infty \tag{23.18}$$

时，在碰撞中我们可以忽略夸克-胶子相互作用，从而可以简单地把夸克及胶子当成自由粒子. 费恩曼称它们为部分子*. [这类似于，比如说，高能原子碰撞中所用的脉冲近似思想.]于是，反应(23.16)成为下列形式的“弹性过程”的叠加：

---

* Feynmann RP. *Phys Rev Lett*, 1969, **23**: 1415; Proceedings of the Third International Conference on High-energy Collisions at Stony Brook. New York: Gordon and Breach, 1969;

Bjorken JD, Paschos EA. *Phys Rev*, 1969, **185**: 1975.

$$\text{l}(k)+\text{夸克}(P)\rightarrow \text{l}(k')+\text{夸克}(P'),\tag{23.19}$$

其中"夸克"代表一个夸克或一个反夸克，P 及 P' 为其初态及终态 4 动量. 因为不同的终态夸克道不干涉，所以，非弹性 l-核子反应(23.16)的单举截面可以写为"弹性"l-夸克截面之和. 用此近似并忽略初态及终态夸克之间的质量差(当它们有不同的味时)，我们有

$$P^2=P'^2.$$

由

$$P'-P=k-k'=q,$$

可以得到

$$q^2+2q\cdot P=0.$$

此式与(23.5)中第一个式子一起导致

$$x=\frac{q\cdot P}{q\cdot p},\tag{23.20}$$

选 z 轴平行于 $\boldsymbol{p}$. 4 动量 p 和 P 可以写为:

$$p=(0,\ 0,\ p_z,\ \mathrm{i}p_0)$$

及

$$P=(P_x,\ P_y,\ P_z,\ \mathrm{i}P_0),$$

其中

$$p_0=\sqrt{p_z^2+m_{\mathrm{N}}^2},\tag{23.21}$$

$$P_0=\sqrt{P_\perp^2+P_z^2+m_{\mathrm{q}}^2},$$

$$P_\perp^2=P_x^2+P_y^2,$$

m_{q} 是夸克在核子内的质量. 极限(23.18)式在此系中成为:

$$p_z\rightarrow\infty,\tag{23.22}$$

这个坐标系称为无限大动量系. 既然夸克是核子的组分，在此系中，P_z 也必定→∞. 不过，夸克的动量在 x 及 y 方向仍是有限的:

$$P_\perp=O(R^{-1}),$$

其中 R 是核子口袋的半径. 于是，从(23.21)—(23.22)式，我们有

$$p_0 = p_z + O(m_N^2/p_z)$$

及

$$P_0 = P_z + O(m_q^2/P_z,\ P_\perp^2/P_z).$$

此式意味着,当 $\boldsymbol{p}\to\infty$ 时,4 动量 p 与 P 平行. 把这一结论与(23.20)式结合起来,我们看到,在无限大动量系中

$$P_\mu = xp_\mu. \tag{23.23}$$

参数 x 现在得到了另一种物理意义. 起先,在单举 l-核子过程(23.16)中,

$$x \equiv -\frac{q^2}{2q\cdot p}$$

是由该反应的具体运动学组态确定的一个参数. 另一方面,按照(23.23)式,在核子有无限大动量的坐标系中,x 也是该夸克所携带的动量占核子动量的比例数. 正如我们将看到的,把 x 的这两种定义放在一起导致了结构函数的新解释.

2. *夸克分布函数* 在核子的无限大动量系中,令 $u(x)\mathrm{d}x$ 为找到一个 u 夸克其动量占核子总动量的比例在 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间的概率. 同样,$\bar{u}(x)$、$d(x)$、$\bar{d}(x)$、$s(x)$、……是相应的 $\bar{\mathrm{u}}$ 夸克、d 夸克、$\bar{\mathrm{d}}$ 夸克、s 夸克……的概率. 这些函数称为夸克分布函数.

质子中有两个价 u 夸克及一个价 d 夸克,因此

$$\int[u(x)-\bar{u}(x)]\mathrm{d}x = 2,$$

$$\int[d(x)-\bar{d}(x)]\mathrm{d}x = 1, \tag{23.24}$$

对于中子,u 和 d 对换.

因为核子中没有价 s 夸克,所以有

$$\int[s(x)-\bar{s}(x)]\mathrm{d}x = 0. \tag{23.25}$$

同样,我们发现

$$\int[c(x)-\bar{c}(x)]\mathrm{d}x = 0,$$

对于 b 及 $\bar{\mathrm{b}}$ 夸克,也有类似的关系式.

上面所有的对于 x 的积分都是从 0 到 1. 下一节中,我们将讨论这些夸克分布函数如何与结构函数 $F_a^{el}(x)$ 及 $F_i(x)$ 发生关系.

23.3 深度非弹性 e-核子散射

在文献中,e 和 N 之间的高能单举非弹性散射常常被称为深度非弹性散射. 按照夸克-部分子图象,我们现在将这一过程分解为电子与味为 f 的夸克间的弹性散射:

$$\mathrm{e}(k) + \text{夸克}(P) \to \mathrm{e}(k') + \text{夸克}(P'), \tag{23.26}$$

其中,与(23.19)式一样,k、P、k' 及 P' 表示相应的 4 动量. (23.26)的(质心能量)^2 为

$$s^2 \equiv -(k+P)^2 = -2k\cdot P + m_{\mathrm{q}}^2 + m_{\mathrm{e}}^2,$$

这里,正如前面一样,m_{q} 是夸克在核子内的质量,m_{e} 是电子质量. 在很高能量时,$s\to\infty$,我们可以设

$$\frac{m_{\mathrm{q}}^2}{2k\cdot P} = 0,\ \frac{m_{\mathrm{e}}^2}{2k\cdot P} = 0. \tag{23.27}$$

应用习题 6.2,并且只考虑 γ 交换图(也就是说,为简单起见,忽略 Z 交换图),我们发现,(23.26)的微分截面是

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{ef}} = \frac{\mathrm{d}q^2}{4\pi}\left(\frac{e_f e}{q^2}\right)^2\left[1+\left(\frac{q^2}{2k\cdot P}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2k\cdot P}\right)^2\right], \tag{23.28}$$

其中 f 表示夸克的味,e_f 为其电荷. 从(23.5)式及 $P = xp$,我们看到

$$xy = -\frac{q^2}{2k\cdot p} = -\frac{xq^2}{2k\cdot P}$$

这里,正如(23.16)一样,p 是初态核子的 4 动量. 因此,

$$y = -\frac{q^2}{2k\cdot P}, \tag{23.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}y} = -2k\cdot P = -2xk\cdot p.$$

于是，微分截面(23.28)式可以写为：

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{ef}} = \frac{\mathrm{d}y}{2\pi}\left(\frac{e_f e}{q^2}\right)^2(-xk\cdot p)\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right). \tag{23.30}$$

令 $f(x)$为核子内味为 f 的夸克(或反夸克)分布函数，

$$f = \mathrm{u},\ \mathrm{d},\ \mathrm{s},\ \mathrm{c},\ \bar{\mathrm{u}},\ \bar{\mathrm{d}}\cdots, \tag{23.31}$$

用 $f(x)\mathrm{d}x$ 乘(23.30)式并对不同的味求和，我们得到深度非弹性 eN 截面为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sigma_{\mathrm{eN}} &= \sum_f f(x)\mathrm{d}x\sigma_{\mathrm{ef}}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2(-k\cdot p)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sum_f\left(\frac{e_f}{e}\right)^2\\ &\quad\times xf(x)\left[1-y+\frac{1}{2}y^2\right],\end{aligned} \tag{23.32}$$

比较(23.9)及(23.32)式，即可得到核子结构函数与夸克分布函数的关系. 我们发现

$$2xF_1^{\mathrm{el}}(x) = F_2^{\mathrm{el}}(x),$$

$$F_2^{\mathrm{el}}(x) = \sum_f\left(\frac{e_f}{e}\right)^2 xf(x), \tag{23.33}$$

因此，对于 ep 碰撞，相应的 $F_2^{\mathrm{el}}(x)$为

$$\begin{aligned}(F_2^{\mathrm{el}}(x))_{\mathrm{p}} = x\Big\{&\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]\\ &+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]\Big\},\end{aligned} \tag{23.34}$$

其中，为简单起见，我们忽略了 b 及 $\bar{\mathrm{b}}$ 分布. 同样，对于 en 碰撞，相应的 $F_2^{\mathrm{el}}(x)$是

$$\begin{aligned}(F_2^{\mathrm{el}}(x))_{\mathrm{n}} = x\Big\{&\frac{4}{9}[d(x)+\bar{d}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]\\ &+\frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]\Big\},\end{aligned} \tag{23.35}$$

此式以及以下各式中，$u(x)$、$\bar{u}(x)$、$d(x)$、$\bar{d}(x)$ …总是指**质子**态中的分布

函数[因此,例如,(21.35)式中的 $d(x)$ 等于中子中的 u 夸克分布函数].

我们要强调,x 按其定义是标量,结构函数及夸克分布函数也是标量.它们在任何洛伦兹变换下不变.不过,只有在无限大动量系中,这些分布函数 $u(x)$、$d(x)$、…才获得 583 页上给出的概率解释.

23.4 高能中微子反应

用同样的方法,我们可以把高能非弹性中微子反应

$$\nu(k)+\mathrm{N}(p)\rightarrow \mathrm{l}(k')+\cdots$$

及

$$\bar{\nu}(k)+\mathrm{N}(p)\rightarrow \mathrm{l}(k')+\cdots \tag{23.36}$$

分解为 ν(或 $\bar{\nu}$)与自由夸克弹性散射的不相干混合.在(23.36)中,终态 l 可以是任何轻子,中性的或带电的都可以,ν 代表任何中微子,ν_e、ν_μ 或 ν_τ 都可以.正如(23.32)式一样,(23.36)的微分截面可以写为

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\nu\mathrm{N}}=\sum_f f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma_{\nu f}$$

及

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\bar{\nu}\mathrm{N}}=\sum_f f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}f}, \tag{23.37}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_{\nu f}$ 及 $\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}f}$ 是 ν_l 及 $\bar{\nu}_l$ 对味为 f 的夸克的弹性截面.求和对(23.31)式给出的所有 f 进行.

1. **中微子-夸克截面** 为导出 $\mathrm{d}\sigma_{\nu f}$ 及 $\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}f}$,让我们以下列过程为例:

$$\nu_l(k)+\mathrm{d}(P)\rightarrow \mathrm{l}^-(k')+\mathrm{u}(P')$$

及

$$\bar{\nu}_l(k)+\mathrm{u}(P)\rightarrow \mathrm{l}^+(k')+\mathrm{d}(P'). \tag{23.38}$$

从习题 5.4 及(22.124)式,我们看到,在(5.128)式中取

$$C_V=C_A=G\cos\theta_c$$

即可得到这些过程的微分截面,其中 G 是费米常数,θ_c 是卡比玻角.考虑到(23.27)式,高能时结果为

$$d\sigma_{\nu d}^{-} = \frac{2}{\pi}(-k \cdot P)dy(G\cos\theta_c)^2,$$

$$d\sigma_{\bar{\nu}u}^{+} = \frac{2}{\pi}(-k \cdot P)dy(G\cos\theta_c)^2(1-y)^2, \tag{23.39}$$

其中上标干表示终态轻子的电荷.

因为 $P = xp$, 故有

$$-k \cdot P = -xk \cdot p = xm_N E_\nu,$$

其中 E_ν 是核子静止系中入射中微子的能量. 应用 CP 或 CPT 于(23.38)—(23.39)式,我们发现

$$\nu_l(k) + \bar{u}(P) \to l^-(k') + \bar{d}(P')$$

及

$$\bar{\nu}_l(k) + \bar{d}(P) \to l^+(k') + \bar{u}(P')$$

的微分截面是

$$d\sigma_{\nu\bar{u}}^{-} = \frac{2}{\pi}m_N E_\nu x dy(G\cos\theta_c)^2(1-y)^2$$

及 (23.40)

$$d\sigma_{\bar{\nu}\bar{d}}^{+} = \frac{2}{\pi}m_N E_\nu x dy(G\cos\theta_c)^2.$$

用类似的方法,可以导出其他味夸克的 $d\sigma_{\nu f}^{-}$ 及 $d\sigma_{\bar{\nu}f}^{+}$. 结果在下列两表中给出:

表 23.1

反 应	$\frac{d\sigma_{\nu f}^{-}}{dy}\left(以\frac{2}{\pi}G^2 m_N E_\nu 为单位\right)$
$\nu_l + d \to l^- + u$	$x\cos^2\theta_c$
$\nu_l + d \to l^- + c$	$x\sin^2\theta_c$
$\nu_l + s \to l^- + u$	$x\sin^2\theta_c$
$\nu_l + s \to l^- + c$	$x\cos^2\theta_c$
$\nu_l + \bar{u} \to l^- + \bar{d}$	$x\cos^2\theta_c(1-y)^2$
$\nu_l + \bar{u} \to l^- + \bar{s}$	$x\sin^2\theta_c(1-y)^2$
$\nu_l + \bar{c} \to l^- + \bar{d}$	$x\sin^2\theta_c(1-y)^2$
$\nu_l + \bar{c} \to l^- + \bar{s}$	$x\cos^2\theta_c(1-y)^2$

表 23.2

反 应	$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}f}^{+}}{\mathrm{d}y}\left(以\frac{2}{\pi}G^2 m_N E_\nu 为单位\right)$
$\bar{\nu}_l + u \to l^+ + d$	$x\cos^2\theta_c(1-y)^2$
$\bar{\nu}_l + u \to l^+ + s$	$x\sin^2\theta_c(1-y)^2$
$\bar{\nu}_l + c \to l^+ + d$	$x\sin^2\theta_c(1-y)^2$
$\bar{\nu}_l + c \to l^+ + s$	$x\cos^2\theta_c(1-y)^2$
$\bar{\nu}_l + \bar{d} \to l^+ + \bar{u}$	$x\cos^2\theta_c$
$\bar{\nu}_l + \bar{d} \to l^+ + \bar{c}$	$x\sin^2\theta_c$
$\bar{\nu}_l + \bar{s} \to l^+ + \bar{u}$	$x\sin^2\theta_c$
$\bar{\nu}_l + \bar{s} \to l^+ + \bar{c}$	$x\cos^2\theta_c$

这两个表的微分截面通过 CP 或 CPT 彼此相关,有

$$\mathrm{d}\sigma_{\nu f}^{-} = \mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}\bar{f}}^{+}, \tag{23.41}$$

其中,如前面一样,味 f 可以是 u, $\bar{\mathrm{u}}$, d, $\bar{\mathrm{d}}$….

表 23.3

反 应	$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\nu f}^{0}}{\mathrm{d}y}\left(以\frac{2}{\pi}G^2 m_N E_\nu 为单位\right)$
$\nu_l + u \to \nu_l + u$	$\frac{x}{4}\left[\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2 + \frac{16}{9}\sin^4\theta_W(1-y)^2\right]$
$\nu_l + d \to \nu_l + d$	$\frac{x}{4}\left[\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2 + \frac{4}{9}\sin^4\theta_W(1-y)^2\right]$
$\nu_l + s \to \nu_l + s$	$\frac{x}{4}\left[\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2 + \frac{4}{9}\sin^4\theta_W(1-y)^2\right]$
$\nu_l + c \to \nu_l + c$	$\frac{x}{4}\left[\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2 + \frac{16}{9}\sin^4\theta_W(1-y)^2\right]$
$\bar{\nu}_l + u \to \bar{\nu}_l + u$	$\frac{x}{4}\left[\frac{16}{9}\sin^4\theta_W + \left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2(1-y)^2\right]$
$\bar{\nu}_l + d \to \bar{\nu}_l + d$	$\frac{x}{4}\left[\frac{4}{9}\sin^4\theta_W + \left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2(1-y)^2\right]$
$\bar{\nu}_l + s \to \bar{\nu}_l + s$	$\frac{x}{4}\left[\frac{4}{9}\sin^4\theta_W + \left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2(1-y)^2\right]$
$\bar{\nu}_l + c \to \bar{\nu}_l + c$	$\frac{x}{4}\left[\frac{16}{9}\sin^4\theta_W + \left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2(1-y)^2\right]$

下面考虑中性流截面 $\mathrm{d}\sigma_{\nu f}^{0}$及 $\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}f}^{0}$. 上标"0"表示中性流. 反应为

$$\nu_l(k)+\mathrm{f}(P)\rightarrow\nu_l(k')+\mathrm{f}(P')$$

及　(23.42)

$$\bar{\nu}_l(k)+\mathrm{f}(P)\rightarrow\bar{\nu}_l(k')+\mathrm{f}(P').$$

从 573 页，我们看到中性流 J_λ^0 保持味守恒，因此，(23.42)中的初态及终态夸克的味相同. 表 23.3 列出了 $\mathrm{d}\sigma_{\nu f}^0$. 相应的 $\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}\bar{f}}^0$ 可以由下式得到：

$$\mathrm{d}\sigma_{\nu f}^0=\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}\bar{f}}^0,$$

此式是 CP 或 CPT 不变性的结果.

2. **中微子-核子截面**　首先，把上述中微子-夸克截面代入(23.37)式，然后，把结果与(23.10)及(23.14)—(23.15)式比较，我们看到*

$$2xF_1(x)=F_2(x)$$

及

$$L(x)+R(x)=1. \tag{23.43}$$

这些式子及由(23.38)式给出的类似的关系式

$$2xF_1^{\mathrm{el}}(x)=F_2^{\mathrm{el}}(x)$$

是部分子模型中夸克自旋为$\dfrac{1}{2}$这一性质的结果. 从表 23.1—3，可用夸克分布函数直接导出核子结构函数.

(i) 带电流反应

对于反应

$$\nu_l+\mathrm{p}\rightarrow l^-+\cdots,$$

乘积 F_2L 及 F_2R 是

$$(F_2L)_{\mathrm{p}}^-=2x[d(x)+s(x)]$$

及

$$(F_2R)_{\mathrm{p}}^-=2x[\bar{u}(x)+\bar{c}(x)], \tag{23.44}$$

对于

$$\bar{\nu}_l+\mathrm{p}\rightarrow l^++\cdots,$$

它们是

* Callan CG, Gross DJ. *Phys Rev Lett*, 1969, **22**: 156.

$$(F_2L)_p^+ = 2x[u(x) + c(x)]$$

及
$$(F_2R)_p^+ = 2x[\bar{d}(x) + \bar{s}(x)], \tag{23.45}$$

其中,如前面一样,上标±表示终态轻子电荷,当然,它等于强子电荷的改变值.同样,对于 ν_ln 碰撞,

$$(F_2L)_n^- = 2x[u(x) + s(x)]$$

及
$$(F_2R)_n^- = 2x[\bar{d}(x) + \bar{c}(x)], \tag{23.46}$$

对于 $\bar{\nu}_l$n 碰撞,

$$(F_2L)_n^+ = 2x[d(x) + c(x)]$$

$$(F_2R)_n^+ = 2x[\bar{u}(x) + \bar{s}(x)]. \tag{23.47}$$

上述各式中,正如(23.34)—(23.35)式中一样,$u(x)$, $\bar{u}(x)$, $d(x)$ …均指质子态中的夸克分布函数.

因为 $L+R=1$, 可以用这些结构函数将微分截面(23.14)—(23.15)式写为:

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\nu N}^{\alpha} = \frac{m_N E_\nu}{\pi} G^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y[(F_2L)_N^{\alpha} + (1-y)^2(F_2R)_N^{\alpha}],$$

$$\mathrm{d}^2\sigma_{\bar{\nu} N}^{\alpha} = \frac{m_N E_\nu}{\pi} G^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y[(F_2R)_N^{\alpha} + (1-y)^2(F_2L)_N^{\alpha}], \tag{23.48}$$

其中
$$N = p \text{ 或 } n,$$

$$\alpha = \pm \text{ 或 } 0.$$

$\alpha=0$ 的情形是中性流反应,下面就讨论这一情形.

(ii) 中性流反应

对于反应

$$\nu_l + p \to \nu_l + \cdots$$

及

$$\bar{\nu}_l + p \to \bar{\nu}_l + \cdots,$$

结构函数是

$$(F_2L)_p^0 = \frac{x}{2}\left\{\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2 [u(x) + c(x)]\right.$$

$$+\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[d(x)+s(x)]$$

$$+\frac{16}{9}\sin^4\theta_W[\bar{u}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\frac{4}{9}\sin^4\theta_W[\bar{d}(x)+\bar{s}(x)]\Big\} \tag{23.49}$$

及

$$(F_2R)_p^0=\frac{x}{2}\Big\{\frac{16}{9}\sin^4\theta_W[u(x)+c(x)]$$

$$+\frac{4}{9}\sin^4\theta_W[d(x)+s(x)]$$

$$+\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[\bar{u}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[\bar{d}(x)+\bar{s}(x)]\Big\}. \tag{23.50}$$

对于 $\nu_l n$ 及 $\bar{\nu}_l n$ 中性流反应,有

$$(F_2L)_n^0=\frac{x}{2}\Big\{\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[d(x)+c(x)]$$

$$+\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[u(x)+s(x)]$$

$$+\frac{16}{9}\sin^4\theta_W[\bar{d}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\frac{4}{9}\sin^4\theta_W[\bar{u}(x)+\bar{s}(x)]\Big\} \tag{23.51}$$

及

$$(F_2R)_n^0=\frac{x}{2}\Big\{\frac{16}{9}\sin^4\theta_W[d(x)+c(x)]$$

$$+\frac{4}{9}\sin^4\theta_W[u(x)+s(x)]$$

$$+\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[\bar{d}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)^2[\bar{u}(x)+\bar{s}(x)]\Big\}. \tag{23.52}$$

将(23.49)—(23.52)式代入(23.48)式,可以得到相应的微分截面.

练习 1.　证明下列求和规则

$$\text{(i)}\ \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}[(F_2)_\mathrm{n}^- - (F_2)_\mathrm{p}^-]$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}[(F_2)_\mathrm{p}^+ - (F_2)_\mathrm{n}^+]$$

$$= \int\mathrm{d}x[(u-\bar{u})-(d-\bar{d})] = 1 \qquad \text{(Adler)}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{4}\int\mathrm{d}x[(F_3)_\mathrm{n}^- + (F_3)_\mathrm{n}^+ + (F_3)_\mathrm{p}^- + (F_3)_\mathrm{p}^+]$$

$$= \int\mathrm{d}x[(u-\bar{u})+(d-\bar{d})] = 3 \quad \text{(Gross-Llewellyn Smith)}$$

$$\text{(iii)}\ \int x^n\mathrm{d}x[6(F_2^{\mathrm{el}})_\mathrm{p} - 6(F_2^{\mathrm{el}})_\mathrm{n} + x(F_3)_\mathrm{p}^- - x(F_3)_\mathrm{n}^-]$$

$$= \int x^n\mathrm{d}x[(F_2^{\mathrm{el}})_\mathrm{p} - (F_2^{\mathrm{el}})_\mathrm{n} + x(F_3)_\mathrm{n}^+ - x(F_3)_\mathrm{p}^+]$$

$$= 0 \qquad \text{(Llewellyn Smith)}$$

其中 n 是任意的.

如前面一样,积分都是从 0 积到 1. u、$\bar{u}$、d、$\bar{d}$…是质子中的夸克分布函数.

练习 2. 考虑轻子与同位旋标量核的碰撞. 结构函数是

$$F_a^{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}[(F_a^{\mathrm{el}})_\mathrm{p} + (F_2^{\mathrm{el}})_\mathrm{n}]$$

及

$$F_i^\alpha = \frac{1}{2}[(F_i^\alpha)_\mathrm{p} + (F_i^\alpha)_\mathrm{n}],$$

其中,如前面一样, $a = 1, 2$, $i = 1, 2$ 或 3, $\alpha = +, -$ 或 0. 证明在夸克部分子模型中

$$\text{(i)}\ F_2^{\mathrm{el}} = \frac{5x}{18}\left[q+\bar{q}-\frac{3}{5}(s+\bar{s}-c-\bar{c})\right],$$

$$F_2^{\mp} = x[q+\bar{q}\pm(s-\bar{s}-c+\bar{c})],$$

以及

$$F_3^{\mp} = q-\bar{q}\pm(s+\bar{s}-c-\bar{c}), \qquad (23.53)$$

其中

$$q \equiv u + d + c + s,$$
$$\bar{q} \equiv \bar{u} + \bar{d} + \bar{c} + \bar{s}. \tag{23.54}$$

(ii) $\int \mathrm{d}x F_2^-(x) = \int \mathrm{d}x F_2^+(x)$,

因此,在 $y=0$ 处,如果将(23.48)式对 x 积分,则有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\nu^-}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}}^+}{\mathrm{d}y} \tag{23.55}$$

(如果用上标 0 代替干,即用中性流代替带电流(23.55)式也正确.)

(iii) 在无海夸克近似下

$$\bar{q} = 0,$$

$$\nu_l + N \to l^- + \cdots$$

与

$$\bar{\nu}_l + N \to l^+ + \cdots$$

的总单举截面之比为

$$3:1. \tag{23.56}$$

3. **实验结果** 高能 e、μ、ν 及 $\bar{\nu}$ 实验已经作了很多. 正如前面已提到的,在 $q^2=(4\text{ 动量传递})^2$ 从几$(\mathrm{GeV})^2$ 到$\sim 20(\mathrm{GeV})^2$ 的区域,无标度近似及夸克部分子模型相当好. 即使在更大的 q^2 处,在 20 到 $200(\mathrm{GeV})^2$ 之间,偏离仍然相当小. 一个好的衡量办法是研究固定 x 处结构函数与 q^2 关系的百分比变化. 将 QCD 的辐射修正* 包括进来,这些变化可以得到解释. 详细的讨论超出了本书的范围.

在夸克部分子模型中,可以从实验确定夸克分布函数. 我们列出某些结果**

---

* 见 A. H. Mueller 的综述文章"Perturbative QCD at High Energies".

** de Groot J G H, *et al*. Zeits fur Physik (Particles and Fields). 1979, **1**: 143. Proceedings of the Ⅸ International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Fermilab, 1979. ed. Kirk T B W, Abarbanel H D I. CDHS Collaboration 1979, **2**: 92, Neutrino, 79. University of Bergen and NORDITA.

(i) 海夸克的重要性可以由下列实验值最好地表示：

$$\frac{\int \bar{q}(x)\mathrm{d}x}{\int [q(x)+\bar{q}(x)]\mathrm{d}x} = 0.15 \pm 0.03, \tag{23.57}$$

奇异夸克的重要性则由下式表示：

$$\frac{\int \bar{s}(x)\mathrm{d}x}{\int [q(x)+\bar{q}(x)]\mathrm{d}x} = 0.025 \pm 0.01, \tag{23.58}$$

其中 $q(x)$及 $\bar{q}(x)$定义于(23.54)式. 目前,尚未精确确定 c 及 $\bar{c}$,只是确定了它们特别小. 考虑到它们的质量大,这一结果是合理的.

(ii) 已经把 $q(x)$及 $\bar{q}(x)$的实验结果唯象地与下列简单表达式拟合：

$$\begin{aligned} q(x)-\bar{q}(x) &\propto \sqrt{x}(1-x)^n. \\ \bar{q}(x)+s(x) &\propto (1-x)^m \end{aligned} \tag{23.59}$$

其中 $n=3.5\pm1.5$, $m=6.5\pm0.5$. 前者是价夸克的,后者是海夸克的.

(iii) 温伯格角 θ_{w} 可以由中性流截面确定. 从单举 ν_μ 及 $\bar{\nu}_\mu$ 反应,人们发现

$$\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = 0.228 \pm 0.018, \tag{23.60}$$

此值与其他测量值符合得很好. [见(22.90)及(22.127).]

(iv) 在核子的无限大动量系中,夸克及反夸克携带的那部分动量可以由 $x[q(x)+\bar{q}(x)]$ 的积分来测量. 从(23.53)式我们看到

$$F_2(x) \equiv \frac{1}{2}[F_2^-(x)+F_2^+(x)] = x[q(x)+\bar{q}(x)].$$

来自中微子及反中微子实验的数值是

$$\int \mathrm{d}x F_2(x) \cong 0.45, \tag{23.61}$$

这意味着,大约一半核子动量是胶子携带的. 用电子及 μ 粒子的实验结果也得到同样的结论.

23.5 KLN 定理*

既然量子色动力学微扰论是一种“渐近自由”的理论,就应当可以在高能时应用.另一方面,在微扰级数中,胶子都是无质量的,夸克也近似如此.如我们所知,这些零质量粒子实际上没有一个可以观察到,这大概是由于非微扰的色禁闭机理.因此,在比较微扰量子色动力学的预言与实验结果时有着内在的困难.这就是至今我们仅限于讨论将所有终态道加起来的单举反应的原因.

还有另一个问题.正如 8.7 节中讨论过的,零质量粒子的存在可以导致“质量奇异性”.这与此体系有高度简并有关.对于仅由平行运动的无质量粒子组成的状态,同样的总动量意味着同样的总能量.在此种理论中,质壳上跃迁振幅的微扰展开一般有无限大.正如我们将看到的,如果我们将有关的跃迁概率对适当的简并态集合求平均,这类发散可以消除.实际上,这类奇异性的发生及其抵消是量子力学中一个基本定理的结果.该定理不必明显应用费恩曼图或哈密顿量的细致形式就可建立.著名的量子电动力学中红外发散的消除是此种情形的一个例子[见 23.6.1 节].

考虑一个场论,其总哈密顿量是

$$H = H_0 + gH_1 \tag{23.62}$$

其中,H_0 是自由粒子哈密顿量,H_1 是微扰,g 是展开参数.由于我们只对 g 的幂级数中来自简并态的奇异性感兴趣,所以,将忽略诸如束缚态(即使它们存在)这样的非微扰效应.因此,正如 5.2 节中提到的,在相对论场论中,我们可以设 H 和 H_0 的谱相同.H_0 的本征态将记作 $|a\rangle$

$$H_0 \mid a\rangle = E_a \mid a\rangle,$$

$$\langle a \mid a\rangle = 1. \tag{23.63}$$

---

* Kinoshita T. *J Math Phys*, 1962, **3**: 650; Lee TD, Nauenberg M. *Phys Rev*, **133**: B1549.

S 矩阵可以用(5.20)—(5.21)式给出的 $U(t, t_0)$矩阵表达：

$$S = U(\infty, -\infty). \tag{23.64}$$

方便的是定义

$$U_- = U(0, -\infty)$$

及

$$U_+ = U(0, +\infty). \tag{23.65}$$

从(6.58)—(6.61)式，我们看到，无论 U_- 还是 U_+ 都可以将 H 对角化：

$$U_-^\dagger HU_- = U_+^\dagger HU_+ = E, \tag{23.66}$$

其中 E 是对角矩阵，其对角矩阵元为(23.63)式给出的 E_a.

可以构造两套 H 本征态的全集：

$$| a^{\text{in}} \rangle \equiv U_- | a \rangle$$

及

$$| a^{\text{f}} \rangle \equiv U_+ | a \rangle. \tag{23.67}$$

S 矩阵是联结这两套集合的幺正变换. 我们有

$$S = U_+^\dagger U_-, \tag{23.68}$$

其矩阵元为

$$S_{ab} \equiv \langle a | S | b \rangle = \langle a^{\text{f}} | b^{\text{in}} \rangle,$$

因此，上标 in 及 f 表示总哈密顿量对角的表象中反应的初态及终态. 相应的跃迁概率为

$$| S_{ab} |^2 = \sum_{i,j} [(U_+)_{ia}^* (U_+)_{ja}][(U_-)_{ib} (U_-)_{jb}^*], \tag{23.69}$$

其中 i 及 j 跑遍满足(23.63)式的矢量的全集.

1. **一阶微扰** 为说明方便，我们设此问题包含一个参数 μ，当 $\mu \to 0$ 时，总哈密顿量中出现简并. $\mu \neq 0$ 时，$U_\mp$ 的第(j, a)个矩阵元可以展开为熟悉的幂级数：

$$(U_\mp)_{ja} = \delta_{ja} + g \frac{1 - \delta_{ja}}{E_a - E_j \pm \text{i}\varepsilon} (H_1)_{ja} + O(g^2), \tag{23.70}$$

其中 $\varepsilon = 0_+$，δ_{ja}是单位矩阵的矩阵元. 正如 6.5 节中提到过的，分母里

的$\pm i\epsilon$给出本征态$|a^{in}\rangle$及$|a^{f}\rangle$中的出射及入射波. 当$\mu\to 0$时，态a可能与处于某子集$D(E_a)$中的其他态简并. 从(23.70)式，我们看到，对于属于该子集的态j，$(U_\mp)_{ja}$展开式中的$O(g)$项是奇异的. 容易看到，在同一极限$\mu\to 0$下，类似的发散也出现于级数的更高阶项中. 按照(23.68)式，

$$S_{ab}=\sum_j (U_+)^*_{ja}(U_-)_{jb},$$

所以S的幂级数展开也遇到同样起源的无限大麻烦. 我们可以称这些发散为“简并奇异性”. 当简并由零质量粒子造成时，称它们为“质量奇异性”.

现在，我们引进

$$T^-(E_a)_{ij}=\sum_{D(E_a)}(U_-)_{ia}(U_-)^*_{ja}$$

及

$$T^+(E_a)_{ij}=\sum_{D(E_a)}(U_+)_{ia}(U_+)^*_{ja},\tag{23.71}$$

其中求和对所有在同一简并子集$D(E_a)$中的态a进行. 重要的是，当参数$\mu\to 0$时，$D(E_a)$在希耳伯特空间中的区域保持固定. 例如，我们可以设想$D(E_a)$由能量间隔$E_a-\delta E$及$E_a+\delta E$之间的全部状态所组成，在$\mu\to 0$极限下，宽度δ应当固定，否则δ可能会任意小. 作为说明，我们可以考虑量子电动力学中的红外发散这一情形：参数μ可以是光子质量，$D(E_a)$可以由频率小于ω的任何光子所组成，其中

$$\omega=\text{检测装置的分辨率},\tag{23.72}$$

它显然与虚光子质量$\mu\to 0$无关. 此外，正如 23.6.1 节中将讨论的，在此幂级数展开中，对耦合常数的每个有限阶，$D(E_a)$中的每个有关态只包含有限数目的红外光子.

将(23.70)式代入(23.71)式，给出

$$T^\mp(E_a)_{ij}=\sum_{D(E_a)}\Big[\delta_{ia}\delta_{ja}+g\frac{\delta_{ia}(1-\delta_{ja})}{E_a-E_j\mp i\epsilon}(H_1)^*_{ja}+g\frac{\delta_{ja}(1-\delta_{ia})}{E_a-E_i\pm i\epsilon}(H_1)_{ia}\Big]+O(g^2),\tag{23.73}$$

如果态 i 和 j 两者都在简并集合 $D(E_a)$ 之外,上式方括号中的三项都为 0;如果一个态(比如说)i 在 $D(E_a)$ 中,而另一个态 j 不在 $D(E_a)$ 中;则 $\delta_{ja}=0$, 这三项之和成为

$$g\frac{\delta_{ia}}{E_a-E_j}(H_1)^*_{ja}=\text{有限}.$$

两种情形都没有奇异性. [当然,已经默认 H_1 的矩阵元没有简并奇异性.]

有兴趣的情形是 i 和 j 两者都在简并集合内,此时,在对 $D(E_a)$ 求和后,方括号内的项可以写为

$$\delta_{ij}+g(1-\delta_{ij})\left[\frac{1}{E_i-E_j\mp \mathrm{i}\varepsilon}(H_1)^*_{ji}+\frac{1}{E_j-E_i\pm \mathrm{i}\varepsilon}(H_1)_{ij}\right]=\delta_{ij}.$$

此式也是不奇异的. 因此,尽管 S 矩阵的 $O(g)$ 阶元素有质量奇异性,到同一阶,

$$T^-(E_a)\equiv \text{矩阵 } T^-(E_a)_{ij}$$

及

$$T^+(E_a)\equiv \text{矩阵 } T^+(E_a)_{ij}$$

没有奇异. 从(23.69)式,我们看到,同样的结论也适用于 $a\to b$ 的跃迁概率 *

$$\begin{aligned}P(a,b)&\equiv\sum_{D(E_a)}\sum_{D(E_b)}|S_{ab}|^2\\&=\sum_{i,j}T^+(E_a)_{ji}T^-(E_b)_{ij}\\&=\mathrm{Trace}[T^+(E_a)T^-(E_b)].\end{aligned}\tag{23.74}$$

下一节中将证明我们的分析容易推广到 g 的高阶项. 如果我们不是处理 U_-, U_+ 及 S,而是处理 $T^-(E_a)$、$T^+(E_a)$及 $P(a,b)$,则简并奇异性的抵消到每一阶都保持正确.

2. **一般情形** 从(23.62)、(23.66)式及 $U_\mp$ 的幺正性得出

---

* 尽管 $E_a=E_b$, 因为推广式(23.93),$D(E_a)$及 $D(E_b)$可以不同.

$$(H_0 + gH_1)U = UE, \tag{23.75}$$

此处以及此后，

$$U = U_- \text{ 或 } U_+, \tag{23.76}$$

E 是对角矩阵，其对角元素是 $H = H_0 + gH_1$ 的本征值. 定义

$$\Delta \equiv H_0 - E, \tag{23.77}$$

(23.75)式可以写为

$$[U, E] = (gH_1 + \Delta)U. \tag{23.78}$$

在 H_0 对角的表象中，Δ 也是对角的，其对角元素表示从 H_0 到 H 的能级移动. 正如前面提到的，对于 H_0 及 H 有同样的谱即

$$\Delta = 0 \tag{23.79}$$

的理论，我们特别感兴趣. 譬如，在零质量夸克的微扰量子色动力学中，H_0 和 H 有着由同类无质量粒子组成的完全相同的谱. [实际上，我们将要证明的定理也可应用于 $\Delta \neq 0$ 的理论. 见本节末的练习.]

由于(23.79)式，我们可以将(23.78)式写为

$$[U, E] = gH_1U. \tag{23.80}$$

将幂级数展开式

$$U = \sum_{l=0}^{\infty} g^l U_l \tag{23.81}$$

代入(23.80)式并令两边 g^l 的系数相等，我们发现

$$[U_l, E] = H_1U_{l-1}. \tag{23.82}$$

此外，幺正性

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1$$

给出，对于 $l = 0$

$$U_0 = 1, \tag{23.83}$$

对于 $l \geqslant 1$

$$\sum_{m=0}^{l} U_m^\dagger U_{l-m} = \sum_{m=0}^{l} U_m U_{l-m}^\dagger = 0. \tag{23.84}$$

方程(23.82)式使我们能用 U_{l-1} 的矩阵元表达 U_l. 对于非对角的第

(i, a)个矩阵元,我们有

$$(U_l)_{ia} = \frac{1}{E_a - E_i \pm i\epsilon} \sum_b (H_1)_{ib} (U_{l-1})_{ba}. \tag{23.85}$$

其中,正如(23.70)式中一样,$\epsilon = 0_+$, 上面的符号是 $U = U_-$ 的,下面的符号是 $U = U_+$ 的. 取(23.82)的对角元素,对任何给定的 a,我们得到

$$\sum_b (H_1)_{ab} (U_{l-1})_{ba} = 0, \tag{23.86}$$

它是 $\Delta = 0$ 的结果. 相应的元素$(U_l)_{aa}$可以从幺正性条件(23.84)式得到. 另一种办法,我们也可以用(23.85)式. 当 $i = a$ 时, 分子和分母都是0,但是用取所谓绝热极限*的办法,我们可以安排它们的比值,以给出正确的$(U_l)_{aa}$.

每当有简并态时,比如说,

$$E_i = E_a \text{ 但 } i \neq a,$$

(23.85)式的分母成为0,它给出$(U_l)_{ia}$中的简并奇异性. 同样,正如前面提到过的,S 矩阵的幂级数展开也有简并奇异性. 我们的目的是证明,与此相反,$T^-(E_a)_{ij}$ 及 $T^+(E_a)_{ij}$ 的幂级数展开没有这类奇异性. 我们可以将(23.71)中的两个式子合写为一个:

$$T(E_a)_{ij} = \sum_{D(E_a)} U_{ia} U_{ja}^*, \tag{23.87}$$

因此,当 $U = U_-$ 或 U_+ 时,

$$T(E_a) = T^-(E_a) \text{ 或 } T^+(E_a),$$

其中,如前面一样,

$$T(E_a) = \text{矩阵 } T(E_a)_{ij}. \tag{23.88}$$

让我们考察 $T(E_a)$的幂级数展开

$$T(E_a) = \sum_{l=0}^{\infty} g^l T_l(E_a), \tag{23.89}$$

$T_l(E_a)$的矩阵元与 U_m 的矩阵元的关系是

* 见 6.5 节的脚注.

$$[T_l(E_a)]_{ij} = \sum_{m=0}^{l} \sum_{D(E_a)} (U_{l-m})_{ia} (U_m^*)_{ja}. \qquad (23.90)$$

定理.　$[T_l(E_a)]_{ij}$没有简并奇异性.

证明.

$l=0$时,因为(23.83)式,定理显然正确.上一节中,我们也已经证明,$l=1$时定理正确.假设$l=n-1\geqslant 0$时定理成立.为了分析$l=n$时的矩阵元$[T_l(E_a)]_{ij}$,我们将分别考虑下列三种情形:

(i) 态i在与a简并的状态子集$D(E_a)$之外,但态j是任意的.此时,从(23.83)式得出

$$(U_0)_{ia} = 0.$$

将(23.85)式代入(23.90)式并设$l=n$,我们发现

$$[T_n(E_a)]_{ij} = \frac{1}{E_a - E_i} \sum_b (H_1)_{ib} [T_{n-1}(E_a)]_{bj},$$

其中$E_a - E_i \neq 0$,并且,如前面一样,b跑遍所有的态.因此,如果$[T_{n-1}(E_a)]_{ij}$没有简并奇异性,$[T_n(E_a)]_{ij}$也没有.

(ii) 态j在$D(E_a)$之外,但i任意.由于厄米关系,

$$[T_n(E_a)]_{ij} = [T_n(E_a)]_{ji}^*,$$

故此情形与前一情形相同.

(iii) i和j两者都在$D(E_a)$内.从幺正条件(23.84)式并设$l=n$,我们可以将(23.90)式写为

$$[T_n(E_a)]_{ij} = -\sum_{m=0}^{l} \sum_b{}' (U_{n-m})_{ib} (U_m^*)_{jb},$$

其中求和$\sum\limits_b{}'$仅跑遍不在$D(E_a)$中的那些b.因此,右边可以写为$[T_n(E_a)]_{ij}$的和,其中i及j不与b简并.于是情形(iii)也化为情形(i).定理由对n的归纳法得证.

说明.

(i) 因为$U_\mp$是幺正的,其矩阵元的大小不能大于1.不过,其幂级数展开的系数可能有简并奇异性造成的发散,例如,就如(23.70)式所表明

的那样. 从幺正性条件

$$U_-^\dagger U_- = 1$$

或

$$U_+^\dagger U_+ = 1,$$

$U_-^\dagger U_-$ 或 $U_+^\dagger U_+$ 对 g 的幂次的展开式在 0 阶为 1,在所有其他阶为 0,它的每一项当然都是非奇异的,因此,两个展开式都没有简并奇异性. (23.71)式定义的 $T^-(E_a)$及 $T^+(E_a)$只涉及到这些展开式中看来好像危险的部分,自然,所有明显奇异的项必须互相抵消,这就是 KLN 定理的根源. KLN 定理阐明了,在 $T^\mp(E_a)$的幂级数展开中没有简并奇异性. 同样的结论也适用于由(23.74)式定义的 $P(a, b)$的幂级数展开:

$$P(a, b) = \sum_{D(E_a)} \sum_{D(E_b)} | S_{ab} |^2 = \sum_{l=0}^{\infty} g^l P_l(a, b). \qquad (23.91)$$

(ii) 至今我们限于讨论未微扰的哈密顿量 H_0 与总哈密顿量 H 有同样的谱的理论. 因为 KLN 定理是幺正性的结果,我们期望当去掉这一限制时,定理也成立. 后面给出的练习就将此定理推广到一般情形.

(iii) 到现在为止,集合 $D(E_a)$是与 E_a 简并的所有态. 因此,定理容易应用于按照定义将等能态都加起来的总跃迁概率. 正如我们将看到的,在大多数应用中,集合 $D(E_a)$可以实质性地简化. 一个简单的技巧是考虑一个不同的问题,其中 H_1 改变为截短的哈密顿量 H_1':

$$(H_1')_{ij} = \begin{cases} (H_1)_{ij}, & \text{如果 } i \text{ 和 } j \text{ 在 } S \text{ 中}, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases} \qquad (23.92)$$

集合 S 可以任意选择,惟一的要求是 H_1' 保持厄米. 应用定理于此新问题,我们发现有关的简并集成为交集

$$\mathscr{D}(E_a) = D(E_a) \cap S, \qquad (23.93)$$

它可以比原来的 $D(E_a)$小得多. 用此方法,定理也可以推广到部分跃迁概率. [见 23.6.2 节]

练习.

令 $H = H_0 + gH_1$ 及

$U^\dagger HU = E =$ 对角.

因此,与(23.78)式一样,我们有

$$[U, E] = (gH_1 + \Delta)U,$$

但现在设

$$\Delta = H_0 - E \neq 0.$$

考虑幂级数展开

$$\Delta = \sum_1^{\infty} g^l \Delta_l,$$

$$U = \sum_0^{\infty} g^l U_l$$

及

$$T(E_a) = \sum_0^{\infty} g^l T_l(E_a),$$

其中 $T(E_a)$由(23.87)—(23.88)式给出. 证明如果所有的 Δ_l 没有简并奇异性,则 $T_l(E_a)$也没有.

23.6 应用于量子电动力学

1. **红外发散** 电动力学包含着由于光子质量为 0 造成的简并. 这就是已经提到过的著名的红外发散问题. 考虑一个电子与外势 V 之间的碰撞

$$\mathrm{e}(\boldsymbol{p}) \xrightarrow{V} \mathrm{e}(\boldsymbol{p}'), \tag{23.94}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 及 $\boldsymbol{p}'$是初态及终态电子动量. 对于静势 V,

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|.$$

图 23.2 中,图(a)是(23.94),图(b)给出最低阶辐射修正. 正如我们将看到的,图(b)红外发散. 当光子动量 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时,初态 $\mathrm{e}(\boldsymbol{p})$与态

$$\mathrm{e}(\boldsymbol{p}) + \gamma(\boldsymbol{k}) \tag{23.95}$$

简并;同样,当 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时,终态 $\mathrm{e}(\boldsymbol{p}')$也与态

$$\mathrm{e}(\boldsymbol{p}') + \gamma(\boldsymbol{k}) \tag{23.96}$$

简并.

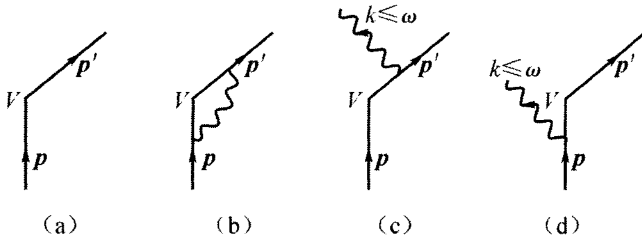


图 23.2 图(a)是 e 被外势 V 的散射,(b)给出辐射修正,(c)及(d)是软光子辐射图(自能图已略去.)

因为吸收和辐射一个红外光子不改变电子的动量,所以,发现这样一个能量为 k 的光子的相对概率与电子的运动学无关. 从简单的量纲考虑,即可明白该概率正比于

$$\alpha\,\frac{\mathrm{d}k}{k} \tag{23.97}$$

其中 $\alpha = e^2/4\pi$ 是精细结构常数,并且,

$$k \ll \omega, \tag{23.98}$$

ω 是红外截止参数,可以由(23.72)给定. 分布(23.97)不能归一化,导致了红外发散.

在反应(23.94)中,初始物理电子态,包括其软光子在内,是

$$|e^{\mathrm{in}}_{物理}\rangle = U_-\,|e\rangle, \tag{23.99}$$

终态是

$$|e^{\mathrm{f}}_{物理}\rangle = U_+\,|e\rangle, \tag{23.100}$$

其中 $|e\rangle$ 系指没有任何软光子的态. 我们的定理指出,

$$\sum_{D(E_a)} U_{ia} U^*_{ja} \tag{23.101}$$

的幂级数没有红外发散. 这里,

$$U = U_- \text{ 或 } U_+,$$

求和跑遍态(23.95)或(23.96),其中 k 满足(23.98). 另一方面,令 a 及 b

为图 23.2 中左边两个图的费恩曼振幅.

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2$$

是观察到反应(23.94)的概率,(23.94)没有任何软光子,其概率当然为 0.不过,如果我们硬作幂级数展开,则由于(23.97),同一概率比例于

$$1-c\alpha\int_0^{\omega}\frac{\mathrm{d}k}{k}+O(\alpha^2)$$

其中 c 是正的数值常数.这就解释了为什么 $|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2$ 红外发散.

在软光子的情形中,(23.99)—(23.100)式中的 U_- 及 U_+ 可以用布洛赫-诺尔西克(Bloch-Nordsieck)近似* 明显地求出,在此近似中,电子流 ej_μ 可以看成静态经典分布.令 A_μ 表示**仅**由软光子($k\leqslant\omega$)组成的电磁场.相互作用哈密顿量为

$$e\int j_\mu A_\mu \mathrm{d}^3 r.$$

对于每个给定的静态经典分布 j_μ,软光子的总哈密顿量可以用幺正矩阵 $U(j)$对角化,其明显的形式容易用习题 5.1(i)中的幺正矩阵导出.

考虑如下的问题,其中初始电子流分布为 j_μ,在与外势碰撞后成为 j'_μ.令 q 为传给外势的动量传递,$V(q)$为相应的矩阵元,则 S 矩阵元(到 V 的一阶)由下式给出:

$$S=U^\dagger(j')V(q)U(j)\tag{23.102}$$

在(23.99)—(23.100)式中

$$U_-=U(j)\ \text{及}\ U_+=U(j').$$

在此近似下,希尔伯特空间仅由软光子组成,因此,(23.101)式简单地成为 $U(j)$的幺正性:对任意 j_μ,

$$U(j)U^\dagger(j)=1.$$

因为在(23.102)式中,初态及终态光子振幅由无关的因子 $U(j)$及 $U(j')$表示,故不难证明,

---

* Bloch F, Nordsieck H. *Phys Rev*, 1937, **52**:54.

$$\sum_{D(E_a)} |S_{ab}|^2$$

及

$$\sum_{D(E_b)} |S_{ab}|^2 \tag{23.103}$$

的幂级数展开分别都没有红外发散.

于是,如果我们也包括进图 23.2 中的图(c)及(d),则

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2+|\mathrm{c}+\mathrm{d}|^2$$

没有红外发散. 计算是直接的,结果为 *

$$\mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}\sigma_0\left\{1+\frac{\alpha}{\pi}\left[2\left(\ln\frac{q^2}{m_e^2}-1\right)\ln\frac{\omega}{E}+\frac{3}{2}\ln\frac{q^2}{m_e^2}+O(1)\right]\right\}, \tag{23.104}$$

其中 q^2 是动量传递的平方,ω 是(23.72)式给出的红外截止,m_e 是电子质量,

$$E=(\boldsymbol{p}^2+m_e^2)^{\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{p}'^2+m_e^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{23.105}$$

$\mathrm{d}\sigma_0$ 是没有辐射修正的碰撞(23.94)的微分截面. $O(1)$项是当 $\omega\to 0$ 及 $m_e\to 0$时有限的项.

2. **质量奇异性和喷注** 另一应用是考察 $m_e\to 0$ 极限下的量子电动力学. 此时,如果 $\boldsymbol{k}\,/\!/\,\boldsymbol{p}$, 三维动量为 $\boldsymbol{p}$ 的电子态与由动量为 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ 的电子及动量为$\boldsymbol{k}$ 的光子组成的态简并. 这里 $\boldsymbol{k}$ 的大小可以与 $\boldsymbol{p}$ 相比较. 与红外区域的"软"光子相对照,这些光子将称为"硬"光子. 第 8.7 节中已经证明过,这一简并导致质量奇异性.

再次考虑电子被固定外势 V 的散射(23.94). 图 23.3 中,(a)表示没有任何硬光子存在的此类碰撞[也就是说,这里的(a)代表前面图 23.2 中的全部图]. 相应的微分截面由(23.104)式给出,当 $m_e\to 0$ 时它是发散的. 这与期待的质量奇异性行为一致.

---

* Bchwinger J. *Phys Rev*, 1949, **76**: 790.

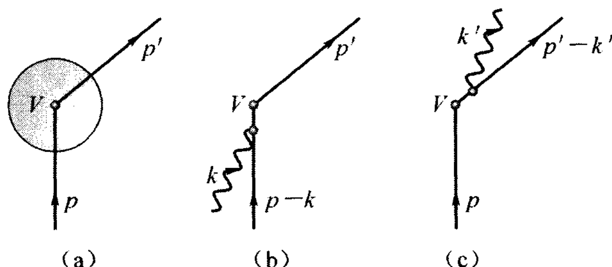


图 23.3　喷注 p 被外势散射到喷注 p' 之图

(a)给出单个电子的弹性散射，包括辐射修正及软光子效应在内；(b)对应于一个硬光子被初态电子吸收的非弹性散射；(c)表示终态中辐射出一个硬光子.

为了去掉微分截面中的质量奇异性，我们必须将那些与初态或终态电子简并的态包括进来. 为清楚起见，让我们先假定没有外势 V. 那时，我们有一个光子、电子及正电子的封闭系统. 与动量为 $\boldsymbol{p}$ 的单电子态简并，并有相同的总动量的态，除掉包含红外粒子的态外，必定只包含全都平行于 $\boldsymbol{p}$ 运动的硬粒子($e^{\pm}$ 和 γ). 我们称这样一个平行运动的粒子的集合为一个喷注. 每个喷注用其总动量及一个固定半角为 δ 的窄锥来刻划，δ 可以任意小. 此喷注中所有粒子的动量均在此锥中. 对于充分小的 δ 以及零质量粒子，喷注的总能量就是其总动量的大小.

V 的存在造成了粒子散射，$e^{\pm}\gamma$ 系统的总动量不再守恒. 例如，再次考虑动量为 $\boldsymbol{p}$ 的单电子态. 如果

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{q}|,$$

则此态与由动量为 $\boldsymbol{q}$ 的电子及动量为 $\boldsymbol{k}$ 的光子组成的态简并. 现在，V 的存在允许

$$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}.$$

遵循 8.7 节的论证，我们知道，这些态与(23.104)式中的质量奇异性无关. 为了去掉这些外来的简并态，我们可以采用(23.92)—(23.93)中描述的战略. 让我们来修正下列电子辐射及吸收一个硬光子的过程的量子电动力学振幅：

$$e(\boldsymbol{p}) \rightleftharpoons e(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) + \gamma(\boldsymbol{k}). \tag{23.106}$$

[硬光子是指能量满足

$$k = |\boldsymbol{k}| > \omega \tag{23.107}$$

的光子，其中 ω 由(23.72)式给出]. 我们用截短的哈密顿量 H_1' 代替通常的量子电动力学哈密顿量 H_1，以致对于硬光子跃迁(23.106)，

$$H_1' = \begin{cases} H_1 & \text{如果 } \boldsymbol{k} \text{ 和 } \boldsymbol{p} \text{ 间的夹角} \leqslant \delta, \\ 0 & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{23.108}$$

其中，如前面一样，δ 可以是一个任意小的但是固定的角度. 对于软光子，H_1' 仍与 H_1 相同. 这样一个代换显然不改变(23.104)式中的质量奇异项. 应用 KLN 定理于截短的哈密顿量，我们看到，如果反应(23.94)被

$$\text{喷注}(\boldsymbol{p}) \xrightarrow{V} \text{喷注}(\boldsymbol{p}') \tag{23.109}$$

代替，微分截面应当没有质量奇异性.

到 α 的一阶，我们必须考虑图 23.3 中的另外两个图. 在图(b)中，终态仍是单粒子态 $e(\boldsymbol{p}')$，但初态 $e(\boldsymbol{p})$ 被一个动量为 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ 的电子加上一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的光子的态所代替，并且此态满足喷注条件，即

$$\text{全部动量在半角为 } \delta \text{ 的锥中，} \tag{23.110}$$

其中锥轴沿着原始电子动量方向. 同样，在图(c)中，初态仍是$e(\boldsymbol{p})$，但终态现在由一个喷注组成，其中有一个动量为 $\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}'$ 的电子及动量为 $\boldsymbol{k}'$的硬光子.

容易证明，把这些喷注中终态及初态的简并态集合加起来，并忽略 $m_e \to 0$ 时保持有限的项，则图(b)及(c)的微分截面 $d\sigma_2$ 及 $d\sigma_3$ 为

$$d\sigma_2 = d\sigma_3 = d\sigma_0 \frac{\alpha}{\pi}\left[2\ln\frac{E\delta}{m_e}\right]\left[\ln\frac{E}{\omega} - \frac{3}{4}\right] \tag{23.111}$$

其中 $E = |\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|$. 从(23.104)及(23.111)式，我们看到，$(d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)$ 不包含质量奇异性，这与我们的一般定理一致.

说明. 如果 m_e 为 0，则物理上不可能有运动中的单个电子不带有由硬光子及 e^+e^- 对组成的喷注. 所以，我们必须用合适的喷注去代替初态及终态电子态.

3. *μ 衰变的辐射修正* 现在我们考察 μ 衰变辐射修正在电子质量为零时的极限. 在我们的讨论中，μ 子质量 m_μ 将保持固定. $\mu^\pm$ 衰变的零阶电子谱已在习题 21.1 中分析过. 如果考虑一阶辐射修正，包括红外光

子，则在完全极化的 μ 子静止系中终态 e 分布是 * (对于 $m_e \to 0$)

$$\mathrm{d}^2 N_{e^\mp} \propto x^2 \left\{3 - 2x + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) \pm \cos\theta \left[1 - 2x + \frac{\alpha}{2\pi} g(x)\right]\right\} \cdot \mathrm{d}x \mathrm{d}\cos\theta, \tag{23.112}$$

其中

$$f(x) = \left[\left(3 + 4\ln\frac{1-x}{x}\right)(3-2x) + \frac{1-x}{3x^2}(5 + 17x - 34x^2)\right]\ln\frac{m_\mu}{m_e} + O(1),$$

$$g(x) = \left[\left(3 + 4\ln\frac{1-x}{x}\right)(1-2x) + \frac{1-x}{3x^2}(1 + x + 34x^2)\right]\ln\frac{m_\mu}{m_e} + O(1), \tag{23.113}$$

与前面一样

$$\theta = \text{电子动量 } \boldsymbol{p} \text{ 和 } \mu \text{ 子自旋间的夹角},$$

$$x = \frac{2p}{m_\mu},\ p = |\boldsymbol{p}|.$$

$O(1)$项是有限的，但是当 $m_e \to 0$ 时，$\ln\frac{m_\mu}{m_e} \to \infty$，因此，$\mathrm{d}^2 N_e$ 显示出典型的质量奇异行为.

比如说，让我们考虑 μ^- 衰变

$$\mu^- \to e^-(\boldsymbol{p}) + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \tag{23.114}$$

遵循与前节同样的论证，我们看到，为了消除质量奇异性，我们只需要用

$$\mu^- \to \text{喷注}(\boldsymbol{p}) + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \tag{23.115}$$

代替(23.114). 这意味着，到 $O(\alpha)$阶，我们也必须考虑

$$\mu^- \to e^-(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) + \gamma(\boldsymbol{k}) + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \tag{23.116}$$

---

* Kinoshita T, Sirlin A. *Phys Rev*, 1959, **113**: 1652; Berman S. *Phys Rev*, 1958, **112**: 267. 历史上，质量奇异性的研究是由 Kinoshita 及 Sirlin 关于 μ 衰变的文章引起的.

其中终态动量 $\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ 满足喷注条件(23.110). 按照 KLN 定理,(23.114)及(23.116)的部分衰变速率之和应当没有任何对于 m_e 的质量奇异性. 对于足够小的喷注张角 δ,结果只是在(23.113)式中用

$$\ln\frac{m_\mu}{p\delta}\ \text{代替}\ \ln\frac{m_\mu}{m_e} \tag{23.117}$$

当 $m_e\to 0$ 时,前者是有限的.

根据同样的理由,μ 总衰变速率的辐射修正也必定没有质量奇异性. 正如从(21.7)式可以看到的,这是理所当然的.

23.7 量子色动力学(QCD)中的喷注

应用 KLN 定理于量子色动力学,我们同样可以消去其微扰级数中的质量奇异性. 步骤与量子电动力学中采用的完全一样. 与上节相同,我们用粒子喷注代替反应中任何快速运动的夸克或胶子. 每个喷注再次用动量空间中的一个小锥来刻画. 锥内是平行运动的无质量粒子集合. 我们可以用强子喷注代替特定的强子去试验微扰量子色动力学的实验预言. 既然喷注的微分截面没有质量奇异性,我们就可以把夸克部分子模型推广到不是单举反应的过程(单举反应已在 23.3 节及 23.4 节讨论过).

1. **2 喷注截面** 作为一个具体例子,让我们考虑高能 e^+e^- 湮没为强子. 精细结构常数取到一阶,但量子色动力学耦合取到任意阶,此时,此反应必定通过 γ 及 Z^0 交换进行. 正如图 23.4 所画的,终态将分解为不同数目的喷注. 最简单的是 2 喷注事例:

$$e^+ + e^- \to \gamma(\text{或 } Z^0) \to 2\ \text{个强子喷注}. \tag{23.118}$$

让我们选择质心系并考虑部分截面

$$d\Omega\,\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\ \theta,\ \omega,\ \delta), \tag{23.119}$$

其中,反应的总能量为 $2E$, 2 个喷注的总能量大于

$$2E-\omega, \tag{23.120}$$

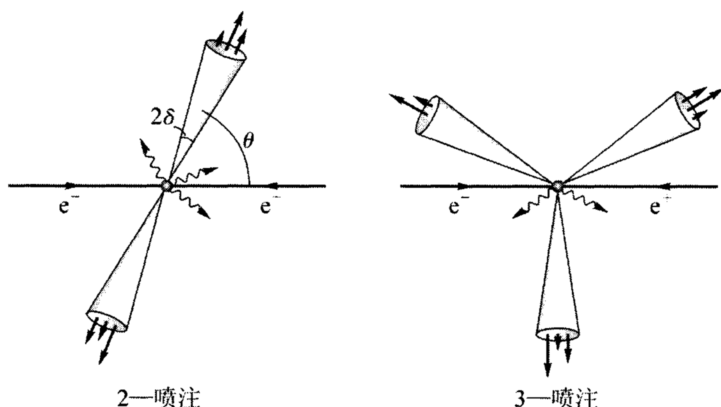


图 23.4　$e^+ + e^- \to 2$ 喷注及 3 喷注[短波线表示软粒子.]

其中 ω 为红外截止参数,满足

$$\varepsilon \equiv \frac{\omega}{2E} \ll 1 \tag{23.121}$$

在动量空间中,每个喷注由动量在半角为

$$\delta \ll 1 \tag{23.122}$$

的窄锥内的粒子组成,两个锥的方向彼此相反,它们的轴与 e^+e^- 束的方向成 θ 角,并且在小立体角 $d\Omega$ 内.

令 g_E 为定义* 于 4 动量数量级为 E 的重正化点处的夸克-胶子耦

---

* 精确地说,我们可以在(18.141)式中设 $L = \frac{1}{E}$ 及 $g_L = g_E$. 从(18.140)式,我们看到,当 $E \to \infty$ 时,(18.155)式成为

$$\frac{g_E^2}{4\pi} = \frac{6\pi}{(33 - 2n_f)\ln(lE)} \tag{23.123}$$

其中 n_f 是夸克味数,l 是理论中的长度参数,它确定在给定高能 E 处的耦合 g_E.

从高能中微子实验发现(J. Steinberg,私人通信)

$$l^{-1} = (0.20 \pm 0.05)\text{GeV} \tag{23.124}$$

我们可以将(23.123)式与前面(20.79)式给出的数值 $\alpha_c = 0.39$ 相比较. 设 $n_f = 5$ (u、d、s、b、c 夸克)及 $(4\pi)^{-1} g_E = 0.39$, 我们发现有关的 $E \simeq 1.6$ GeV, 此值是十分合理的,因为按照(20.74)及(20.79)式,这五种夸克的平均质量大约是1.45 GeV.

合.下面,我们将忽略 Z^0 交换振幅,只考虑最低阶 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 的图.

到 g_E 的零阶,反应(23.118)简化为

$$e^- + e^+ \to q + \bar{q} \tag{23.125}$$

它由图 23.5a 给出.忽略电子质量后,相应的微分截面为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{\alpha^2}{16E^2}(1+\cos^2\theta)\sum_f 3\left(\frac{e_f}{e}\right)^2 \tag{23.126}$$

其中 e_f 是味为 f 的夸克的电荷,θ 现在就是质心系中 e^- 的动量 $\boldsymbol{l}$ 与夸克动量 $\boldsymbol{p}$ 之间的夹角.[推导见习题 6.1 及(17.1)式]

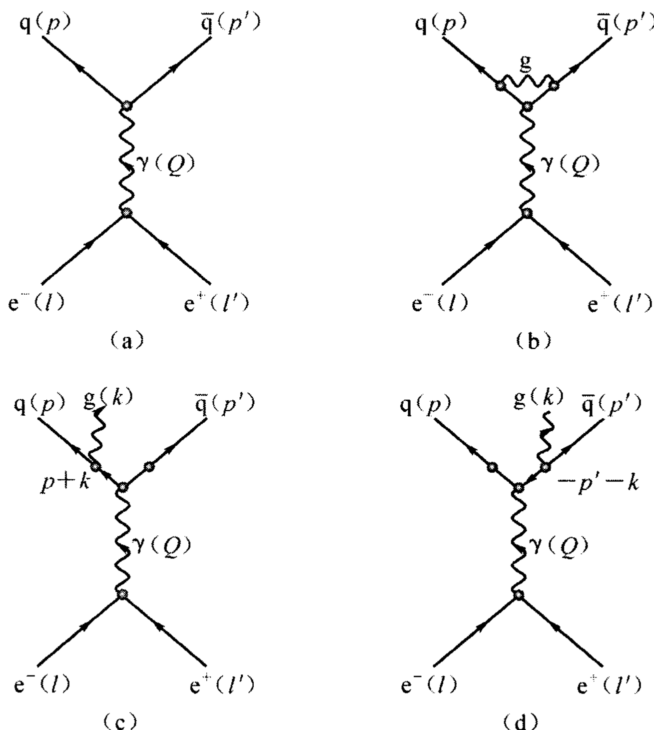


图 23.5 $e^+ + e^- \to \gamma \to q + \bar{q}$ 及 $e^+ + e^- \to \gamma \to q + \bar{q} + g$ 的图
这里,箭头表示 4 动量流的方向[自能图已略去.]

到 $O(g_E^2)$阶,图 23.5 中的量子色动力学辐射修正图 b 应该计入.其

振幅由于质量奇异性而发散. 如果我们保持夸克质量为 0,但给胶子以虚构质量 μ,则图 a 与图 b 振幅之和的平方给出 *

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{a+b} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \left\{1 - \frac{g_E^2}{3\pi^2}\left[2\left(\ln\frac{2E}{\mu}\right)^2 - 3\ln\frac{2E}{\mu} + O(1)\right]\right\}, \tag{23.127}$$

其中,$O(1)$项当 $\mu\to 0$ 时保持有限. 正如所料,在此极限下,(23.127)式发散.

另一方面,到 g_E^2 的同一阶,如果

$$\mathrm{e}^-(l) + \mathrm{e}^+(l') \to \mathrm{q}(p) + \bar{\mathrm{q}}(p') + \mathrm{g}(k) \tag{23.128}$$

满足条件(23.120)—(23.122)式,则也包括在 2 喷注过程内. (23.128)式中,g 是胶子,l、l'、p、p'及 k 是各粒子的 4 动量. 在质心系中,这些动量的分量为

$$\begin{aligned}
l &= (\boldsymbol{l},\ \mathrm{i}E) = (\hat{l}\ ,\ \mathrm{i})E, \\
l' &= (-\boldsymbol{l},\ \mathrm{i}E) = (-\hat{l}\ ,\ \mathrm{i})E, \\
p &= (\boldsymbol{p},\ \mathrm{i}p_0) = (\hat{p}\ ,\ \mathrm{i})p_0\,, \\
p' &= (\boldsymbol{p}',\ \mathrm{i}p_0') = (\hat{p}',\ \mathrm{i})p_0'\,, \\
k &= (\boldsymbol{k},\ \mathrm{i}k_0) = (\hat{k}\ ,\ \mathrm{i})k_0
\end{aligned} \tag{23.129}$$

及

$$Q \equiv l + l' = p + p' + k = (0,\ \mathrm{i}2E).$$

根据(23.120)—(23.122)式,此反应中被确认为 2 喷注事例的三粒子终态,必须满足下列两个条件中的**任何**一个:

(i) 终态动量中有两个,其

$$夹角 \leqslant 2\delta \ll 1. \tag{23.130}$$

无论它们是软粒子还是硬粒子都可以.

(ii) 终态粒子之一是软粒子,即其能量小于

---

* Stevman G, Weinberg S. *Phys Rev Lett*, 1977, **39**: 1436.

$$\omega = 2\epsilon E \ll E, \tag{23.131}$$

此外,其他两个粒子动量间的夹角在

$$\pi - \delta \text{ 及 } \pi \text{ 之间.} \tag{23.132}$$

令$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{i}$及$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ii}$分别表示反应(23.128)在区域(i)及(ii)中的微分截面. 到$O(g_E^2)$阶,2 喷注微分截面是三项之和:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{2\text{喷注}} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{a+b} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{i} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ii}, \tag{23.133}$$

按照 KLN 定理,当虚构质量$\mu = 0$时,上式应当保持有限. 正如在下节中我们将证明的(于 623 页上导出),结果为 *

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{2\text{喷注}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0}\left\{1 - \frac{g_E^2}{3\pi^2}[(3 + 4\ln 2\epsilon)\ln\delta + O(1)]\right\}, \tag{23.134}$$

此式确实没有质量奇异性. 上式中,当物理参数δ和$\epsilon \to 0$时,$O(1)$项保持有限,$\to \frac{2\pi^2 - 15}{6}$.

因为在(23.134)式中,大括号中的因子与θ无关,2 喷注的角分布简单地由最低阶微扰公式(23.126)给出. 实验上,

$$1 + \cos^2\theta$$

分布有很好的证据**,这支持了夸克部分子模型及量子色动力学的一般概念.

2. 3 喷注事例　类似地,我们看到,为导出 3 喷注事例的分布,我们只需考察其最低阶微扰公式. 在(23.128)式中,处在上节所说的区域(i)及(ii)以外的任何 $q\bar{q}g$ 终态组态都算作 3 喷注事例. 现在让我们来计算

---

* Sterman G, Weinberg S. 同前页,亦见 Stevenson P M. *Phys Lett*, 1978 **78B**: 451.

** 见 Proceedings of the IX International Symposium on lepton and Photon Interactions at High Energies. Fermilab, 1979, 38. ed. Kirk T B and Abarbanel H D I.

其微分截面. 图 23.5c 和 d 振幅之和中,轻子流算符的矩阵元是

$$\langle 0 \mid j_\mu \mid e^+e^- \rangle = -\mathrm{i}ev^\dagger_{l',s'}\gamma_4\gamma_\mu u_{l,s}, \tag{23.135}$$

强子流算符的矩阵元,据 125—126 页上给出的定则,为

$$\langle q\bar{q}g \mid J_\mu \mid 0\rangle = \frac{1}{\alpha}e_f g_E$$

$$\cdot u^\dagger_{p,s}\gamma_4\left[\gamma_\nu V^l_\nu\lambda^l \frac{1}{\not p' + \not k}\gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{1}{\not p' + \not k}\gamma_\nu V^l_\nu\lambda^l\right]v_{p',s'}, \tag{23.136}$$

其中,如前面一样,$e > 0$ 是电荷,e_f 是味为 f 的夸克的电荷,g_E 是能量为 E 处的量子色动力学耦合,V^l_μ 是胶子的振幅,λ^l 及 γ_μ 由(12.22)及(3.12)式给出,$u_{k,s}$ 及 $v_{k',s'}$(其中 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}$ 或 $\boldsymbol{l}$)是质量 $=0$ 时(3.26)—(3.27)式的旋量解. 在质心系中,e^+ 动量 $\boldsymbol{l}'$ 与 e^- 动量的关系是

$$\boldsymbol{l}' = -\boldsymbol{l}.$$

如(5.124)式中一样,我们引进 $L_{\mu\nu}$. 将轻子矩阵元平方并对初态自旋取平均即得到

$$L_{\mu\nu} \equiv \pm\frac{1}{4}\sum_{s,s'}\langle 0 \mid j_\mu \mid e^+ e^-\rangle\langle 0 \mid j_\nu \mid e^+ e^-\rangle^*, \tag{23.137}$$

其中 * 表示复共轭,$\nu \neq 4$ 时上式取 + 号,$\nu = 4$ 时取 − 号. 从(5.125)式,我们看到

$$L_{\mu\nu} = \frac{e^2}{4E^2}(l_\mu l'_\nu + l'_\mu l_\nu - \delta_{\mu\nu} l \cdot l'), \tag{23.138}$$

其中,如前面一样,$2E$ 是总质心能量. 同样,对强子矩阵元类似地取平方(用同样的正负号约定),并对所有终态极化、颜色及味求和结果定义为 $H_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} \equiv \pm\sum_{\substack{s,s',t\\ c,f}}\langle q\bar{q}g \mid J_\mu \mid 0\rangle\langle q\bar{q}g \mid J_\nu \mid 0\rangle^*, \tag{23.139}$$

其中 c 和 f 是色和味指标,t 是胶子的极化矢量. 对于动量为 $\boldsymbol{k}$ 的胶子,

$$t = \text{图 6.1 给出的单位矢量 } \hat{e}_1 \text{和 } \hat{e}_2. \tag{23.140}$$

为对 c 求和,我们注意到*,由于(6.32)—(6.34)及(12.23)式,

$$\mathrm{Trace}(V_\mu^l\lambda^l V_\nu^m\lambda^m)=\frac{1}{2k_0}t_\mu t_\nu\delta^{lm}\mathrm{Trace}(\lambda^l\lambda^m)$$
$$=\frac{8}{k_0}t_\mu t_\nu, \tag{23.141}$$

因此将(23.136)式代入(23.139)式并用(23.141)式,

$$\gamma_\nu t_\nu = \mathrm{i}\not{t},$$
$$(\not{p}+\not{k})^2=-(p+k)^2=-2p\cdot k,$$
$$\frac{1}{\not{p}+\not{k}}=-\frac{1}{2p\cdot k}(\not{p}+\not{k})$$

及 3.4 节末的练习,我们发现

$$H_{\mu\nu}=-\frac{1}{8p_0p_0'k_0}\sum_{f,t}(e_fg_E)^2$$
$$\cdot\mathrm{Trace}\Big(\not{p}\Big[\not{t}\frac{1}{p\cdot k}(\not{p}+\not{k})\gamma_\mu-\gamma_\mu\frac{1}{p'\cdot k}(\not{p}'+\not{k})\not{t}\Big]$$
$$\cdot\not{p}'\Big[\gamma_\nu\frac{1}{p\cdot k}(\not{p}+\not{k})\not{t}-\not{t}\frac{1}{p'\cdot k}(\not{p}'+\not{k})\gamma_\nu\Big]\Big), \tag{23.142}$$

因为(5.111)式,(23.128)的微分截面是

$$\mathrm{d}\sigma=\pi\Big(\frac{1}{8\pi^3}\Big)^2\int|\mathfrak{M}(p,\ p',\ k)|^2\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\delta(p_0+p_0'$$
$$+k_0-2E), \tag{23.143}$$

其中,由于光子传播子中

$$\frac{1}{Q^2}=-\frac{1}{4E^2},$$

所以有

$$|\mathfrak{M}(p,\ p',\ k)|^2=\Big(\frac{1}{4E^2}\Big)^2L_{\mu\nu}H_{\mu\nu}. \tag{23.144}$$

(23.142)式中迹的计算是直接的,在习题 23.1 及 23.2 中算出. 用这

---

* 在(23.141)式中,只对色自由度求迹. 为方便起见,我们也如(5.125)式一样,设系统的体积=1.

些习题中导出的(23.177)式,我们得到

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{M}(p,\,p',\,k)|^2 = & -\frac{1}{16E^6 k_0 p_0 p_0'}\sum_f (ee_f g_E)^2 \\
& \cdot\left\{\frac{p\cdot p'}{(p\cdot k)(p'\cdot k)}[2(p\cdot l)(p'\cdot l')+2(p\cdot l')(p'\cdot l)\right. \\
& -2(k\cdot l)(k\cdot l')+(Q\cdot l)(Q\cdot k)]+\frac{1}{p\cdot k} \\
& \cdot[(Q\cdot l)(Q\cdot p')-2(p\cdot l)(p\cdot l')-2(p'\cdot l)(p'\cdot l')] \\
& +\frac{1}{p'\cdot k}[(Q\cdot l)(Q\cdot p)-2(p\cdot l)(p\cdot l') \\
& \left.-2(p'\cdot l)(p'\cdot l')]\right\}.
\end{aligned}
\tag{23.145}
$$

其中 l、l'、p、p'、k 及 Q 由(23.129)式给出.

为将上式的 $d\sigma$ 变换为 3 喷注事例的 $d\sigma$,我们必须去掉区域(i)及(ii),现在我们考察其细节.

3. **达利兹图** 在质心系中,让我们表示各角度为

$$
\begin{aligned}
&\theta = \angle(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{l}),\ \theta' = \angle(\boldsymbol{p}',\,\boldsymbol{l}), \\
&\alpha = \angle(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p}'),
\end{aligned}
\tag{23.146}
$$

并引进无量纲参数

$$
x \equiv \frac{p_0}{E},\ y \equiv \frac{p_0'}{E}
$$

及

$$
z \equiv \frac{k_0}{E}. \tag{23.147}
$$

能量守恒给出

$$
x + y + z = 2. \tag{23.148}
$$

据 15.1 节的讨论,我们知道,图 15.3b 中打斜线的三角形为达利兹图,其中大三角形的高取为 2. 每个 $q\bar{q}g$ 终态组态定出达利兹图内的一个点.(亦见图 23.7). 因为

$$
\boldsymbol{k} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' = 0,
$$

所以角度 α 与 x、y、z 的关系为

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha. \tag{23.149}$$

为方便起见，考虑一个单位球. 从球心 o 画单位矢量 $\hat{l}$ 、$\hat{p}$ 及 $\hat{p}'$. 它们确定球面三角形 lpp'，见图 23.6. 如果我们把经过 p、p'的大圆看作赤道，则北极 n 定义一个单位矢量

$$\hat{n} \equiv \boldsymbol{on} \,/\!/\, \hat{p} \times \hat{p}', \tag{23.150}$$

令 P 为赤道上任选的一点，且有

$$\phi = \widehat{Pp}.$$

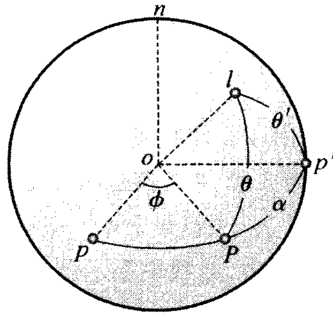


图 23.6 径向矢量 $\boldsymbol{ol}$、$\boldsymbol{op}$ 及 $\boldsymbol{op}'$等于 $\hat{l}$ 、$\hat{p}$ 及 $\hat{p}'$

现在考虑从 $\hat{p}$ 、$\hat{p}'$到 $\hat{n}$ 、α 及 ϕ 的坐标**变换**. 正如我们将证明的

$$\mathrm{d}^2\hat{p}\,\mathrm{d}^2\hat{p}' = \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}^2\hat{n} \tag{23.151}$$

在图 23.6 中考虑下列四个无限小转动可以导出上式：先沿 $\boldsymbol{on}$ 转动角 $\mathrm{d}\alpha$（保持 P 及 p 固定），然后转动角 $\mathrm{d}\phi$（保持 P 及 p'固定）. 再保持球面三角形 npp'边的弧长固定，沿 $\boldsymbol{op}$ 转动角 $\mathrm{d}\xi$，最后沿 $\boldsymbol{op}'$转动角 $\mathrm{d}\eta$. 点 n、p 和 p'每个都移动两次，这些位移形成平行四边形的边，其面积为

$$\mathrm{d}^2\hat{n} = \sin\alpha\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

$$\mathrm{d}^2\hat{p} = \sin\alpha\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\phi$$

及

$$\mathrm{d}^2\hat{p}' = \sin\alpha\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha,$$

它们导致(23.151)式.

正如(15.5)—(15.6)式一样，用(23.147)—(23.151)式，我们看到

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{|\mathfrak{M}|^2}{k_0 p_0 p_0'} \mathrm{d}^3 p \mathrm{d}^3 p' \delta(p_0 + p_0' + k_0 - 2E) \\
&= \int \mathrm{d}\phi \mathrm{d}^2 \hat{n} \mathrm{d}p_0 \mathrm{d}p_0' \ |\mathfrak{M}|^2 \\
&= 2\pi E^2 \int \mathrm{d}^2 \hat{n} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ |\mathfrak{M}|^2. \qquad (23.152)
\end{aligned}
$$

为进行 $\mathrm{d}^2\hat{n}$ 积分，我们可考虑固定球面三角形 npp'，但 $|\mathfrak{M}|^2$ 对所有可能的 $\hat{l}$ 方向取平均. 用平均值

$$
(\hat{p} \cdot \hat{l})^2_{平均} = (\hat{p}' \cdot \hat{l})^2_{平均} = (\hat{k} \cdot \hat{l})^2_{平均} = \frac{1}{3},
$$

$$
[(\hat{p} \cdot \hat{l})(\hat{p}' \cdot \hat{l})]_{平均} = \frac{1}{3}\hat{p} \cdot \hat{p}' = \frac{1}{3}\cos\alpha,
$$

我们发现 *，在对角度积分后，

$$
\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \mathrm{q} + \bar{\mathrm{q}} + \mathrm{g}
$$

的微分截面为

$$
\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3E^2}\alpha^2 \frac{g_E^2}{4\pi} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{x^2 + y^2}{(1-x)(1-y)} \sum_f \left(\frac{e_f}{e}\right)^2, \qquad (23.153)
$$

其中 x 和 y 定义于(23.147)式.

4.3 **喷注截面**　到 g_E 最低阶，把反应

$$
\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to 喷注(p_1) + 喷注(p_2) + 喷注(p_3) \qquad (23.154)
$$

与

$$
\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \mathrm{q}(p) + \bar{\mathrm{q}}(p') + \mathrm{g}(k)
$$

联系起来的办法是把每个 q、$\bar{\mathrm{q}}$ 及 g 粒子看成一个喷注. 于是，第 i 个喷注的 4 动量 p_i 可以是 p，p'，或 k. 3 喷注微分截面可从(23.143)式经对称化后导出：

$$
\mathrm{d}\sigma_{3喷注} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^2 \int \Big\{ |\mathfrak{M}(p_1, p_2, p_3)|^2
$$

---

* Ellis J, Gaillard MK, Ross G. *Nucl Phys*, 1976, **B111**: 253; Grand TA De, Ng YJ, Tye S-H H. *Phys Rev*, 1977, **D16**: 3251.

$$+|\mathfrak{M}(p_2, p_3, p_1)|^2+|\mathfrak{M}(p_3, p_1, p_2)|^2\Big\}$$
$$\cdot d^3p_1d^3p_2d^3p_3\delta^4(p_1+p_2+p_3-Q), \tag{23.155}$$

其中 Q 由(23.129)式定义,$|\mathfrak{M}(p_1, p_2, p_3)|^2$ 由(23.144)式给出,它对于前两个变量已经是对称的,即

$$|\mathfrak{M}(p_1, p_2, p_3)|^2=|\mathfrak{M}(p_2, p_1, p_3)|^2.$$

让我们定义

$$x_1\equiv\frac{|\boldsymbol{p}_1|}{E},\ x_2\equiv\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{E}$$

及
$$x_3=\frac{|\boldsymbol{p}_3|}{E}, \tag{23.156}$$

则如(23.148)式一样,有

$$x_1+x_2+x_3=2. \tag{23.157}$$

既然根据定义,3 喷注分布对于 p_1、p_2 及 p_3 对称,则在达利兹图中,我们只需要考虑,比如说,区域

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3, \tag{23.158}$$

此外,它们必定在 613 页上讨论过的区域 i 及 ii 之外. 称该许可区域为 $R_{3喷注}$,在图 23.7 中,阴影线区域画的就是它. 实验上,每个 3 喷注事例给

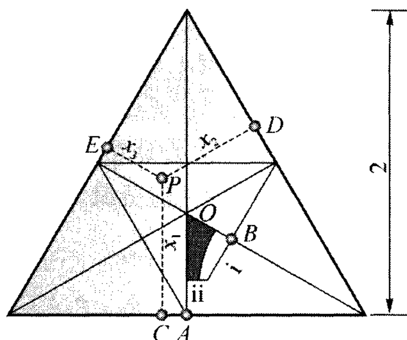


图 23.7 达利兹图

阴影线区域是 3 喷注事例区. i 和 ii 是 2 喷注事例区,它们的边界见(23.167)及(23.172)式.

出 $R_{3喷注}$ 中的一个点. 与上节一样,完成角度积分,可以得到达利兹图中的分布. 将(23.153)式对 3 个喷注对称化,并且,考虑到限制(23.158),因而用 6 乘它,即可发现,(23.154)的微分截面及总截面为:

$$d\sigma_{3喷注} = \frac{4}{3E^2}\alpha^2 \frac{g_E^2}{4\pi} P(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \sum_f \left(\frac{e_f}{e}\right)^2 \tag{23.159}$$

及

$$\sigma_{3喷注} = \int_{R_{3喷注}} d\sigma_{3喷注},$$

其中

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{(1-x_2)(1-x_3)} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{(1-x_3)(1-x_1)}. \tag{23.160}$$

沿着图 23.7 中的 AB 线,有 $x_3 = 1$, 因此,(23.160)式右边第二及第三项是奇异的. 因为去掉了区域 i 和 ii, 3 喷注截面在 $R_{3喷注}$ 内当然是有限的. 为了考察 i 和 ii 的边界,只要考虑 AB 的近邻区域.

我们回想起,在质心系中,三个三维动量矢量 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{p}_3$ 之和为零,并且,因为选择的区间是(23.158),它们的相对定向一般形式见图 23.8,它们的夹角为

$$\theta_{ij} \equiv \angle(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j),$$

满足

$$\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31} = 2\pi$$

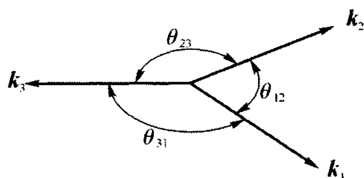


图 23.8　$\boldsymbol{k}_i$ 及 $\boldsymbol{k}_j$ 间的夹角是 $\boldsymbol{\theta}_{ij}$

及

$$\sin\frac{1}{2}\theta_{ij} = \left[\frac{1-x_k}{x_i x_j}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{23.161}$$

其中(i, j, k)是(1, 2, 3)的一个置换.

在图 23.7 中 AB 附近有

$$\zeta \equiv 1 - x_3 \ll 1, \tag{23.162}$$

因此，

$$x_2 = 2 - x_1 - x_3 = 1 - x_1 + \zeta \cong 1 - x_1,$$

$$\sin\frac{1}{2}\theta_{12} \cong \left[\frac{\zeta}{x_1(1-x_1)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{23.163}$$

同样，忽略 ζ 的高次幂，我们发现

$$\pi - \theta_{23} \cong 2\left[\frac{\zeta(x_1-\zeta)}{1-x_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cong \begin{cases} 2\left[\dfrac{\zeta x_1}{1-x_1}\right]^{\frac{1}{2}}, & \text{如果 } x_1 = O(1), \\ 2[\zeta(x_1-\zeta)]^{\frac{1}{2}}, & \text{如果 } x_1 = O(\zeta). \end{cases} \tag{23.164}$$

沿着 $\zeta =$ 常数 $\ll 1$，在三角形 OAB 内，x_1 的区间

$$\text{从 } 2\zeta \text{ 到} \frac{1}{2}(1+\zeta) \cong \frac{1}{2},$$

因此，θ_{12} 从

$$\theta_{12} \cong \frac{\pi}{2}\ (x_1 = 2\zeta \text{ 时}), \tag{23.165}$$

下降到

$$\theta_{12} \cong 2\left[\frac{\zeta}{x_1(1-x_1)}\right]^{\frac{1}{2}} (x = O(1) \text{ 时}). \tag{23.166}$$

不过，角度 $\pi - \theta_{23}$ 永远是小的，$\leqslant 2\sqrt{\zeta}$. 在区域(ii)，因为(23.131)式，

$$x_1 \leqslant 2\varepsilon. \tag{23.167}$$

条件(23.132)成为

$$0 \leqslant \pi - \theta_{23} \leqslant \delta, \tag{23.168}$$

由于(23.164)式的最后一式，故上式为

$$\zeta(x_1 - \zeta) \leqslant \frac{\delta^2}{4},$$

此式恒同于

$$\left(\frac{x_1}{2} - \zeta\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}(x_1^2 - \delta^2). \tag{23.169}$$

如果我们把 ϵ 及 δ 都看成无穷小量，并选择

$$2\varepsilon < \delta, \tag{23.170}$$

则在 $x_1 \leqslant 2\epsilon$ 区域，(23.169)式自动满足. 因此，(23.168)式也成立. 在区域(i)，鉴于(23.130)式，我们要求

$$\theta_{12} \leqslant 2\delta, \tag{23.171}$$

此式给出其弯曲的边界为

$$\zeta = x_1(1 - x_1)\delta^2. \tag{23.172}$$

用(23.159)—(23.160)式并将 $d\sigma_{3喷注}$ 对整个 $R_{3喷注}$ 区域积分，我们发现，到 $O(g_E^2)$

$$\sigma_{3喷注} = \frac{1}{E^2}\alpha^2\left(\frac{g_E^2}{3\pi}\right)[(3 + 4\ln 2\varepsilon)\ln\delta + O(1)]\sum_f\left(\frac{e_f}{e}\right)^2, \tag{23.173}$$

其中 $O(1)$ 项在 $\varepsilon \to 0$ 及 $\delta \to 0$ 时是有限的. [见习题 23.3.] 到 g_E^2 的同一阶，

$$\sigma_{总} \equiv \sigma_{2喷注} + \sigma_{3喷注}$$

是

$$e^+ + e^- \to 强子 \tag{23.174}$$

的总截面，根据 KLN 定理，它没有质量奇异性. 由于在(23.174)式中，我们已对全部角度及能量区域积分，所以 $\sigma_{总}$ 也与 δ 及 ε 无关. 因此，(23.173)式的上述推导也证明了早些时候给出的 $d\sigma_{2喷注}$ 表达式(23.134).

5. **喷注间的关联** 在从 $q\bar{q}g$ 的微分截面(23.153)式过渡到 3 喷注的(23.159)式时，失去了有关夸克及胶子的差别的信息. 这是因为在实际的实验观察中，每个喷注是一个多粒子流锥. 由于软粒子可以在喷注外面，每个喷注的量子数有很大的涨落. 因此，考察单个喷注，不能讲出它是夸克喷注还是胶子喷注. 正如我们将看到的，通过关联测量，原则上应当能找回这些失去的信息.

例如考虑第 i 个喷注的电荷 $Q(i)$[以 e 为单位]. 由于在粒子-反粒子共轭下的对称性，对大量喷注事例的集合，$Q(i)$的平均值明显为 0，即

$$\langle Q(i)\rangle = 0.$$

下一步,让我们考虑二体电荷关联

$$\langle Q(1)Q(2)\rangle. \tag{23.175}$$

对于 2 喷注事例

$$e^+ + e^- \to \text{喷注}(1) + \text{喷注}(2)$$

的集合,其平均值由下式给出:

$$\langle Q(1)Q(2)\rangle_{2\text{喷注}} = -\frac{\sum_f (e_f/e)^4}{\sum_f (e_f/e)^2}, \tag{23.176}$$

到 g_E^2 的最低阶,其值为:

$$-\frac{1}{9}\ \frac{16+1+1}{4+1+1} = -\frac{1}{3} \quad (m_s < E < m_c \text{ 时}),$$

$$-\frac{1}{9}\ \frac{16+1+1+16}{4+1+1+4} = -\frac{17}{45} \quad (m_c < E < m_b \text{ 时}).$$

一个更有兴趣的问题是研究同一二体关联函数,但这是对于三喷注事例的集合求平均值. 正如(23.158)式一样,我们按照次序

$$x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1$$

安排三个喷注的能量以便区分它们. 因此,有三个不同的二体关联函数 $\langle Q(1)Q(2)\rangle$, $\langle Q(2)Q(3)\rangle$及$\langle Q(3)Q(1)\rangle$可以测量. 例如,考虑图 23.7 中达利兹图的打斜线的区域 $R_{3\text{喷注}}$ 内一固定点处的$\langle Q(1)Q(2)\rangle$,当喷注之一(1 或 2)是胶子喷注时,由于胶子电荷为 0, $Q(1)Q(2)$为零. 因此,到 g_E^2 最低阶,它对此集合的平均值为

$$\langle Q(1)Q(2)\rangle_{3\text{喷注}} = \langle Q(1)Q(2)\rangle_{2\text{喷注}} \times \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)P(x_1,\ x_2,\ x_3)}, \tag{23.177}$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3)$由(23.160)式给出. 通过(1, 2, 3)的置换,可以类似地导出 $Q(2)Q(3)$及 $Q(3)Q(1)$的平均值. 加在一起,它们满足

$$\langle Q(1)Q(2) + Q(2)Q(3) + Q(3)Q(1)\rangle_{3\text{喷注}}$$

$$= \langle Q(1)Q(2) \rangle_{2\text{喷注}}, \tag{23.178}$$

此式进而保证了到 g_E^2 的下一阶，$\langle Q(1)Q(2) \rangle_{2\text{喷注}}$ 的表达式没有质量奇异性.

不过，到 $O(g_E^4)$，有来自下列虚过程的质量奇异项：

先

$$e^+ + e^- \to q(p) + \bar{q}(p') + g(\text{在质壳外，但为软胶子}), \tag{23.179}$$

然后

$$g \to q(k) + \bar{q}(k'), \tag{23.180}$$

其中，$\boldsymbol{k}$ 在两个喷注锥（分别由(23.179)中的 $q(p)$ 及 $\bar{q}(p')$ 所定义）中的一个锥之内，而 $\boldsymbol{k}'$ 在另一个锥内. 因此，过程(23.179)—(23.180)合起来是一个 2 喷注事例. 其净效果是(23.176)式应当乘上一个质量奇异修正因子，其形式为：

$$1 + \delta^4 O\left(\left(\frac{g_E^2}{2\pi}\right)^2 \ln \frac{E\delta^2}{\mu}\right), \tag{23.181}$$

其中 μ 在微扰量子色动力学展开中应当为 0，δ^4 因子纯粹来自(23.180)中动量 $\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{k}'$ 落在两个方向相反的喷注锥内的概率. 对于实际应用而言，我们期望 μ 是典型的介子质量量级，～几百兆电子伏. 因此，对于充分小的 δ，不期望(23.181)式中的 g_E^4 项起重要作用. 此外，变化 δ，应当可能直接从实验数据中抽出 δ^4 关系的项，并且由此可能对于量子色动力学非微扰方面得到某些深入的了解.

同样，对于 3 喷注关联公式(23.177)，也有类似的 $g_E^4\delta^4$ 修正. 当然，类似的考虑可以推广到其他相加性量子数. 从理论观点看，确定这类质量奇异 δ^4 相关项的系数是很有兴趣的，因为它给了我们一类新的物理参数，实验上它们是可以测量的，但在微扰级数展开中，它们是发散的.

说明.　目前，实验上，无论胶子的自旋还是任何其他量子数都还没有确定. 为了证明其自旋为 1，必须确证 3 喷注事例的分布(23.160)式. 为了确定胶子的其他量子数，必须测量如(23.177)式那样的喷注间的关联.

习题 23.1.　(23.142)式定义的 $H_{\mu\nu}$ 是(23.140)式给出的极化 t_μ 的二次函数. 我们可以写

$$H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\alpha\beta} t_\alpha t_\beta,$$

其中 $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$对于 α 和 β 对称. 证明由于(6.51)式,

$$k_\alpha T_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0,$$

因此,极化求和可以变换为

$$\sum_{\epsilon} H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\alpha\alpha} \tag{23.182}$$

其中重复指标 α 从 1 到 4 求和.

习题 23.2. 在(23.138)式中,我们可以写

$$L_{\mu\nu} = \frac{e^2}{4E^2}(l, l')_{\mu\nu}$$

其中

$$(l, l')_{\mu\nu} \equiv l_\mu l'_\nu + l'_\mu l_\nu - \delta_{\mu\nu} l \cdot l'. \tag{23.183}$$

计算出(23.142)式的迹及对胶子极化求和,由此证明该式为

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = &-\frac{2}{p_0 p'_0 k_0} \sum_f (e_f g_E)^2 \\ &\cdot \left\{ \frac{p \cdot p'}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} [2(p \cdot p')_{\mu\nu} + (k, p + p')_{\mu\nu}] \right. \\ &+ \frac{1}{p \cdot k} [(p', p + k)_{\mu\nu} - (p, p)_{\mu\nu}] \\ &\left. + \frac{1}{p' \cdot k} [(p, p' + k)_{\mu\nu} - (p', p')_{\mu\nu}] \right\} \end{aligned} \tag{23.184}$$

习题 23.3. 将 $d\sigma_{3喷注}$(即(23.159)式)对于图 23.7 中阴影线的区域 $R_{3喷注}$积分,并证明 $\sigma_{3喷注}$ 由(23.173)式给出.

参 考 文 献

Smith CH L. Neutrino Reactions at Accelator Energies. *Physics Reports*, 1972, **3c**:261.

Kogut J, Susskind L. The Parton Picture of Elementary Particles. *Physics Reports*, 1973, **8c**:75.

The Mark J Collaboration. Physics with High Energy Electron-positron Colliding Beams with the Mark J Detector. *Physics Peports*, 1980, **63**:337.

第24章 手征对称性

夸克模型向我们提供了强子内部结构的一个简单的图像. 它也给了我们一种有效的方法去描述强子的高能动力学. 在大多数情形中，量子色动力学的修正相对来说是小的. 它们常常是算得出来的，并且可以用来检验理论基础的普遍正确性. 夸克模型的许多成功依赖于下列状况：作为一个合理的近似，可以把夸克看成自由粒子或相互作用微弱的粒子(禁闭机理除外). 不过，对于低能强子反应，此点不成立. 如果用夸克描写，这些低能反应包含着多体动力学，从而面临看来是困难的问题.

幸而，下列事实帮助了我们：π 介子比任何其他强子质量轻得多. 因此，多数低能强子反应以 π 介子交换为主. 根本的理由是 u 夸克及 d 夸克在强子内的质量小，这使得人们能导出近似手征对称性及部分轴矢量流守恒(PCAC). 尽管历史上这些课题的研究相对地独立于夸克模型，但正如我们将看到的，它们与我们的总图象和谐一致，并且形成我们理解强作用的基石之一.

24.1 流代数*

这一章中，我们限于仅仅讨论有关由 u, d 及 s 夸克组成的强子的低能定理. 令 $\psi_u^c(x)$, $\psi_d^c(x)$ 及 $\psi_s^c(x)$ 分别为它们的场算子，上指标 $c = 1, 2, 3$ 是色指标. 定义

$$q(x) = \begin{pmatrix} \psi_u^c(x) \\ \psi_d^c(x) \\ \psi_s^c(x) \end{pmatrix}, \tag{24.1}$$

---

* Gell-mann M. *phys Rev*, 1962, **125**:1067; *physics*, 1964, **1**:63.

并且,对于任何颜色无关的矩阵 Γ

$$q^{\dagger}\Gamma q = \sum_{c} q^{\dagger}\Gamma q, \tag{24.2}$$

其中色指标 c 求和. 从第 21 章及第 22 章,我们看到,这些强子的弱作用及电磁作用紧密地与八个矢量流算子

$$v_{\mu}^{l}(x) \equiv \mathrm{i}q^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_{\mu}\frac{1}{2}\lambda^{l}q(x) \tag{24.3}$$

及八个轴矢量流算子

$$a_{\mu}^{l}(x) \equiv \mathrm{i}q^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_{\mu}\gamma_5\frac{1}{2}\lambda^{l}q(x) \tag{24.4}$$

有关,其中,如通常一样,γ_{μ} 是狄拉克矩阵,λ^{l} 是满足(12.22)式的盖尔曼矩阵.

1. **素朴对易子** 考虑两个时空点

$$x_{\mu} = (\boldsymbol{r},\ \mathrm{i}t) \quad 及 \quad x'_{\mu} = (\boldsymbol{r}',\ \mathrm{i}t') \tag{24.5}$$

在等时 $(t = t')$ 条件下,我们可以应用(3.24a)并得到

$$[V_4^{l}(x),\ V_{\mu}^{m}(x')] = [a_4^{l}(x),\ a_{\mu}^{m}(x')] = -f^{lmn}V_{\mu}^{n}(x)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

及

$$[V_4^{l}(x),\ a_{\mu}^{m}(x')] = [a_4^{l}(x),\ V_{\mu}^{m}(x')] = -f^{lmn}a_{\mu}^{n}(x)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{24.6}$$

其中 f^{lmn} 由(12.24)式给出*,这些表达式将称为素朴对易子,因为,正如我们在下节将看到的,除掉 $\mu = 4$ 外,必须引进修正. 不过,将要证明,对于所有的实际应用,可以简单地忽略这些修正. 暂时接受这一点,我们就可以积分(24.6)式,从而导出这些定域流及它们的荷

$$Q_v^{l}(t) \equiv -\mathrm{i}\int V_4^{l}(x)\mathrm{d}^3 r$$

与

---

* 这里的 λ^{l} 及 f^{lmn} 与第 12 章中所用过的 λ_l 及 f_{lmn} 完全相同.

$$Q_a^l(t) \equiv -\mathrm{i}\int a_4^l(x)\mathrm{d}^3 r \tag{24.7}$$

之间的等时对易关系. 我们发现

$$[Q_v^l(t),\ V_\mu^m(x)] = [Q_a^l(t),\ a_\mu^m(x)] = \mathrm{i}f^{lmn}V_\mu^n(x)$$

及

$$[Q_v^l(t),\ a_\mu^m(x)] = [Q_a^l(t),\ V_\mu^m(x)] = \mathrm{i}f^{lmn}a_\mu^n(x). \tag{24.8}$$

设(24.8)式中 $\mu = 4$ 并再次积分,即得在任何给定时刻 t,

$$[Q_v^l(t),\ Q_v^m(t)] = [Q_a^l(t),\ Q_a^m(t)] = \mathrm{i}f^{lmn}Q_v^n(t)$$

及

$$[Q_v^l(t),\ Q_a^m(t)] = [Q_a^l(t),\ Q_v^m(t)] = \mathrm{i}f^{lmn}Q_a^n(t). \tag{24.9}$$

用下法最容易显示出群的结构:构造组合

$$Q_\pm^l = \frac{1}{2}(Q_v^l \pm Q_a^l), \tag{24.10}$$

则它们满足

$$[Q_+^l(t),\ Q_+^m(t)] = \mathrm{i}f^{lmn}Q_+^n(t),$$

$$[Q_-^l(t),\ Q_-^m(t)] = \mathrm{i}f^{lmn}Q_-^n(t) \tag{24.11}$$

以及

$$[Q_+^l(t),\ Q_-^m(t)] = 0.$$

因此,Q_+^l 及 Q_-^l $(l = 1, 2, \cdots, 8)$ 分别是 SU_3 群的生成元. 既然它们彼此对易,这十六个算子生成的群$\{g\}$是

$$\{g\} = SU_3 \times SU_3, \tag{24.12}$$

流 V_μ^l 及 a_μ^l 形成此群的[8, 8]表示.

由

$$P(t)q(\boldsymbol{r},\ t)P^\dagger(t) \equiv \eta\gamma_4 q(-\boldsymbol{r},\ t) \tag{24.13}$$

定义宇称算子 $P(t)$是有用的,其中 q 是夸克场,正如(10.9)式一样,η 是相因子. 从(10.60)式,我们看到

$$P(t)Q_v^l(t)P^\dagger(t) = Q_v^l(t). \tag{24.14}$$

类似地,

$$P(t)Q_a^l(t)P^\dagger(t) = -Q_a^l(t).$$

因此,$P(t)$把 $SU_3 \times SU_3$ 群的生成元 $Q_+^l(t)$ 及 $Q_-^l(t)$ 联系起来:

$$P(t)Q_+^l(t)P^\dagger(t) = Q_-^l(t)$$

及

$$P(t)Q_-^l(t)P^\dagger(t) = Q_+^l(t), \tag{24.15}$$

群

$$\{g, g^P\}$$

称之为手征 $SU_3 \times SU_3$ 群.

至今我们还没有研究这些算子与时间的关系.它们的等时对易子是与系统的哈密顿量无关的.

2. Goto-Imamura-Schwinger 修正* 在推导(24.6)式时,我们用了(3.24a)式,此式依靠某些相当奇异的包含四个场算子在同一时空点乘积的量的形式运算,现在我们要说明这些形式运算是不恰当的.

方便的是把 V_μ^l 及 a_μ^l 放在一起构成十六个流算子 J_μ^α 的集合:

$$\{J_\mu^\alpha\} \equiv \{V_\mu^l, a_\mu^m\}, \tag{24.16}$$

其中 $\alpha = 1, 2, \cdots, 16$, 但

$$l \text{ 和 } m = 1, 2, \cdots, 8. \tag{24.17}$$

类似地十六个荷 Q_v^l 及 Q_a^l 可以放在一起,

$$\{Q^\alpha\} = \{Q_v^l, Q_a^m\}, \tag{24.18}$$

其中,

$$Q^\alpha(t) = -\mathrm{i}\int J_4^\alpha(x)\mathrm{d}^3 r, \tag{24.19}$$

它们的等时对易关系(24.9)式可以写为

$$[Q^\alpha(t), Q^\beta(t)] = c^{\alpha\beta\gamma}Q^\gamma(t), \tag{24.20}$$

其中

---

* Goto T, Imamura T. *Prog Theor phys*, 1955, **14**:396.

Schwinger J. *Phys Rev Lett*, 1959, **3**:296. 对定域场算子微妙之处不感兴趣的读者可跳过本节.

$$c^{\alpha\beta\gamma} = -c^{\beta\alpha\gamma} = -c^{\alpha\gamma\beta} \tag{24.21}$$

是手征 $SU_3 \times SU_3$ 群(24.15)的反对称结构常数. 同样,(24.8)式成为

$$[Q^\alpha(t),\ J_\mu^\beta(x)] = \mathrm{i}c^{\alpha\beta\gamma} J_\mu^\gamma(x). \tag{24.22}$$

既然(24.20)式表达了群生成元的代数,(24.22)式给出了 J_μ 在群变换下的表示,这两式的正确性是没有疑义的. 我们要考察的是定域流-流对易关系(24.6)式的正确性,正如我们将要证明的,(24.6)式将为下式所代替:

$$[J_4^\alpha(\boldsymbol{r},\ t),\ J_\mu^\beta(\boldsymbol{r}',\ t)] = -c^{\alpha\beta\gamma} J_\mu^\gamma(x)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \mathrm{s.\,t.}, \tag{24.23}$$

其中 s. t. 代表薛温格(Schwinger)项,如果 s. t. 为零,上式会回到(24.6)式给出的素朴对易关系. 但薛温格项是必定有的. 证实这一点的一种相对说来简单的方法是取(24.23)的真空期望值. 特别是,注意到当 $\alpha = \beta$ 且没有薛温格项时,因为 $c^{\alpha\beta\gamma}$ 的反对称性,我们会有

$$\langle 真空 \mid [J_4^\alpha(\boldsymbol{r},\ t),\ J_\mu^\alpha(\boldsymbol{r}',\ t)] \mid 真空\rangle = 0. \tag{24.24}$$

另一方面,下面的定理说明了,对于 $\mu = i \neq 4$, 此真空期望值不能为零.

定理.

$$\langle 真空 \mid [J_4^\alpha(\boldsymbol{r},\ t),\ J_i^\alpha(\boldsymbol{r}',\ t)] \mid 真空\rangle \neq 0, \tag{24.25}$$

其中 $i = 1,\ 2,\ 3$. [因此,薛温格项不为零].

证明.

让我们定义

$$K_{\mu\gamma}^{\alpha\beta} \equiv \langle 真空 \mid [J_\mu^\alpha(x),\ J_\gamma^\beta(x')] \mid 真空\rangle, \tag{24.26}$$

并将它分解为对希尔伯特空间中整个物理系统的全部本征态 $|\rangle$ 求和. 用(11.74)我们有

$$\begin{aligned} K_{\mu\gamma}^{\alpha\beta}(x-x') = \sum [&\langle 真空 \mid J_\mu^\alpha(0) \mid\rangle\langle\mid J_\mu^\beta(0) \mid 真空\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-x')} \\ &- \langle 真空 \mid J_\mu^\beta(0) \mid\rangle\langle\mid J_\mu^\alpha(0) \mid 真空\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}] \end{aligned} \tag{24.27}$$

其中

$$k_\mu = (\boldsymbol{k},\ \mathrm{i}k_0)$$

是态$|\rangle$的 4 动量,x 及 x'由(24.5)式给出,并且如通常一样.

$$\boldsymbol{k}\cdot(x-x')=k_\mu(x-x')_\mu.$$

为清楚起见,我们写

$$\begin{aligned}|\rangle&=|\,n,\ \boldsymbol{k}\rangle\\&=|\,\cdots,\ h_n,\ j_n,\ m_n,\ \boldsymbol{k}\rangle,\end{aligned}\tag{24.28}$$

其中 n 表示除 $\boldsymbol{k}$ 以外规定态所需要的所有其他量子数,例如,其不变质量 m_n,自旋 j_n,螺旋度 h_n,电荷 Q_n, $\cdots$. 在我们的度规中

$$m_n^2=-k_\mu^2=k_0^2-\boldsymbol{k}^2.$$

(24.27)式中,求和跑遍所有可能的本征态,包括那些由洛伦兹变换联系起来的态. 我们可以把(24.27)式中的求和更明显地写为

$$\sum\cdots=\int\mathrm{d}M\sum_n\delta(M-m_n)\,\frac{1}{8\pi^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdots,\tag{24.29}$$

注意,在平行于 $\boldsymbol{k}$ 方向的洛伦兹变换下,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{k}\rightarrow\boldsymbol{k}',\ k_0\rightarrow k_0',\ m_n\rightarrow m_n,\\&j_n\rightarrow j_n,\ h_n\rightarrow h_n'=\pm h_n\end{aligned}$$

(其中±号依赖于态的速度与变换速度的相对关系)以及

$$\begin{aligned}&k_0^{1/2}\ |\,\cdots,\ h_n,\ j_n,\ m_n,\ \boldsymbol{k}\rangle\\&\qquad\rightarrow k_0'^{\,1/2}\,|\,\cdots,\ h_n',\ j_n,\ m_n,\ \boldsymbol{k}'\rangle,\end{aligned}\tag{24.30}$$

以至于*

---

* 对我们的规一化约定作一说明或许是必要的. 让我们考虑第 2 章中讨论过的自旋为 0 的场这个简单的例子. 在有限体积 Ω 中,按照(2.38)式,单粒子态是

$$|\,\boldsymbol{k},\ \Omega\rangle=a_{\boldsymbol{k}}^{+}\ |\ \text{真空}\rangle.$$

它满足

$$\langle\boldsymbol{k},\ \Omega\,|\,\boldsymbol{q},\ \Omega\rangle=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}},$$

因此

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\langle\boldsymbol{k},\ \Omega\,|\,\boldsymbol{q},\ \Omega\rangle=1.$$

定义

(转下页)

$$d^3\boldsymbol{k}\mid\cdots,h_n,j_n,m_n,\boldsymbol{k}\rangle\langle\cdots,h_n,j_n,m_n,\boldsymbol{k}\mid \tag{24.31}$$

是不变的,完成(24.29)式中 $\boldsymbol{k}$ 积分最方便的方法是把所有的态变换到它们各自的静止系中.在三维转动下,$J_\mu^\alpha(0)$的空间分量像一个三维矢量而其时间分量像一个标量一样变换.因此在静止系中,从转动的不变性导出:

$$\text{如果自旋}\begin{cases}j_n>1,\\ \text{或 } j_n=1 \text{ 且 } \mu=4,\\ \text{或 } j_n=0 \text{ 且 } \mu=i\neq 4,\end{cases} \tag{24.32}$$

则

$$\langle\text{真空}\mid J_\mu^\alpha(0)\mid n,\boldsymbol{k}=0\rangle=0.$$

对于固定的 n,用(24.30)、(24.32)两式并对不同的螺旋性求和,我们发现在任何系中,

$$\sum_{h_n}\langle\text{真空}\mid J_\mu^\alpha(0)\mid n,\boldsymbol{k}\rangle\langle n,\boldsymbol{k}\mid J_\nu^\beta(0)\mid\text{真空}\rangle$$

$$=\begin{cases}0 & (\text{当 } j_n>1)\\ 3\sigma_1^{\alpha\beta}(n)\left(\delta_{\mu\nu}+\dfrac{k_\mu k_\nu}{m_n^2}\right)\dfrac{m_n}{k_0}, & (\text{当 } j_n=1)\\ \sigma_0^{\alpha\beta}(n)\,\dfrac{k_\mu k_\nu}{m_n^2}\,\dfrac{m_n}{k_0} & (\text{当 } j_n=0)\end{cases} \tag{24.33}$$

(接上页)

$$\mid\boldsymbol{k}\rangle\equiv\Omega^{1/2}a_k^\dagger\mid\text{真空}\rangle, \tag{24.31a}$$

则当 $\Omega\to\infty$ 时,态 $\mid\boldsymbol{k}\rangle$ 满足正交关系

$$\langle\boldsymbol{k}\mid\boldsymbol{q}\rangle=8\pi^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \tag{24.31b}$$

及

$$\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{8\pi^3}\langle\boldsymbol{k}\mid\boldsymbol{q}\rangle=1. \tag{24.31c}$$

在洛伦兹变换下,我们有 $\mid\boldsymbol{k}\rangle\to\mid\boldsymbol{k}'\rangle$ 及 $\mid\boldsymbol{q}\rangle\to\mid\boldsymbol{q}'\rangle$. 因为 $\dfrac{d^3\boldsymbol{k}}{k_0}=\dfrac{d^3\boldsymbol{k}'}{k_0'}$,为使

$$\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{8\pi^3}\langle\boldsymbol{k}'\mid\boldsymbol{q}'\rangle=1$$

我们必须有 $k_0^{1/2}\mid\boldsymbol{k}\rangle\to k_0'^{1/2}\mid\boldsymbol{k}'\rangle$. 这就解释了(24.30)(24.31)式.

其中,因为 $J_i^\alpha (i=1,2,3)$ 厄米但 j_4 反厄米(并且 k_i 是实的,k_4 是虚的),故有

对于 $j_n=0$

$$\sigma_0^{\alpha\beta}(n)=\delta^{\alpha\beta}\langle 真空 \mid J_4^\alpha(0)\mid n,\boldsymbol{k}=0\rangle\langle 真空 \mid J_4^\beta(0)\mid n,\boldsymbol{k}=0\rangle^*,\tag{24.34}$$

对于 $j_n=1$

$$\sigma_1^{\alpha\beta}(n)=\frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{3}\langle 真空 \mid J_i^\alpha \mid n,\boldsymbol{k}=0\rangle\langle 真空 \mid J_i^\beta \mid n,\boldsymbol{k}=0\rangle^*,\tag{24.35}$$

其中,如通常一样,* 表示复共轭.

证明(24.33)式的最简单的办法是先在静止系中证明它正确,再把它变换到其他参考系.注意为了简化公式,我们设 Q^α 是好量子数,并计及(24.34)及(24.35)两式中的 $\delta^{\alpha\beta}$ 因子.把(24.33)式代入(24.27)式并用(24.29)式,我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}K_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x-x')=&\int \mathrm{d}M^2\left[\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right]\sigma_1^{\alpha\beta}(M)D_M(x-x')\\&+\int \mathrm{d}M^2\left[-\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right]\sigma_0^{\alpha\beta}(M)D_M(x-x'),\end{aligned}\tag{24.36}$$

其中谱函数 $\sigma_0^{\alpha\beta}(M)$ 及 $\sigma_1^{\alpha\beta}(M)$ 与(24.34)—(24.35)式的函数的关系是

$$\begin{aligned}\sigma_0^{\alpha\beta}(M)&=\sum_n \delta(M-m_n)\sigma_0^{\alpha\beta}(n),\\\sigma_1^{\alpha\beta}(M)&=\sum_n \delta(M-m_n)\sigma_1^{\alpha\beta}(n),\end{aligned}\tag{24.37}$$

这里,由于(24.32)式,这些求和只分别对于 $j_n=0$ 及 $j_n=1$ 的态进行,

$$D_M(x-x')=\frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{d}^3 k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}w^{-1}\sin w(t-t')$$

$$w=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+M^2},$$

它与习题 2.1 中一样.当 $t\to t'$ 时,

$$D_M(x-x')\to 0,$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial t}D_M(x-x') \to \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

因此,在(24.26)式中,对于 $\mu=4$ 及 $\nu=i\neq 4$,

$K_{4i}^{\alpha\beta}(x-x')$ 成为

$$\langle 真空 \mid [J_4^\alpha(\boldsymbol{r},t), J_i^\beta(\boldsymbol{r}',t)] \mid 真空 \rangle$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}M^2}{M^2}[\sigma_1^{\alpha\beta}(M)+\sigma_0^{\alpha\beta}(M)]\,\nabla_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{24.38}$$

把 $\sigma_0^{\alpha\beta}(M)$ 及 $\sigma_1^{\alpha\beta}(M)$ 看作矩阵,从(24.34)—(24.35)及(24.37)式我们看到,它们两者都是正定的.特别是,如果我们设 $\alpha=\beta$,则因为

$$\int \frac{\mathrm{d}M^2}{M^2}[\sigma_1^{\alpha\alpha}(M)+\sigma_0^{\alpha\alpha}(M)] > 0$$

即得到(24.25)式.因此,定理得证.比较(24.24)式及(24.38)式,我们看到薛温格项不为零.此外,它明显地不协变.

(i) (24.38)式也可以写为

$$\langle 真空 \mid [J_4^\alpha(\boldsymbol{r},t), J_i^\beta(\boldsymbol{r}',t)] \mid 真空 \rangle$$
$$= \lambda\delta^{\alpha\beta}\,\nabla_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{24.39}$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{16}\sum_{\alpha=1}^{16}\int \frac{\mathrm{d}M^2}{M^2}[\sigma_1^{\alpha\alpha}(M)+\sigma_0^{\alpha\alpha}(M)] > 0.$$

(ii) 为了与此定理不矛盾,我们用下列式子代替(24.6)式:

$$[V_4^l(\boldsymbol{r},t), a_4^m(\boldsymbol{r}',t)] = [a_4^l(\boldsymbol{r},t), V_4^m(\boldsymbol{r}',t)]$$
$$= -f^{lmn}a_4^n(\boldsymbol{r},t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$[V_4^l(\boldsymbol{r},t), V_4^m(\boldsymbol{r}',t)] = [a_4^l(\boldsymbol{r},t), a_4^m(\boldsymbol{r}',t)]$$
$$= -f^{lmn}V_4^n(\boldsymbol{r},t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$[V_4^l(\boldsymbol{r},t), a_i^m(\boldsymbol{r}',t)] = [a_4^l(\boldsymbol{r},t), V_i^m(\boldsymbol{r}',t)]$$
$$= -f^{lmn}a_i^n(\boldsymbol{r},t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$[V_4^l(\boldsymbol{r},t), V_i^m(\boldsymbol{r}',t)] = [a_4^l(\boldsymbol{r},t), a_i^m(\boldsymbol{r}',t)]$$
$$= -f^{lmn}V_i^n(\boldsymbol{r},t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \text{s. t.}, \tag{24.40}$$

其中,薛温格项最简单的形式为*

$$\text{s. t.} = \lambda\delta^{lm}\nabla_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{24.41}$$

$\lambda=$ 常数. 把这些式子对 d^3r 积分, 我们看到,薛温格项无贡献. 因此,(24.8)—(24.11)式保持正确.

24.2 CVC(矢量流守恒)和 CAC(轴矢量流守恒)

从卡比博理论(第 21.5 节),我们知道,因有电磁流守恒及味 SU_3 对称性,所以有 CVC 条件,即八个矢量流算子(24.3)满足

$$\frac{\partial V_\mu^l}{\partial x_\mu}=0. \tag{24.42}$$

因此,V_4^l 的空间积分是运动常数,即

$$\dot{Q}_v^l=0. \tag{24.43}$$

这八个矢量荷是味 SU_3 群的生成元. 正如第 12 章讨论过的,每个物理态属于 SU_3 群的一个不可约表示.

用 QCD 的拉格朗日量也可导出同样的结论. 设(18.3)式中的规范群为色 SU_3, ψ 为夸克场. 我们看到,如果我们设不同的夸克都具有同样的质量 m,即得到味 SU_3 对称性,CVC 也是这样.

在第 20 章讨论强子时,我们曾提到,一个相当好的强作用的近似是把 u、d 及 s 夸克均看成零质量粒子. 设(18.3)式中

$$m=0, \tag{24.44}$$

则可看到,除矢量流守恒以外,轴矢量流算子也是守恒的,即

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}a_\mu^l=0, \tag{24.45}$$

因此,

$$\dot{Q}_a^l=0 \tag{24.46}$$

---

* Lee T D, Weinberg S, Zumino B. *Phys Rev Lett*, 1967, **18**:1029.

其中 a_μ^l 及 Q_a^l 由(24.4)及(24.7)式给出.(24.15)式给出的手征 $SU_3 \times SU_3$ 群是由 Q_v^l 及 Q_a^l 与宇称算子 P 一起生成的.在同一强作用近似下,每个群元素都是运动常数.

现在考虑任一物理强子态,比如说静止质子 $|p\rangle$. 它是强作用哈密顿量 H_{st}的一个本征态

$$H_{st} \mid p\rangle = m_p \mid p\rangle, \tag{24.47}$$

它也是宇称 P 的本征态.为方便起见,我们选择(24.13)式中的相因子 η 使得

$$P \mid p\rangle = \mid p\rangle. \tag{24.48}$$

将矢量荷 Q_v^l 作用于 $|p\rangle$,得到(12.48)式给出的重子八重态的线性叠加.在味 SU_3 对称性近似下,这些态全与$|p\rangle$简并且有同样的宇称.

让我们把上述论证推广到轴荷 Q_a^l.由于(24.46)式,我们有

$$[Q_a^l, H_{st}] = 0. \tag{24.49}$$

(24.47)—(24.49)式给出

$$H_{st}Q_a^l \mid p\rangle = m_p Q_a^l \mid p\rangle. \tag{24.50}$$

此外,因为(24.14)式, $Q_a^l \mid p\rangle$ 的宇称必定与$|p\rangle$的宇称差一负号.与(24.48)式相反,我们有

$$PQ_a^l \mid p\rangle = - Q_a^l \mid p\rangle \tag{24.51}$$

什么态是与$|p\rangle$态简并但有相反宇称的 $Q_a^l \mid p\rangle$ 态呢?很清楚,它们不可能是任何已知的单个强子态,因为自然界中没有这样的态存在.因此,我们不得不把 $Q_a^l \mid p\rangle$ 态看成是如$|p\pi\rangle$, $|n\pi\rangle$, …这样的**连续态**之一.简并意味着,在轴矢量流守恒近似下,应当把位置低的赝标介子看作零质量粒子.正如我们将看到的,它正好符合 22.1.2 节讲过的南部-戈德斯通机理.轴流守恒假设必须与零质量赝标介子近似* 一起用.它们一起被称为 CAC 的两个条件.重要的是,我们应当将 CAC 的这些不平常的特点与

---

* 在文献中,有时称轴流守恒假设和零质量 π 介子及(或)K 介子近似为 PCAC (部分守恒轴流).为避免不必要的混淆,我们将术语“PCAC”仅仅用于轴流守恒定律(24.45)式的破坏变成重要时.见 24.6 节.

CVC 的(较为普通的)那些特点区分开.

K 介子比 π 介子重得多(即 s 比 u 和 d 重得多). 一个比较好的近似是仅仅设 u 及 d 夸克质量为零. 此时(24.45)式中的上标将仅仅从 1 走到 3,对称群是

$$\text{手征}\ SU_2 \times SU_2, \tag{24.52}$$

而且,正如 24.4 节及 24.5 节中将要讨论的,只有 π 介子是戈德斯通玻色子.

24.3 戈德斯通定理*

为了理解南部-戈德斯通机理的普遍性,让我们考虑一个由 L 个自旋为 0 的厄米场 $\phi_l(x)$ 组成的相对论性量子系统,其中

$$l = 1, 2, \cdots, L.$$

设理论在连续变换

$$\phi_l(x) \to \phi_l(x) + \delta\phi_l(x),$$
$$\delta\phi_l(x) = \mathrm{i}\theta^\alpha T^\alpha_{ll'}\phi_{l'}(x) \tag{24.53}$$

下不变,其中,类似于(18.12)式,θ^α是实数,是与 x 无关的无穷小量,

$$T^\alpha = \text{矩阵}(T^\alpha_{ll'}) = T^{\alpha\dagger}$$

是理论的对称群$\{g\}$的第 α 个生成元 Q^α 的 $L \times L$ 表示,

$$\alpha = 1, 2, \cdots, N.$$

此外,与(24.19)式一样,设算子 Q^α 与**守恒**流 J^α_μ 的关系为

$$Q^\alpha = -\mathrm{i}\int J^\alpha_4 \mathrm{d}^3 r.$$

因为

---

* 见 541 页上引的文献,也见 Goldstone J, Salam A, Weinberg S. *Phys Rev*, 1962, **127**:965.

$$\frac{\partial J_\mu^\alpha}{\partial x_\mu} = 0, \tag{24.54}$$

因此,

$$\dot{Q}_\alpha = 0.$$

按照(24.53)式,有对易关系

$$[Q^\alpha,\ \phi_l(x)] = \mathrm{i}T^\alpha_{ll'}\phi_{l'}(x). \tag{24.55}$$

考虑到自发对称破缺机理的必要要素,如同(22.7)及(22.63)式中一样,我们假定,至少对于某些 α 及 l,真空期望值

$$\langle \text{真空} \mid \phi_l \mid \text{真空} \rangle \equiv \rho_l \tag{24.56}$$

满足

$$T^\alpha_{ll'}\rho_{l'} = 0. \tag{24.57}$$

定理. *

如果(24.57)式成立,必定存在着一个与 T^α 有同样量子数的无质量粒子.

证明.

让我们分解

$$\langle \text{真空} \mid J_\mu^\alpha(x)\phi_l(0) \mid \text{真空} \rangle \tag{24.58}$$

为(24.28)式给出的态 $|n,\ \boldsymbol{k}\rangle$ 的全集之和,其中 $\boldsymbol{k}$ 是态的动量,n 是所有其他量子数.用(11.74)及(24.29)两式,我们得到(24.58)式为

$$\sum_n \int \mathrm{d}M\delta(M-m_n)\int \frac{1}{8\pi^3}\mathrm{d}^3k \cdot \langle \text{真空} \mid J_\mu^\alpha(0) \mid n,\ \boldsymbol{k}\rangle\langle n,\ \boldsymbol{k} \mid \phi_l(0) \mid \text{真空}\rangle e^{ik\cdot x} \tag{24.59}$$

对于三维动量为 0 的态,由于角动量守恒,我们有:仅当自旋 $j_n = 0$ 时,

$$\langle n,\ \boldsymbol{k} \mid \phi_l(0) \mid \text{真空}\rangle \neq 0.$$

用(24.30)式,我们可以把这些自旋为 0 的态变换到任何洛伦兹系.此外,从 554 页给出的论证得到

* 不过,见本节末的评论(i)及(ii).

$$\langle 真空 \mid J_\mu^\alpha(0) \mid n,\ \boldsymbol{k}\rangle \propto k_\mu.$$

综合这些结果及(24.32)式,我们可以写出

$$\langle 真空 \mid J_\mu^\alpha(0) \mid n,\ \boldsymbol{k}\rangle\langle n,\ \boldsymbol{k} \mid \phi_l(0) \mid 真空\rangle$$
$$= \frac{k_\mu}{k_0} c_l^\alpha(n), \tag{24.60}$$

其中

$$c_l^\alpha(n) = \begin{cases} -\mathrm{i}\langle 真空 \mid J_4^\alpha(0) \mid n,\ \boldsymbol{k}=0\rangle \\ \langle n,\ \boldsymbol{k}=0 \mid \phi_l(0) \mid 真空\rangle, 如果\ j_n = 0 \\ 0, \qquad\qquad 如果\ j_n \neq 0 \end{cases} \tag{24.61}$$

及

$$k_0 = -\mathrm{i}k_4 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_n^2},$$

这里 m_n 是态$|n,\ \boldsymbol{k}\rangle$的质量. 将(24.60)式代入(24.59)式并将变量从 M 改变为

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + M^2},$$

我们得到(24.58)式为

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{d}^3 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \sum_n \frac{k_\mu}{M} \cdot \delta(M - m_n) c_l^\alpha(n). \tag{24.62}$$

定义

$$c_l^\alpha(M) \equiv \frac{1}{M}\sum_n \delta(M - m_n) c_l^\alpha(n), \tag{24.63}$$

(24.62)式可以写为

$$\langle 真空 \mid J_\mu^\alpha(x)\phi_l(0) \mid 真空\rangle$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{8\pi^3}\theta(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} k_\mu c_l^\alpha(M), \tag{24.64}$$

其中

$$\theta(k_0) = \begin{cases} 1 & 如\ k_0 \geqslant 0, \\ 0 & 如\ k_0 < 0, \end{cases}$$

M 是由

$$M^2 = -k_\mu^2 = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 \tag{24.65}$$

给出的 k_μ 的函数，对于 $d^4k = dk_0d^3k$ 的积分跑遍整个 k 空间 *. 将 (24.64) 式对 x_μ 微分并应用流守恒定律 (25.54) 式，我们导出：由于 (24.65) 式，

$$M^2 c_l^\alpha(M) = 0. \tag{24.66}$$

设 (24.64) 式中 $\mu = 4$, $x_4 = \mathrm{i}t = 0$ 并将两边对三维空间积分，我们发现

$$\langle \text{真空} \mid Q^\alpha \phi_l(0) \mid \text{真空} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k_0 \theta(k_0) c_l^\alpha(M) \mathrm{d}k_0,$$

其复共轭为

$$\langle \text{真空} \mid \phi_l(0) Q^\alpha \mid \text{真空} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k_0 \theta(k_0) c_l^{\alpha *}(M) \mathrm{d}k_0.$$

由 (24.55) 及 (24.56) 式，上两式之差导致

$$T_{ll'}^\alpha \rho_{l'} = 2\int_{-\infty}^{\infty} k_0 \theta(k_0) \mathrm{Im}\, c_l^\alpha(M) \mathrm{d}k_0,$$

其中 Im 表示虚部. 根据假设，上式左边对于某些 α 及 l 不为零. 既然据 (24.66) 式

$$\text{当}\ M \neq 0\ \text{时} \quad c_l^\alpha(M) = 0,$$

则得到下列结论：对于这些 α 及 l

$$c_l^\alpha(M) = \lambda_l^\alpha \delta(M^2) \neq 0. \tag{24.67}$$

回想起 $c_l^\alpha(M)$ 的定义 (24.63)，我们就证明了，必定存在着静止质量 $m_n = 0$ 的态 $\mid n, \boldsymbol{k}\rangle$. 此外，对于这些态，$c_l^\alpha(n) \neq 0$. 因此，由 (24.61) 式，必有

$$j_n = 0,$$
$$\langle n, \boldsymbol{k} \mid \phi_l \mid \text{真空} \rangle \neq 0 \tag{24.68}$$

及

$$\langle \text{真空} \mid Q^\alpha \mid n, \boldsymbol{k} \rangle \neq 0.$$

最后一式使我们能确定这些态的对称性质，并且完成定理的证明. 这些零质量粒子称为戈德斯通粒子.

---

* 因此，(24.64) 式中的 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_0 \theta(k_0) \cdots$ 与 (24.62) 式中的 $\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \cdots$ 相同.

说明.

(i) 将(24.67)式代入(24.64)式,有

$$\langle 真空 \mid J_\mu^a(0)\phi_l(0) \mid 真空\rangle = -\mathrm{i}\lambda_l^a \frac{\partial F_D(x)}{\partial x_\mu},$$

其中在四维空间 ($D=4$) 里, $F_D(x)$是

$$F_4(x) = \frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{d}^4 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\delta(k^2)\theta(k_0).$$

在二维空间里,相应的函数是

$$F_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\delta(k^2)\theta(k_0), \tag{24.69}$$

不过,完成 k_0 的积分后可以看到,它是奇异的. 因为

$$k\cdot x = k_1x_1 - k_0x_0,$$
$$\delta(k^2) = \delta(k_0^2 - k_1^2)$$

及

$$\mathrm{d}k_0 = \frac{1}{2k_0}\mathrm{d}k_0^2,$$

我们有

$$\int \mathrm{d}^2 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\delta(k^2)\theta(k_0)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_1 \frac{1}{2\mid k_1\mid}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_1 - \mathrm{i}\mid k_1\mid x_0}.$$

此式对于包含原点 $k_1=0$ 的积分区域发散. 为了使理论定义得好,我们可以要求戈德斯通定理的假设(24.57)式不正确. 于是,对于所有的 l

$$\langle 真空 \mid \delta\phi_l(x) \mid 真空\rangle = 0,$$

其中 $\delta\phi_l$ 由(24.53)式定义. 这意味着在两维空间中没有戈德斯通玻色子*.

(ii) 在 22.1.3 节中,我们已经证明,在规范理论中引进适当的希格

---

* Coleman S. *Commun Math Phys*, 1973, **31**:259.

斯场集合,可以使戈德斯通玻色子只出现在非物理部分,后者可以规范掉. 作为结果,物理谱不包含任何无质量零自旋粒子. 通过希格斯机理我们可以把无质量规范场及戈德斯通玻色子变换为物理的有质量矢量粒子. [细节已在 547—549 页上给出].

24.4 哥德伯格-垂曼关系

本节及下节中,我们将考察手征对称性的某些应用. 正如(24.1)节中一样,假定矢量流及轴流 $\boldsymbol{V}_\lambda$ 及 $\boldsymbol{a}_\lambda$ 两者都守恒,

$$\boldsymbol{V}_\lambda = \mathrm{i}q^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\lambda \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}q(x),$$

$$\boldsymbol{a}_\lambda = \mathrm{i}q^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}q(x), \tag{24.70}$$

其中

$$\boldsymbol{\tau} \text{ 的分量} = \text{泡利矩阵},$$

并且,代替(24.1)式,夸克场 $q(x)$ 取为 2×1 列矩阵:

$$q(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{u}}^c(x) \\ \psi_{\mathrm{d}}^c(x) \end{pmatrix}. \tag{24.71}$$

按照上节的讨论,π 介子被看成是零质量戈德斯通玻色子. 因此,一方面矢量及轴矢荷

$$Q_v = -\mathrm{i}\int \boldsymbol{V}_4 \mathrm{d}^3 r$$

及

$$Q_A = -\mathrm{i}\int \boldsymbol{a}_4 \mathrm{d}^3 r$$

两者都与哈密顿量对易. 另一方面,真空态|真空⟩只是 Q_v 的本征态,不是 Q_a 的. 我们有

$$Q_v \mid \text{真空}\rangle = 0,$$

但是

$$Q_a \mid \text{真空}\rangle \neq 0. \tag{24.72}$$

前者是 CVC 的结果,后者是轴流守恒

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{24.73}$$

加上无质量 π 介子近似的结果.[从 637 页上给出的论证,如果用$|$真空$\rangle$代替$|p\rangle$,即得(24.72)式.]

1. **π 衰变振幅** π 衰变已在 21.3 节中研究过,其振幅由(21.19)式给出:

$$\langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(x) \mid \pi^\mp \rangle = \mathrm{i}\cos\theta_c q_\lambda \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}, \tag{24.74}$$

其中 q_λ 是 π 介子的 4 动量

$$q_4 = \mathrm{i}\omega,$$

ω 是系统的体积,θ_c 是(21.50)式给出的卡比博角.从(21.21)式

$$F_\pi \cong 130 \text{ MeV}.$$

用流算子(24.70)式的分量 $a_\lambda^l (l = 1、2、3)$ 写出

$$A_\lambda^+ = (a_\lambda^1 + \mathrm{i}a_\lambda^2)\cos\theta_c$$

及

$$A_\lambda^- = (a_\lambda^1 - \mathrm{i}a_\lambda^2)\cos\theta_c. \tag{24.75}$$

因此,矩阵元(24.74)可以改写为

$$\langle 真空 \mid a_\lambda^l(x) \mid \pi^m \rangle = \mathrm{i}\delta^{lm} f_\pi q_\lambda \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}, \tag{24.76}$$

其中 δ^{lm}是克罗内克记号,

$$f_\pi = \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \cong 93 \text{ MeV} \tag{24.77}$$

称为 π 衰变常数,$|\pi^m\rangle$ 与带电及中性 π 介子态的关系是

$$|\pi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle),$$

$$|\pi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle)$$

及

$$|\pi^3\rangle = |\pi^0\rangle.$$

为了用图表示矩阵元(24.74)或(24.76),一个方便的方法是先设想成中间玻色子理论并写下 π_{12} 衰变的所有费恩曼图. 这类图必定通过下列顺序

$$\pi^{\pm} \to W_{\lambda}^{\pm} \to l^{\pm} + \nu_l(\bar{\nu}_l).$$

它们的和由图 24.1 中上面的图给出,其中 π 介子外线带有通常的因子

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega Q}}$$

图 24.1 π_{12} 衰变(通过 W)图及 a_λ^l 的相应矩阵元(24.79)的图

以及 π-W_λ 顶角因子 *

$$\mathrm{i}\cos\theta_c F_\pi q_\lambda, \tag{24.78}$$

然后,从图中去掉 W 传播子及 W 粒子顶角. 留下的是矩阵元(24.74). 类似地,我们也可以用图表示另一式(24.76). 其傅里叶变换为

$$\langle 真空 \mid a_\lambda^l(q) \mid \pi^m \rangle \equiv \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle 真空 \mid a_\lambda^l(x) \mid \pi^m \rangle \mathrm{d}^p x, \tag{24.79}$$

用图 24.1 中下面的图表示,其中,按照(24.76)式,顶角带有因子

$$\mathrm{i} f_\pi q_\lambda \delta^{lm}. \tag{24.80}$$

---

* 按照(22.123)式,强子-W 顶角为 $(2\sqrt{2})^{-1}g(W_\lambda A_\lambda^+ + \mathrm{h.c.}) + \cdots$. 这里,因为我们只对 $A_\lambda^{\pm}$ 感兴趣,所以略去了无关的因子 $\frac{1}{2\sqrt{2}}g$.

注意,对(24.76)式微分后有

$$\left\langle 真空 \left| \frac{\partial a_\lambda^l}{\partial x_\lambda} \right| \pi^m \right\rangle \propto q^2,$$

此式左边由于轴流守恒假设而为零,右边则由于 π 介子零质量近似也为零.因此,(24.74)式及(24.76)式与 CAC 的两个条件不矛盾.

2. **核子的 β 衰变** 从一般对称性考虑,我们知道,$A_\lambda \equiv A_\lambda^-$ 在核子态间的轴流矩阵元可以写为(21.44)式:

$$\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p \rangle = \mathrm{i} U_n^\dagger \gamma_4 (\gamma_\lambda g_A - \mathrm{i} q_\lambda g_P) \gamma_5 U_p \mathrm{e}^{\mathrm{i} q \cdot x}, \quad (24.81)$$

其中 u_p 和 u_n 是核子的初态及终态 c 数旋量,p_λ 和 n_λ 是相应的初态及终态 4 动量,

$$q_\lambda = (p - n)_\lambda$$

是 4 动量传递,

$$g_P = g_P(q^2)$$

称为(诱导出的)赝标形状因子,

$$g_A = g_A(q^2)$$

称为轴形状因子,为了给出此矩阵元的图形表示,我们可以采用与上节类似的步骤.先设想质子以下列顺序 β 衰变的全部费恩曼图之和:

$$\overline{\mathrm{n}}\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{W}_\lambda^+ \rightarrow \mathrm{e}^+ \nu_e. \quad (24.82)$$

从这些图的每个图中去掉 W 传播子和 W-轻子顶角,留下的图即表示矩阵元 $\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p \rangle$.

(24.82)的图可以分为两类:

(a) 切开一根单 π 介子线可以把 W_λ-轻子部分完全从图中拆开的图.

(b) 所有其他图.

前者必定通过下列顺序进行:

$$\overline{\mathrm{n}}\mathrm{p} \rightleftharpoons \pi^+ \rightleftharpoons \mathrm{W}_\lambda^+ \rightleftharpoons \mathrm{e}^+ \nu_e,$$

它是(24.82)的一个子类.这类图每个都带有一个 π 介子传播子因子

$$\frac{-\mathrm{i}}{q^2},\tag{24.83}$$

因此,当 $q^2\to 0$ 时 (但 q_λ 可以不为零),它支配着 π 衰变振幅. 所有这类图之和用图 24.2 中的(a)图代表,其中,由于洛伦兹不变性,π 介子-核子顶角总可以写为 *

$$\sqrt{2}u_n^\dagger\gamma_4\gamma_5 u_p g_{\pi\mathrm{N}}(q^2)\tag{24.84}$$

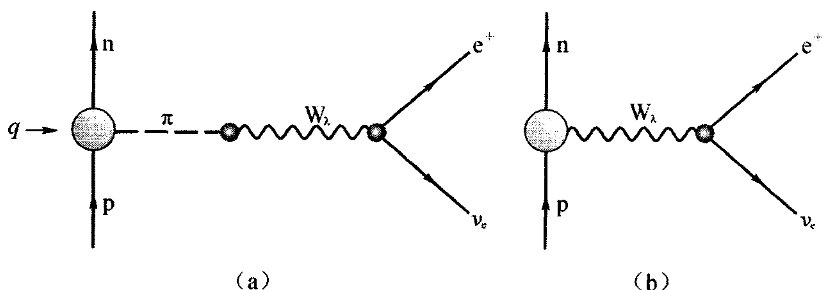
因子$\sqrt{2}$来自于辐射和吸收一个带电 π 介子的核子同位旋矩阵元通常采用的归一化约定**. 当 $q^2\to 0$ 时,

$$g_{\pi\mathrm{N}}(q^2)\to g_{\pi\mathrm{N}}(0)$$

是低能 π 介子-核子耦合常数. 从强 π-核子散射实验,$g_{\pi\mathrm{N}}(0)$的大小确定为***

$$\frac{|g_{\pi\mathrm{N}}(0)|^2}{4\pi}\cong 14.\tag{24.85}$$

同样,我们可以把$\langle n|a_\lambda^l(x)|p\rangle$的$\langle n|A_\lambda(x)|p\rangle$图分为相应的两类:



(a) (b)

图 24.2 质子 β 衰变的两类图:

(a) 有 π 介子极点因子 $-\mathrm{i}/q^2$ 的;(b) 没有 π 介子极点因子的

---

* π 介子-核子顶角必定是赝标量,因为核子外线在质壳上,像 $p\cdot q$, $n\cdot q$ 等标量积都是 q^2 的线性函数. 此外,诸如$\not p$及$\not n$这样的不变量都可以变换成常数[见(24.90)式]. 这说明(24.84)是一般形式.

** 比较 f_π 及 F_π 时,也出现同样的$\sqrt{2}$因子. [见(24.77)式.]

*** 参见 Bearden A J. *Phys Rev Lett*, 1960, **4**:240.

(a) 包含 π 介子极点(24.83)的图，

(b) 不包含 π 介子极点的图.

这些用图形表示于图 24.3. 把三个因子(24.78)、(24.83)及(24.84)乘在一起，我们看到，(a)的振幅是

$$(\mathrm{a}) = \sqrt{2}\cos\theta_c \frac{q_\lambda}{q^2} F_\pi g_{\pi N}(q^2) u_n^\dagger \gamma_4 \gamma_5 u_p e^{iq\cdot x}.$$

定义

$$(\mathrm{b}) \equiv \langle n \mid \overline{A}_\lambda(x) \mid p \rangle, \tag{24.86}$$

并用(24.77)式，我们有

$$\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p \rangle = 2\cos\theta_c \frac{q_\lambda}{q^2} f_\pi g_{\pi N}(q^2) u_n^\dagger \gamma_4 \gamma_5 u_p e^{iq\cdot x} + \langle n \mid \overline{A}_\lambda(x) \mid p \rangle. \tag{24.87}$$

当 $q^2 \to 0$ 时，此式成为

$$\lim_{q^2\to 0} \langle n \mid A_\lambda(0) \mid p \rangle \to 2\cos\theta_c \frac{q_\lambda}{q^2} f_\pi g_{\pi N}(0) u_n^\dagger \gamma_4 \gamma_5 u_p + O(1). \tag{24.88}$$

比较此式与(24.81)式，我们发现，当 $q^2 \to 0$ 时，

$$g_A(q^2) \to g_A(0) = O(1), \tag{24.89}$$

$\langle n \mid A_\lambda(x) \mid p \rangle =$ (a) + (b)

图 24.3 $\langle n|A_\lambda(x)|p\rangle$ 的图分成：

(a) 有 π 介子极点因子的图；(b) 没有 π 介子极点的图. 后者定义为 $\langle n \mid \overline{A}_\lambda(x) \mid p\rangle$ ［从图 24.2 的相应图中，去掉 W 传播子及 W- 轻子顶角，即得到这里的(a) 和(b).］

其中 $O(1)$项是全部有限项.

至今我们只用了 CAC 中 π 介子质量为零这一条,下面,我们应用轴流守恒条件. 将(24.81)式对 x_λ 微分,并用

$$\not{p} u_p = m_N u_p$$

及

$$\not{n} u_n = m_N u_n, \tag{24.90}$$

即可导出

$$2m_N g_A(q^2) + q^2 g_P(q^2) = 0, \tag{24.91}$$

其中 m_N 是核子质量. 取极限 $q^2 \to 0$ 并应用(24.89)式,得到

$$|g_A(0)| = \cos\theta_c \left| \frac{f_\pi g_{\pi N}(0)}{m_N} \right|. \tag{24.92}$$

从 CVC 及卡比博理论,在 $q^2 = 0$ 处相应的矢量形状因子由(21.47)式给出:

$$g_V(0) = \cos\theta_c.$$

比值

$$\left| \frac{g_A(0)}{g_V(0)} \right| = \frac{|f_\pi g_{\pi N}|}{m_N} \cong 1.31 \tag{24.93}$$

是哥德伯格-垂曼(Goldberger-Treiman)关系,它与(21.46)式给出的实验值

$$1.253 \pm 0.007$$

很好地符合.

说明. 当强作用的基本理论为量子色动力学时,由于夸克禁闭机理,对于低能介子-重子散射过程,不容易直接从量子色动力学抽出有用的费恩曼图. 在这一章中,我们只对由手征对称性假设得到的结果感兴趣. 因此,哈密顿量的细节是无关的. 惟一的要求是对称性条件的正确性. 在讨论 π-核子费恩曼图时,更方便的是设想一个唯象的强相互作用哈密顿量

$$H = H_0 + H_{int}. \tag{24.94}$$

如通常一样,自由哈密顿量 H_0 假设具有物理的强子质量,H_0 及 H_{int} 都假设为手征对称. 散射矩阵 S 由(5.23)式给出

$$S = \lim_{\substack{t' \to -\infty \\ t \to +\infty}} U(t, t'),$$

其中$U(t, t')$是薛定谔方程(5.17)式的格林函数. 令$|\alpha\rangle$表示H_0的自由粒子本征态

$$H_0 \mid \alpha\rangle = E_\alpha \mid \alpha\rangle, \tag{24.95}$$

按照(6.58)—(6.59)式,H的相应本征态既可以为 in 态(初态)

$$\mid \alpha^{\text{in}}\rangle \equiv U(0, -\infty) \mid \alpha\rangle \tag{24.96}$$

也可以为 f 态(终态)

$$\mid \alpha^{\text{f}}\rangle \equiv U^\dagger(\infty, 0) \mid \alpha\rangle, \tag{24.97}$$

以至于

$$H \mid \alpha^{\text{in}}\rangle = E_\alpha \mid \alpha^{\text{in}}\rangle$$

及

$$H \mid \alpha^{\text{f}}\rangle = E_\alpha \mid \alpha^{\text{f}}\rangle. \tag{24.98}$$

我们可以选$|\alpha\rangle$只由介子及重子的平面波组成. 渐近地$|\alpha^{\text{in}}\rangle$由平面波加上出射波组成,而$|\alpha^{\text{f}}\rangle$由平面波加上入射波组成. [见 432—433 页.]

这三套态

$$\{\mid \alpha\rangle\}, \ \{\mid \alpha^{\text{in}}\rangle\} \text{ 及} \{\mid \alpha^{\text{f}}\rangle\}$$

都是全集,并且可以取为正交集合. S矩阵是连接 in 和 f 态的幺正矩阵,正如(6.22)式给出的:

$$\langle\beta \mid S \mid \alpha\rangle = \langle\beta^{\text{f}} \mid \alpha^{\text{in}}\rangle, \tag{24.99}$$

(24.74)—(24.88)式中所用的态|真空⟩、$|\pi\rangle$、$|p\rangle$及$|n\rangle$都是物理态,即总哈密顿量H的本征态. 因此,用(24.96)—(24.97)的记号,它们应当写为

$$\mid \text{真空}^{\text{in}}\rangle \text{ 或 } \mid \text{真空}^{\text{f}}\rangle,$$
$$\mid \pi^{\text{in}}\rangle \text{ 或 } \mid \pi^{\text{f}}\rangle,$$
$$\mid p^{\text{in}}\rangle \text{ 或 } \mid p^{\text{f}}\rangle, \text{等等.}$$

因为真空及这些单粒子态都是稳定的,所以 in 态$|\alpha^{\text{in}}\rangle$与相应的 f 态$|\alpha^{\text{f}}\rangle$只差一个相因子. 究竟用哪一套态是无所谓的. 不过,对于下节中我们将讨论的多粒子态,必须小心. 我们将明显地标出上标 in 及 f.

由于强相互作用哈密顿量H假设是手征对称的,所以矢量流$\boldsymbol{V}_\lambda$及轴矢流$\boldsymbol{a}_\lambda$两者都守恒. 在写下如(24.73)式那样的流守恒定律时,我们已

暗含着假设这些算子是海森伯表象中的算子. 因此,算子 *

$$O(t) = V_\lambda^l(x), \ a_\lambda^l(x), \ Q_v^l(t), \ Q_a^l(t), \ \cdots$$

都满足海森伯方程(1.9)式:

$$[H, O(t)] = -\mathrm{i}\,\dot{O}(t).$$

相应的相互作用表象中的算子 $O_\mathrm{I}(t)$ 与 $O(t)$ 的关系是

$$O(t) = U^\dagger(t, 0) O_\mathrm{I}(t) U(t, 0). \tag{24.100}$$

练习. 用(1.9),(5.20)及(24.100)式,证明 $O_\mathrm{I}(t)$ 满足相互作用表象中的运动方程(5.6)式.

3. **推广** 让我们考虑 $a_\lambda^l(x)$ 在任意两个多粒子态 α 及 β 之间的矩阵元. 这些矩阵元与 x 的关系是已经知道的. 我们有

$$\langle \beta^\mathrm{f} \mid a_\lambda^l(x) \mid \alpha^\mathrm{in} \rangle \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}, \tag{24.101}$$

这里 $a_\lambda^l(x)$ 是海森伯表象中的算子,

$$q_\lambda = (\alpha - \beta)_\lambda$$

是初态 4 动量 α_λ 与终态 4 动量 β_λ 之差. 上述矩阵元的傅里叶变换定义为

$$\langle \beta^\mathrm{f} \mid a_\lambda^l(q) \mid \alpha^\mathrm{in} \rangle \equiv \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle \beta^\mathrm{f} \mid a_\lambda^l(x) \mid \alpha^\mathrm{in} \rangle \mathrm{d}^4 x. \tag{24.102}$$

使用相互作用表象中相应的算子 $a_\lambda^l(x)_\mathrm{I}$ 以及 H_0 的自由粒子本征态,考虑到(24.96)—(24.97)及(24.100)式,可以写出

$$\begin{aligned} &\langle \beta^\mathrm{f} \mid a_\lambda^l(x) \mid \alpha^\mathrm{in} \rangle \\ &\quad = \langle \beta \mid U(\infty, 0) a_\lambda^l(x)_\mathrm{I} U(0, -\infty) \mid \alpha \rangle, \end{aligned} \tag{24.103}$$

其中 x 的分量为

$$x_\mu = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}t).$$

用威克定理及第 5 章中描述的步骤,我们可以把(24.103)式的右边

---

* 按 5.1 节中所用的记号,海森伯表象中的算子 $O(t)$ 记作 $O_\mathrm{H}(t)$. 这里,我们略去了下标 H.

用费恩曼图来表达. 正如图 24.3 一样,这些图可以分为两类:

(a) 有 π 介子极点因子

$$-\frac{\mathrm{i}}{q^2}$$

的图以及

(b) 没有 π 极点的图.

因为辐射动量为 q 的 π 介子等于吸收动量为 $-q$ 的 π 介子,所以

$$\alpha \to \beta + \pi^l(q) \tag{24.104}$$

的振幅等于

$$\alpha + \pi^l(-q) \to \beta \tag{24.105}$$

的振幅,并且,将被表示为

$$\langle \pi^l(q)\beta^{\mathrm{f}} | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle = \langle \beta^{\mathrm{f}} | \pi^l(-q)\alpha^{\mathrm{in}} \rangle. \tag{24.106}$$

与(24.87)式类似,应用(24.80)式乘 π 介子传播子的积,可以写出

$$\begin{aligned}\langle \beta^{\mathrm{f}} | a_\lambda^l(q) | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle = &\langle \pi^l(q)\beta^{\mathrm{f}} | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle f_\pi \frac{q_\lambda}{q^2} \\ &+ \langle \beta^{\mathrm{f}} | \bar{a}_\lambda^l(q) | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle,\end{aligned} \tag{24.107}$$

其中右边第一项表示(a)的和,而第二项则是(b)的和,因为

$$\begin{aligned}&q_\lambda \langle \beta^{\mathrm{f}} | a_\lambda^l(q) | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle \\ &\quad = -\mathrm{i}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \left\langle \beta^{\mathrm{f}} \left| \frac{\partial a_\lambda^l(x)}{\partial x_\lambda} \right| \alpha^{\mathrm{in}} \right\rangle \mathrm{d}^4 x = 0,\end{aligned}$$

所以,用 q_λ 乘(24.107)式,即得到(24.91)式的推广:

$$\begin{aligned}q_\lambda \langle \beta^{\mathrm{f}} | \bar{a}_\lambda^l(q) | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle &= - f_\pi \langle \pi^l(q)\beta^{\mathrm{f}} | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle \\ &= - f_\pi \langle \beta^{\mathrm{f}} | \pi^l(-q)\alpha^{\mathrm{in}} \rangle.\end{aligned} \tag{24.108}$$

(24.107)到(a)+(b)的图形分解 * 见图 24.4. 定则是

---

* 十分经常的是从矩阵元 $\langle \beta^{\mathrm{f}} | a_\lambda^l(q) | \alpha^{\mathrm{in}} \rangle$ 的图形表示中因式分解出位相 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \equiv \langle 真空 | U(\infty, -\infty) | 真空 \rangle$. 不过,既然 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 是(24.107)式中每一项都有的公共乘子,是否明显地提出来就是不重要的了.

$\langle \beta^{f} | a_\lambda^{l}(q) | \alpha^{in} \rangle =$ (a) + (b)

图 24.4　$\langle \beta^{f} | a_\lambda^{l}(q) | \alpha^{in} \rangle$ 分解为：

(a) 有 π 介子极点因子 $-i/q^2$ 的图；(b) 没有 π 介子极点因子的图.

π 介子传播子

$$\text{------}_{q}\text{------} \quad \text{给出} \frac{-i}{q^2},$$

打叉的顶角

$$\cdots \times\!\!\rightarrow q_\lambda \quad \text{给出}\ i f_\pi q_\lambda, \tag{24.109}$$

打点的顶角

$$\bullet\!\!\longrightarrow \bar{a}_\lambda^{l}(q) \quad \text{给出}\ \bar{a}_\lambda^{l}(q)\ \text{的矩阵元.}$$

24.5　低能 π-N 散射

让我们考虑低能 π-核子散射

$$\pi^{l}(k) + \mathrm{N}(p) \rightarrow \pi^{m}(k') + \mathrm{N}'(p') \tag{24.110}$$

其中 N 及 N′可以是质子 p 或中子 n，上标 l 及 m 是 π 介子的同位旋指标，k、p、k'及 p'分别表示初态及终态粒子的 4 动量. 因为总能量-动量守恒，在这 4 个 4 动量中，只有三个是独立的，它们造成 $\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$ 个独立的洛伦兹标量. 其中，我们有

$$p^2 = p'^2 = -m_{\mathrm{N}}^2 \tag{24.111}$$

及

$$k^2 = k'^2 = -m_\pi^2 \tag{24.112}$$

m_N 及 m_π 是物理的核子及 π 介子质量. 因此,在此问题中只有两个独立的标量变量,可以选为:

$$\nu \equiv k \cdot p$$

及

$$\nu' \equiv k \cdot p'. \tag{24.113}$$

1. **矩阵元** 散射矩阵元可以写为*

$$\langle \pi^m(k')N'(p') \mid S \mid \pi^l(k)N(p)\rangle$$
$$\equiv \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}(2\pi)^4\delta^4(k+p-k'-p')M. \tag{24.114}$$

其中振幅 M 除了一个依赖于核子旋量的协变因子外,是 ν 及 ν' 的(当然,也是 k^2、k'^2、p^2 及 p'^2 的)不变函数. 在手征 $SU_2\times SU_2$ 对称极限下,代替(24.112)式,有

$$k^2 = k'^2 = 0.$$

此式意味着,在计算 M 时,我们应当保持 ν 及 ν' 固定(p^2 及 p'^2 也是),并令 π 介子质量趋向于零,即

$$M = M(\nu, \nu') = \lim_{\substack{k^2=0\\ k'^2=0}} M(\nu, \nu'; k^2, k'^2).$$

为了导出低能区域的 $M(\nu, \nu')$,让我们考虑矩阵元

$$\langle \mathrm{f} \mid T(a_\lambda^l(x)b(x')) \mid \mathrm{in}\rangle, \tag{24.115}$$

其中 $b(x')$ 可以是任何定域算子,比如说 $a_\mu^m(x')$ 或其导数,$|\mathrm{in}\rangle$ 及 $|\mathrm{f}\rangle$ 可以是(24.98)式给出的任何初态或终态. x 及 x' 的分量如前面一样是

$$x_\mu = (\boldsymbol{r}, it), \; x'_\mu = (\boldsymbol{r}', it'),$$

T 表示编时乘积. 按照(5.38)式,写出

$$T(a_\lambda^l(x)b(x')) = \begin{cases} a_\lambda^l(x)b(x') & \text{如果 } t \geqslant t' \\ b(x')a_\lambda^l(x) & \text{如果 } t < t', \end{cases}$$

---

* 见(5.106)及(5.108)式. 因子 $(2\sqrt{k_0k_0'})^{-1}$ 来自初态及终态 π 介子. 为方便起见,我们已设系统的体积=单位体积.

它是 $t=t'$ 点阶梯函数. 对于 $\lambda=4$, 此阶梯函数的不连续量是对易子

$$[a_4^l(\boldsymbol{r},t),\ b(\boldsymbol{r}',t)].$$

因此,将(24.115)式对 x_λ 微分,得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}&\langle \mathrm{f}\mid T(a_\lambda^l(x)b(x'))\mid \mathrm{in}\rangle\\ &=\langle \mathrm{f}\mid T\Big(\frac{\partial a_\lambda^l(x)}{\partial x_\lambda}b(x')\Big)\mid \mathrm{in}\rangle\\ &\quad+\langle \mathrm{f}\mid [a_0^l(\boldsymbol{r},t),\ b(\boldsymbol{r}',t)]\mid \mathrm{in}\rangle\delta(t-t'),\end{aligned}\tag{24.116}$$

其中

$$a_4^l(x)=\mathrm{i}a_0^l(x).$$

现在设

$$b(x')=a_\mu^m(x'),\ \mid \mathrm{in}\rangle=\mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle$$

及

$$\mid \mathrm{f}\rangle=\mid N'(p')^{\mathrm{f}}\rangle.$$

由于流代数(24.40)式及 CAC(24.73)式,(24.116)成为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}&\langle N'(p')^{\mathrm{f}}\mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(x'))\mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle\\ &=\mathrm{i}\epsilon^{lmn}\langle N'(p')^{\mathrm{f}}\mid V_\mu^n(x)\mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle\delta^4(x-x')\\ &\quad+\mathrm{s.\,t.}\end{aligned}\tag{24.117}$$

其中 s. t. 是薛温格项. 正如(24.39)及(24.41)式所表明的,该项在洛伦兹变换下是明显不协变的. 在(24.116)及(24.117)式中,流算子都是海森伯表象中的算子. 用(24.96)、(24.97)及(24.100)式,可以写出

$$\begin{aligned}&\langle N'(p')^{\mathrm{f}}\mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(x'))\mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle\\ &\quad=\langle N'(p')^{\mathrm{f}}\mid T(U(\infty,-\infty)a_\lambda^l(x)_{\mathrm{I}}\\ &\qquad\times a_\mu^m(x')_{\mathrm{I}})\mid N(p)\rangle,\end{aligned}\tag{24.118}$$

其中下标 I 表示相互作用表象,T 积意味着,我们应当把 $U(\infty,-\infty)$的级数展开(5.70)式代入(24.118)式,然后按时间顺序安排

$$H_{\mathrm{int}}(t_1),\ \cdots,\ H_{\mathrm{int}}(t_n),\ a_\lambda^l(x)_{\mathrm{I}}\ 及\ a_\mu^m(x')_{\mathrm{I}}$$

的乘积. 用威克定理,我们可以把右边变换成费恩曼图. 一般说来,它们将由(图 24.5 给出的)通常的协变费恩曼图加上某些明显不协变的项

组成*. 删去这些不协变项并定义(24.118)式右边的其余部分为

$$\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(x')) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle_{\text{协变}}. \qquad (24.119)$$

令(24.117)式两边的协变部分相等,我们导出**

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(x')) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle_{\text{协变}}$$
$$= \mathrm{i}\epsilon^{lmn}\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid V_\mu^n(x) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle\delta^4(x-x'). \qquad (24.120)$$

正如(24.102)式一样,引进傅里叶变换

$$\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid V_\mu^n(p-p') \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle$$
$$\equiv \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid V_\mu^n(x) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle \mathrm{d}^4 x \qquad (24.121)$$

及

$$\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(k')) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle$$
$$\equiv \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')}\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(x')) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle_{\text{协变}}$$
$$\times\, \mathrm{d}^4 x\mathrm{d}^4 x' \qquad (24.122)$$

$$\langle N'(p')^{\mathrm{f}} \mid T(a_\lambda^l(-k)a_\mu^m(k')) \mid N(p)^{\mathrm{in}}\rangle =$$

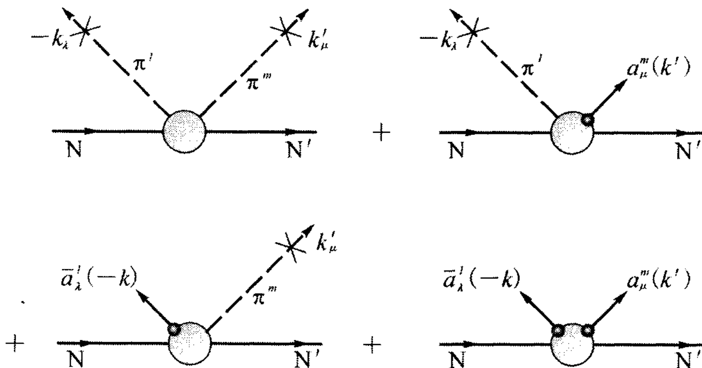


图 24.5 (24.122)及(24.127)的图形表示

* 见本节末作为进一步讨论的评论.

** 方程(24.117)隐含着除(24.120)外,两边的非协变项也必须彼此相等.因此许温格项严格地被(24.118)中的非协变部分即(24.118)与(24.119)之差抵消.

将(24.120)式两边乘上因子

$$ik'_\mu\int e^{i(k\cdot x-k'\cdot x')}d^4xd^4x',$$

然后积分. 因为 $k-k'=p'-p$, 结果为

$$k'_\mu k_\lambda\langle N'(p')^f\mid T(a^l_\lambda(-k)a^m_\mu(k'))\mid N(p)^{in}\rangle$$
$$=-k'_\mu\varepsilon^{lmn}\langle N'(p')^f\mid V^n_\mu(p-p')\mid N(p)^{in}\rangle. \qquad (24.123)$$

2. **化简** (24.122)式的费恩曼图可按 π 介子传播子因子分为三类:

(i) 有两个 π 介子极点因子乘积

$$-\frac{i}{k^2}\cdot\frac{-i}{k'^2}$$

的图;

(ii) 只有一个 π 介子极点因子

$$\frac{-i}{k^2}\text{或}\frac{-i}{k'^2}$$

的图;

(iii) 没有 π 介子极点因子的图.

图 24.5 表明了上述分类. 在该图中应用定则(24.109), 我们看到第一个图给出

$$(i)=f^2_\pi\frac{-k_\lambda k'_\mu}{k^2k'^2}\langle\pi^m(k')N'(p')^f\mid\pi^l(k)N(p)^{in}\rangle, \qquad (24.124)$$

第二与第三个图之和为

$$(ii)=f_\pi\frac{-k_\lambda}{k^2}\langle N'(p')^f\mid\bar{a}^m_\mu(k')\mid\pi^l(k)N(p)^{in}\rangle$$
$$+f_\pi\frac{k'_\mu}{k'^2}\langle\pi^m(k')N'(p')^f\mid\bar{a}^l_\lambda(-k)\mid N(p)^{in}\rangle, \qquad (24.125)$$

第四个图给出

$$(iii)=\langle N'(p')^f\mid T(\bar{a}^l_\lambda(-k)\bar{a}^m_\mu(k'))\mid N(p)^{in}\rangle. \qquad (24.126)$$

矩阵元(24.122)是所有上述三项之和:

$$\langle N'(p')^{\rm f} \mid T(a_\lambda^l(-k)a_\mu^m(k')) \mid N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$= ({\rm i}) + ({\rm ii}) + ({\rm iii}). \qquad (24.127)$$

从(24.108)式得到

$$-f_\pi\langle \pi^m(k')N'(p')^{\rm f} \mid \pi^l(k)N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$= k'_\mu\langle N'(p')^{\rm f} \mid \bar{a}_\mu^m(k') \mid \pi^l(k)N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$= -k_\lambda\langle \pi^m(k')N'(p')^{\rm f} \mid \bar{a}_\lambda^l(-k) \mid N(p)^{\rm in}\rangle. \qquad (24.128)$$

以 $k_\lambda k'_\mu$ 乘(24.124)及(24.125)式并应用(24.128)式,我们看到

$$k_\lambda k'_\mu[({\rm i}) + ({\rm ii})] = f_\pi^2\langle \pi^m(k')N'(p')^{\rm f} \mid \pi^l(k)N(p)^{\rm in}\rangle.$$

现在,将(24.127)式代入(24.123)式.应用上面的表达式,我们导出,对于由(24.114)式定义的协变振幅 M*

$$f_\pi^2 M = f_\pi^2\langle \pi^m(k')N'(p')^{\rm f} \mid \pi^l(k)N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$= -k'_\mu \epsilon^{lmn}\langle N'(p')^{\rm f} \mid V_\mu^n(p-p') \mid N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$- k_\lambda k'_\mu\langle N'(p')^{\rm f} \mid T(\bar{a}_\lambda^l(-k)\bar{a}_\mu^m(k')) \mid N(p)^{\rm in}\rangle. \qquad (24.129)$$

3. **s 波散射长度** 在能量很低时,我们把分量 k_λ 及 k'_μ(在核子静止系中)看成无穷小量:

$$k_\lambda = O(\epsilon) \quad 及 \quad k'_\mu = O(\epsilon),$$

其中 $\epsilon \to 0$. 此散射过程以 s 波为主. 当 k_λ 及 $k'_\mu \to 0$ 时,有

$$p' \to p = (0,\ {\rm i}m_{\rm N})$$

及

$$\epsilon^{lmn}\langle N'(p')^{\rm f} \mid V_\mu^n(p-p') \mid N(p)^{\rm in}\rangle$$
$$\to \begin{cases} 0, & 如果\ \mu \neq 4, \\ \left\langle {\rm i}\epsilon^{lmn}\dfrac{1}{2}\tau^n \right\rangle, & 如果\ \mu = 4, \end{cases} \qquad (24.130)$$

---

* 正如 M 中一样,外线 π 介子振幅的因子 $(2k_0)^{-1/2}$ 及 $(2k'_0)^{-1/2}$ 也没有包括在(24.124)—(24.125)式中.

其中 τ^n 是核子同位旋矩阵,$\langle\ \rangle$表示其适当的矩阵元.因为核子可以看成是固定粒子,当 $\varepsilon\to0$ 时,初态及终态 π 介子能量变成相同,

$$k_4' = k_4 = \mathrm{i}k_0, \tag{24.131}$$

并且(24.129)式简化为

$$f_\pi^2 M = k_0\left\langle \varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^n\right\rangle + O(\varepsilon^2), \tag{24.132}$$

其中 $O(\varepsilon^2)$项可以忽略.在导出此项时,我们注意到,(24.129)式右边第二项正比于 $k_\lambda k_\mu'$,从而正比于 $O(\varepsilon^2)$ *.

下一步,我们必须计算同位旋矩阵元.令$|I, I_z\rangle$为 π-N 波函数的同位旋部分,其中,和第 11 章中一样,I 是总同位旋量子数,I_z 是其 z 分量.对于 $I_z=-\frac{1}{2}$,这些态是(见(11.108)式)

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|n\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|p\pi^-\rangle$$

及

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|n\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|p\pi^-\rangle.$$

此外,用 644—645 页上给出的$|\pi^-\rangle$、$|\pi^0\rangle$及$|\pi^l\rangle$之间的关系,我们发现

$$\left\langle p\pi^-\middle|\varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^n\middle|p\pi^-\right\rangle = \mathrm{i}\varepsilon^{12n}\left\langle p\middle|\frac{1}{2}\tau^n\middle|p\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\left\langle n\pi^0\middle|\varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^n\middle|n\pi^0\right\rangle = \varepsilon^{33n}\left\langle n\middle|\frac{1}{2}\tau^n\middle|n\right\rangle = 0.$$

由于$\langle\varepsilon^{lmn}\tau^n\rangle$与一个同位旋标量的矩阵元有关**,故有

---

* 因为 π 介子是赝标介子,s 波散射振幅没有核子极点因子.否则,会有一个 $[(p+k)^2+m_N^2]^{-1}=(2pk)^{-1}$ 因子,它可能会改变此估计.

** 此同位旋标量写完全是 $a^{m\dagger}a^l\varepsilon^{lmn}\tau^n$,其中 $a^{m\dagger}$ 及 a^l 是恰当的 π 介子产生及湮没算子.

$$\left\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\left|\varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^{n}\right|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=0,$$

因此得到

$$\left\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\left|\varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^{n}\right|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{2}$$

及

$$\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\left|\varepsilon^{lmn}\frac{1}{2}\tau^{n}\right|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\mathrm{i}. \tag{24.133}$$

在这些式子中，右边清楚地与 I_z 无关．应用(24.132)—(24.133)式，我们发现 $I=\frac{3}{2}$ 的振幅 M 是*

$$M_{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{k_0}{f_\pi^2}, \tag{24.134}$$

$I=\frac{1}{2}$ 的振幅是

$$M_{\frac{1}{2}}=\mathrm{i}\frac{k_0}{f_\pi^2}. \tag{24.135}$$

其中忽略了 $O(\varepsilon^2)$项．方便的是把(24.114)式中的因子

$$\frac{1}{\sqrt{2k_0k_0'}}=\frac{1}{2k_0}$$

吸收到散射振幅中并定义

$$\mathfrak{M}_I\equiv\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}M_I,$$

则(24.134)及(24.135)式可以写为

$$\mathfrak{M}_I=\frac{\mathrm{i}}{2f_\pi^2}\cdot\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{对于 } I=\frac{3}{2}\\ 1 & \text{对于 } I=\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{24.136}$$

让我们回到物理的 π-N 散射(24.110)，其中 π 介子质量为

---

* 用不变量表示，$k_0=-k\cdot p/m_{\mathrm{N}}$.

$$m_\pi \neq 0.$$

设 π-N 系统处于总同位旋 I 的一个本征态. 按照(5.94)式,散射截面是

$$\sigma_I = 2\pi \int \frac{\mathrm{d}^3 k'}{8\pi^3 v} \delta(k_0 - k'_0) \mid \mathfrak{M}_I \mid^2,$$

其中 v 是 π 介子速度,

$$k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_\pi^2}.$$

当 $\boldsymbol{k} \to 0$ 时,我们有

$$\sigma_I = \frac{m_\pi^2}{\pi} \mid \mathfrak{M}_I \mid^2 \equiv 4\pi a_I^2,$$

其中 a_I 是散射长度. 采用通常的约定,对于排斥势,散射长度取为正(即相移为负),则有

$$a_I = \mathrm{i} \frac{m_\pi}{2\pi} \mathfrak{M}_I, \tag{24.137}$$

其中因子 i 来自下列事实: $\mathfrak{M}_I$ 与 $-\mathrm{i}H_{\mathrm{int}}$ 有同样的位相. 从(24.136)式,我们看到 *

$$a_{\frac{1}{2}} = -\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2} = -\frac{0.18}{m_\pi}$$

及

$$a_{\frac{3}{2}} = \frac{m_\pi}{8\pi f_\pi^2} = \frac{0.09}{m_\pi}, \tag{24.138}$$

它们与实验值**

$$(a_{\frac{1}{2}})_{\text{实验}} = -(0.171 \pm 0.005)/m_\pi$$

及

$$(a_{\frac{3}{2}})_{\text{实验}} = (0.088 \pm 0.004)/m_\pi$$

很好地符合.

说明. 因为(24.117)式是一个恒等式,两边的协变部分及不协变部分都分别相等. 正如前面已讲过的,右边的薛温格项必定被左边相应的项

---

* Weinberg S. *Phys Rev Lett*, 1966, **17**:616. Tomozawa Y. *Nuovo Cimento*, 1966, **46A**:707.

** Barnes S W, Winick H W, Miyake K, Kinsey K. *phys Rev*, 1960, **117**:238.

所抵消,后者来自(24.118)及(24.119)之差.为了说明为什么如

$$\langle \mathrm{f} \mid T(a_\lambda^l(x)a_\mu^m(0)) \mid \mathrm{in}\rangle \tag{24.139}$$

这样的矩阵元应当有一个非协变分量,我们可以考虑一个初等的例子.在(24.139)式中,令初态及终态为真空,定域轴算子正好是一个正则的有质量轴矢场.为了使事情更简单,我们假定此轴矢场是一个自由的有质量的自旋为1的场(此时,矢量与轴矢量场之间没有差别).然后,我们可以用拉格朗日密度(4.1)式并设 $a_\mu^m(x)$ 是第4章中的 $A_\mu(x)$ 场.于是,有兴趣的矩阵元成为戴森-威克收缩

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0) = \langle 真空 \mid T(A_\mu(x)A_\nu(0)) \mid 真空\rangle. \tag{24.140}$$

用第4章的记号,从(4.7)、(4.11)及(4.12)式得到

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{\left[\hat{k}\,a_L(\boldsymbol{k})\,\frac{\omega}{m} + \sum_{T=1,\,2}\hat{e}_T a_T(\boldsymbol{k})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{h.c.}\right\}$$

及

$$A_4(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{\mathrm{i}a_L(\boldsymbol{k})\,\frac{|\boldsymbol{k}|}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{h.c.}\right\}.$$

既然

$$T(A_\mu(x)A_\nu(0)) \equiv \begin{cases} A_\mu(x)A_\nu(0) & 如果\ t \geqslant 0, \\ A_\nu(0)A_\mu(x) & 如果\ t < 0. \end{cases} \tag{24.141}$$

故有

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2\omega\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\cdot\begin{cases} (\delta_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu m^{-2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & 如果\ t \geqslant 0, \\ (\delta_{\mu\nu} + q_\mu^* q_\nu^* m^{-2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 如果\ t < 0, \end{cases} \tag{24.142}$$

其中

$$q_4 = \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2},$$

$$q_j = k_j (j = 1,\ 2,\ 3),$$

q_μ^* 是 q_μ 的复共轭.将(24.142)式中的求和变换成费恩曼型积分,我们发现

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0) = -\mathrm{i}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2\pi\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_0$$

$$\cdot\left[\frac{\delta_{\mu\nu}+m^{-2}k_\mu k_\nu}{k^2+(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}-\frac{1}{m^2}\delta_{4\mu}\delta_{4\nu}\right]\mathrm{e}^{ik\cdot x}$$

其中 $k_4 = ik_0$. 取极限 $\Omega\to\infty$,我们得到

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0)=\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0)+\frac{\mathrm{i}}{m^2}\delta_{4\mu}\delta_{4\nu}\delta^4(x), \qquad (24.143)$$

其中

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(0)=-\mathrm{i}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\delta_{\mu\nu}+m^{-2}k_\mu k_\nu}{k^2+(m-\mathrm{i}\epsilon)^2}\mathrm{d}^4k \qquad (24.144)$$

是(22.80)式给出的协变的路径积分收缩. 注意到如果我们把 T 积的定义(24.141)改变为

$$T(A_\mu(x)A_\nu(0))=\begin{cases}A_\mu(x)A_\nu(0) & \text{如果 } t>0,\\ A_\nu(0)A_\mu(x) & \text{如果 } t\leqslant 0.\end{cases}$$

(24.143)式仍然成立. 因此,我们看到,戴森-威克收缩(24.143)式是典型的(24.139)形状的矩阵元,它确实有明显不协变的项. 如果 $x\neq 0$, 该项为零. 这类似于薛温格项.

24.6 PCAC

在这一节中,考虑夸克质量不为零从而 π 介子及 K 介子质量不为零的效应.

1. **手征对称性破缺** 我们先讨论手征 $SU_2\times SU_2$ 对称性的破缺. 假定上夸克及下夸克质量相等,但不为零,亦即在量子色动力学的拉格朗日量中,

$$m_\mathrm{u}=m_\mathrm{d}\neq 0 \qquad (24.145)$$

[例如,见(18.3)式]. 因此,同位旋 SU_2 对称性仍成立. 应用运动方程(18.6a)式,我们发现,轴流守恒定律被下式代替

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\boldsymbol{a}_\lambda=\mathrm{i}m_\mathrm{u}q^\dagger\gamma_4\gamma_5\boldsymbol{\tau}q, \qquad (24.146)$$

其中 q 是(24.71)式定义的夸克场.

现在考虑 π 衰变振幅公式(21.19)式

$$\langle 真空 \mid A_\lambda^\pm(x) \mid \pi^\mp \rangle = \mathrm{i}\cos\theta_c F_\pi k_\lambda \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}.$$

我们回想起,此式原先是在第21章中对于4动量为 k 的物理 π 介子态导出的,其中 k 满足

$$k_4 = \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_\pi^2}$$

及

$$-k^2 = m_\pi^2 = (物理的\ \pi\ 介子质量)^2. \tag{24.147}$$

取 $A_\lambda^\pm(x)$ 的散度,有

$$\left\langle 真空 \left| \frac{\partial A_\lambda^\pm(x)}{\partial x_\lambda} \right| \pi^\mp \right\rangle = \cos\theta_c F_\pi m_\pi^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}.$$

用(24.75)式,将 $A_\lambda^\pm$ 变换成 $\boldsymbol{a}_\lambda$,我们发现

$$\left\langle 真空 \left| \frac{\partial a_\lambda^l(x)}{\partial x_\lambda} \right| \pi^{l'} \right\rangle = \delta^{ll'} f_\pi m_\pi^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{24.148}$$

在唯象学的水平上,我们可以引进同位旋矢量 π 介子场算子 $\boldsymbol{\phi}_\pi(x)$. 必要条件是它应当为定域算子,并且在真空和物理单 π 介子态间有不为零的矩阵元. 此外,它的归一化是

$$\langle 真空 \mid \phi^l(x) \mid \pi^{l'} \rangle = \delta^{ll'} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{24.149}$$

我们可能可放松要求,把这些必要条件看成充分条件,并称任何一个这样的定域算子为 π 介子的**内插场**. 据此理解,(24.148)及(24.149)式产生

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_\lambda(x)}{\partial x_\lambda} = f_\pi m_\pi \boldsymbol{\phi}_\pi(x). \tag{24.150}$$

此式将称为 PCAC(部分守恒轴流*)的基本方程. 综合(24.146)及

---

* Gell-mann M, Levy M. *Nuovo Cimento*, 1960, **16**:705. Bernstein J, Fubini S, Gell-mann M, Thirring W. *Nuovo Cimento*, 1960, **17**:757. Chou Kuang-chao(周光召). *Soviet Physics*, 1961, **12**:492 [JETP, 1963, **39**:703].

(24.150)式,我们看到 π 介子内插场也由下式给出:

$$\boldsymbol{\phi}_\pi = \mathrm{i}\,\frac{m_u}{f_\pi m_\pi^2} q^\dagger \gamma_4 \gamma_5 \boldsymbol{\tau} q.$$

向手征 SU_3 对称性破缺的推广是直接的. 我们引进质量矩阵

$$m = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_u & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} \tag{24.151}$$

其中 u 和 d 有相同的质量,但 s 的质量不同. 于是,尽管同位旋对称性还是原样,味 SU_3 对称性却破坏了. 代替(24.146)式,现在有

$$\frac{\partial a_\lambda^l}{\partial x_\lambda} = \mathrm{i}\,\frac{1}{2} q^\dagger \gamma_4 \gamma_5 (m\lambda^l + \lambda^l m) q \tag{24.152}$$

其中 $q(x)$ 及 $a_\lambda^l(x)$ 由(24.1)及(24.4)式给出.

对于 $l = 1$, 2 及 3, (24.148)式仍正确,因而(24.150)也是这样. 对于 $l = 4$、5、6 及 7, 我们用 501—502 页上给出的 K 衰变表达式. 根据与从 π 衰变振幅(21.19)导出(24.148)式一样的论证,我们发现,K 衰变振幅(21.23)给出

$$\left\langle 真空 \left| \frac{\partial a_\lambda^l(x)}{\partial x_\lambda} \right| K^{l'} \right\rangle = \delta^{ll'} f_\pi m_K^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \tag{24.153}$$

其中

$$\begin{aligned} & l \text{ 及 } l' = 4、5、6、7, \\ & k_4 = \mathrm{i}\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_K^2}, \\ & -k^2 = m_K^2, \\ & m_K = \text{物理的 K 介子质量}. \end{aligned} \tag{24.154}$$

由于卡比博理论,(24.153)式中的常数也是 π 介子衰变常数 $f_\pi \cong$ 93 MeV. 类似于(24.150)式,我们可以引进 K 介子内插场 $\phi_K^l(x)$,它满足 PCAC 方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_\lambda^l(x) = f_\pi m_K^2 \phi_K^l(x) \tag{24.155}$$

及归一化条件

$$\langle 0 \mid \phi_{\mathrm{K}}^{l}(x) \mid K^{l'} \rangle = \delta^{ll'} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} \mathrm{e}^{ik\cdot x},$$

其中 l, l', ω 及 k 由(24.154)式给出.

2. ***夸克质量与赝标粒子质量之间的关系*** 将夸克质量矩阵 m 即(24.151)式作为微扰,可以研究它对物理 π 介子及 K 介子质量的影响. 当 $m=0$ 时, π 介子及 K 介子成为零质量戈德斯通玻色子. 在这一节中,我们将计算 m_π^2 及 m_{K}^2 到 m 的一阶. 从设(24.116)式中

$$b(x') = \frac{\partial a_\mu^{l'}(x')}{\partial x_\mu'}$$

及

$$|\,\mathrm{in}\rangle = |\,\mathrm{f}\rangle = |\,真空\rangle$$

开始分析. 这给出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left\langle 真空 \left| T\left(a_\lambda^l(x) \frac{\partial a_\mu^{l'}(x')}{\partial x_\mu'} \right) \right| 真空 \right\rangle
&= \left\langle 真空 \left| T\left[\frac{\partial a_\lambda^l(x)}{\partial x_\lambda} \frac{\partial a_\mu^{l'}(x')}{\partial x_\mu'} \right] \right| 真空 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle 真空 \left| \left[a_0^l(x), \frac{\partial a_\mu^{l'}(x')}{\partial x_\mu'} \right] \right| 真空 \right\rangle \delta(t-t')
\end{aligned} \tag{24.156}$$

让我们先考察 π 介子部分,考虑 l 及 $l'=1, 2, 3$ 的情形. 将(24.150)式代入(24.156)的左边,(24.146)代入右边,我们发现

$$\begin{aligned}
& f_\pi m_\pi^2 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \langle 真空 \mid T(a_\lambda^l(x) \phi_\pi^{l'}(x')) \mid 真空 \rangle \\
&\quad = \mathrm{i} m_{\mathrm{u}} \langle 真空 \mid [a_0^l(\boldsymbol{r}, t), q^\dagger(\boldsymbol{r}', t) \gamma_4 \gamma_5 \tau^{l'} q(\boldsymbol{r}', t)] \mid 真空 \rangle \\
&\quad\quad \cdot \delta(t-t') + O(m_{\mathrm{u}}^2),
\end{aligned} \tag{24.157}$$

这里,到 $O(m_{\mathrm{u}})$阶,可以求出在理想手征对称极限下两边的真空期望值. 因为

$$\left[\frac{1}{2} \gamma_5 \tau^l, \gamma_4 \gamma_5 \tau^{l'} \right] = -\frac{1}{2} \gamma_4 (\tau^l \tau^{l'} + \tau^{l'} \tau^l)$$

$$= -\gamma_4 \delta^{ll'},$$

由(3.24a)及(24.70)—(24.71)式,(24.157)的右边为:

$$-\mathrm{i}m_u\langle 真空 \mid \psi_u^{c\dagger}\gamma_4\psi_u^c + \psi_d^{c\dagger}\gamma_4\psi_d^c \mid 真空\rangle\delta^4(x-x')\delta^{ll'}$$
$$= -2\mathrm{i}m_u\rho\delta^{ll'}, \tag{24.158}$$

其中

$$\rho = \langle 真空 \mid \psi_u^{c\dagger}\gamma_4\psi_u^c \mid 真空\rangle\delta^4(x-x')$$
$$= \langle 真空 \mid \psi_d^{c\dagger}\gamma_4\psi_d^c \mid 真空\rangle\delta^4(x-x'), \tag{24.159}$$

因为同位旋守恒,故有

$$\langle 真空 \mid T(a_\lambda^l(x)\phi_\pi^{l'}(x')) \mid 真空\rangle = 0, 如果\ l \neq l',$$

因此,在同位旋对称极限下,定义

$$-\mathrm{i}\sigma\delta^{ll'} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle 真空 \mid T(a_\lambda^l(x)\phi_\pi^{l'}(x')) \mid 真空\rangle, \tag{24.160}$$

并忽略 $O(m_u^2)$,就可以改写(24.157)式为

$$f_\pi m_\pi^2 \sigma = 2m_u\rho. \tag{24.161}$$

用完全相同的方法,可以将我们的讨论推广到 K 介子部分. 对于

$$l\ 及\ l' = 4,\ 5,\ 6,\ 7, \tag{24.162}$$

由于(24.152)及(24.155)式,(24.157)式为下式代替:

$$f_\pi m_K^2 \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle 真空 \mid T(a_\lambda^l(x)\phi_K^{l'}(x')) \mid 真空\rangle$$
$$= \mathrm{i}\frac{1}{2}\langle 真空 \mid [a_0^l(\boldsymbol{r},\ t),\ q^\dagger(\boldsymbol{r}',\ t)\gamma_4\gamma_5(m\lambda^{l'}$$
$$+ \lambda^{l'}m)q(\boldsymbol{r}',\ t)] \mid 真空\rangle + O(m^2), \tag{24.163}$$

其中,按照(24.151)式

$$m = \frac{1}{3}(2m_u + m_s) + \frac{1}{\sqrt{3}}(m_u - m_s)\lambda^8. \tag{24.164}$$

从(12.23)—(12.24)、(24.162)及(24.164)式得出

$$\frac{1}{2}(m\lambda^l+\lambda^l m)=\frac{1}{2}(m_u+m_s)\lambda^l,$$

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_5\lambda^l,\ \gamma_4\gamma_5\lambda^{l'}\right]$$

$$=\begin{cases}-\gamma_4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{如果 } l=l'=4 \text{ 或 } 5,\\ -\gamma_4\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{如果 } l=l'=6 \text{ 或 } 7,\\ \text{对角元素为 0 的矩阵,其他情形.}\end{cases}$$

在味 SU_3 对称极限下,有

$$\begin{aligned}\langle\text{真空}\mid\psi_u^{c\dagger}\gamma_4\psi_u^c\mid\text{真空}\rangle&=\langle\text{真空}\mid\psi_d^{c\dagger}\gamma_4\psi_d^c\mid\text{真空}\rangle\\&=\langle\text{真空}\mid\psi_s^{c\dagger}\gamma_4\psi_s^c\mid\text{真空}\rangle\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\langle\text{真空}\mid\psi_u^{c\dagger}\gamma_4\psi_d^c\mid\text{真空}\rangle&=\langle\text{真空}\mid\psi_d^{c\dagger}\gamma_4\psi_s^c\mid\text{真空}\rangle\\&=\langle\text{真空}\mid\psi_s^{c\dagger}\gamma_4\psi_u^c\mid\text{真空}\rangle\\&=0.\end{aligned}$$

因此,(24.163)式右边是

$$-\mathrm{i}(m_u+m_s)\rho\delta^{ll'},$$

其中 ρ 由(24.159)式给出.在同一极限下,我们也有

$$-\mathrm{i}\sigma\delta^{ll'}=\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle\text{真空}\mid T(a_\lambda^l(x)\phi_K^{l'}(x'))\mid\text{真空}\rangle,$$

其中 σ 由(24.160)式给出.因此,忽略 $O(m^2)$,(24.163)式给出

$$f_\pi m_K^2\sigma=(m_u+m_s)\rho, \tag{24.165}$$

结合(24.161)式,我们导出

$$\left(\frac{m_\pi}{m_k}\right)^2=\frac{2m_u}{m_u+m_s} \tag{24.166}$$

或者，由于 $m_s \gg m_u$，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{m_k}\right)^2 \cong \frac{m_u}{m_s}. \tag{24.167}$$

在 20.6.2 节中，已用上述关系式去确定夸克质量[见(20.73)—(20.74)式]

习题 24.1.

证明低能 s 波 ππ 散射长度是

$$a_I = \frac{m_\pi}{32 f_\pi^2}\begin{cases} -7, & I = 0 \text{时}, \\ 2, & I = 2 \text{时}, \end{cases}$$

其中 I 是总同位旋.[见 S. Weinberg,661 页上引的文献]

参 考 文 献

Adler S L, Dashen RF. Current Algebra. New York:Benjamin Inc. 1968.

Bernstein J. Elementary Particles and Their Currents. New York: W. H. Freeman and Co, 1968.

Weinstein M. Chiral Symmetry. Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 60. Berlin:Heidelberg and New York:Springer-Verlag, 1971.

Lee B W. Chiral Dynamics. New York:Gordon and Breach Science Publishers, 1972.

Treiman S B, Jackiw R, Gross D J. Lectures on Current Algebra and Its Applications. Princeton:Princeton University Press, 1972.

第25章 展 望

目前,我们好像已经得到了物理规律的一个封闭体系,其中对于强相互作用有量子色动力学,对于弱相互作用及电磁相互作用有统一规范理论,当然,还加上爱因斯坦的引力理论.不过,我们仍然急需此理论的大多数判决性证明.至今,实验上还没有确定胶子的自旋及其他量子数*,中间玻色子仍然是理论假说,至今还没有检测到引力波.基本相互作用的四种媒介场中,只有光子有坚实的实验基础.不过,我们可以勇敢地认为,在适当的时候证据将会到来.但是,即使在那时候,有任何基础使我们相信我们已经达到我们的最终目标——理解自然界的全部基本规律吗?

单是统一规范理论的标准模型就需要大约20个参数:e、G、θ_w、三代轻子及夸克的各种各样的质量以及四个弱衰变角 θ_1、θ_2、θ_3 及 δ.[如果观察到中微子振荡,可能需要更多的参数]因此,一方面,我们可能已经得到对于直到大约100 GeV的物理过程的有效描述.另一方面,把我们已有的理论看成实质上是唯象理论更为合适.毕竟,谁曾听说过,一个基本的理论要求20个左右的参数呢?下面是一些可能改变我们目前的思想框架的方向.

1. **轻子和夸克的大小** 假设无论轻子还是夸克都不是基本的.它们不是点粒子.它们全有大小.它们不能太大.例如,考虑电子.由量子电动力学的试验,其大小 l 必须小于 $\sim 10^{-16}$ 厘米.$l \neq 0$ 隐含着应当有一个不为零的惯性矩,由此,电子在碰撞中可以得到角动量,造成高自旋 $j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$ 的重电子.其质量对于 j 的斜率应当为

$$\sim \frac{1}{l} \gtrsim 100\ \text{GeV}.$$

* 见23.6.5节.

依据已知的相互作用,我们可以预言这样一个称为 E 的重电子最低限度会显示出的现象. 我们期望,在其主要衰变模式中有

$$\mathrm{E} \to \mathrm{e} + \gamma$$

$$\to \mathrm{e} + \text{轻子对} + \text{多}\ \gamma.$$

实验上,如果 E 可以产生,我们将看到纯粹是 γ 及轻子簇射的高能喷注,它们会相当引人注目. 如果发现了这类高自旋轻子和夸克,那我们将不得不开新端去建立我们的理论,并寻找构造宇宙的新的砖石.

2. ***真空工程的可能性*** 无论是自发对称破缺机理还是夸克禁闭现象,都使我们相信,真空尽管洛伦兹不变,但是相当复杂. 像任何其他物理介质一样,它可以有长程序参数,并且经历相变. 至今,在任何高能实验中,能量愈高,我们能探索的空间区域就愈小. 因此,我们失去了研究与真空相关的相干现象的机会. 为了考察这类可能性,我们把高能或高物质密度分散分布到一个大的空间体积. 这类改变真空性质的实验方法可以称为真空工程. 一个有效的方法可能是用相对论性重离子. 为了克服由 ω^0 及其他矢量介子产生的强大的短距离核斥力,我们要求在质心系中每个核子的能量$\gg$1 GeV. 如果我们可以产生真空激发或真空相变,则我们目前的理论中的任何常数,θ_{w}, θ_{c}, m_{u}, m_{d}, $\cdots$,可能不得不改变. 如果我们确实能变革真空,那么我们可能会碰到新的完全没有料到的现象.

3. ***改进通常的量子力学*** 目前,量子力学的正确性几乎被毫无怀疑地看成是普适的. 但是,我们究竟能肯定到什么程度? 它的基础有多牢固? 在量子力学中,正在被观测的系统满足时间有关的薛定谔方程

$$H\psi_{\text{系统}} = \mathrm{i}\,\dot{\psi}_{\text{系统}}, \tag{25.1}$$

其中,观察者没有作为动力学变量的一部分包含在内. 系统的观测效应用著名的 $\psi_{\text{系统}}$ 的概率振幅分解定则描写. 这里,将给出一个论证来说明这不可能是一个完全理论的最终形式. 我们注意到,通常的量子力学方程式一点也没有很好地描写系统对于观测者的逆效应. 可以肯定,这样一类效应必然存在. 这正如我们考虑一个物理学家粗心地喝了一杯碰巧他正在观测的液氦超流体这一例子中液氦必然会对该物理学家发生效应一样明显. 不过,在观察者对系统的效应是量子力学效应的同时,逆效应总是用

经典术语表达. 但是,根据可逆性,这样一类不对称性只能看作为近似.

我们或许不知道怎样用量子力学的概率振幅而不是用经典概率去表达对于观测者的效应. 目前,甚至似乎没有一个适于表达这类现象的词典. 摆脱这一困境的一种方法可能是考虑更大的希尔伯特空间中的态矢,

$$\psi = \psi_{观察者} \otimes \psi_{系统}$$

可以尝试性地假定它满足通常的量子力学运动规律. 考虑到 $\psi_{系统}$对于 $\psi_{观测者}$的量子力学效应,然后重新把 $\psi_{观测者}$的效应叠代回 $\psi_{系统}$中,我们可能导出一个改善了的 $\psi_{系统}$的方程. 它带有对(25.1)式的修正. 然后,这个修正方程的效果可以用通常的语言表达,后者忽略了系统对于观测者的非经典效应. 沿此方向逐次作近似,有希望可以得到一个更基本的系统的方程,后者可以用实验检验.

当然,我们不能预告未来. 粒子物理的历史曾经充满出乎意料的发现,它们转而导致了出乎意料的方向. 在粒子物理的演化中,我们曾见证了许多例子,它们显示出的,既有物理学家的智慧,也有愚蠢. 似乎更可能的是,我们目前的了解也是暂时的. 我们的基本概念和理论将进一步经受重大的改变. 确实,很早以前就有人说过*:道可道,非常道,名可名,非常名.

道可道 名可名

非常道 非常名

图 25.1 李政道手迹

* 老子:《道德经》(～公元前 550 年).

附录 物理常量

本表(最后一组数据除外)是国际科学技术数据委员会(CODATA)推荐在国际上使用的物理常量,这些数值来自于参考文献 Mohr PJ, Taylor BN. *Rev Mod Phys*, 2005, **77**:1。CODATA 完整的常量集可以在http://physics.nist.org/constants 查到。最后一组数据(从费米耦合常量开始)来自于粒子数据组(Particle Data Group, http://pdg.lbl.gov)。在数值之后圆括号内的数字是一个标准误差的不确定性。所对应的以 10^9 为分母的分数不确定性(ppb)在最后一列给出。

0 物理量	符号/公式	数 值	不确定度(ppb)
1 真空中光速	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	exact[1]
2 普朗克常量	h	$6.626\,069\,3(11)\times10^{-34}$ J s	170
3 约化普朗克常量	$\hbar\equiv h/2\pi$	$1.054\,571\,68(18)\times10^{-34}$ J s	170
		$=6.582\,119\,15(56)\times10^{-22}$ MeV s	85
4 电子电荷,基本电荷	e	$1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}$ C $=4.803\,204\,41(41)\times10^{-10}$ esu	85, 85
5 转换常量	$\hbar c$	$197.326\,968(17)$MeV fm	85
6 转换常量	$(\hbar c)^2$	$0.389\,379\,323(67)$GeV^2 mbarn	170

（续表）

物理量	符号/公式	数　　值	不确定度(ppb)
7 电子质量	m_e	$0.510\,998\,918(44)\,\mathrm{MeV}/c^2 = 9.109\,382\,6(16)\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$	86，170
8 质子质量	m_p	$938.272\,029(80)\,\mathrm{MeV}/c^2 = 1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$	86，170
		$= 1.007\,276\,466\,88(13)\,\mathrm{u} = 1\,836.152\,672\,61(85)\,m_e$	0.13，0.46
9 氘核质量	m_d	$1\,875.612\,82(16)\,\mathrm{MeV}/c^2$	86
10 标准原子质量单位	$(\mathrm{mass}\,{}^{12}\mathrm{C\ atom})/12 = (1\,\mathrm{g})/(N_A\,\mathrm{mol})$	$931.494\,043(80)\,\mathrm{MeV}/c^2 = 1.660\,538\,86(28)\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$	86，170
11 真空电容率	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\,187\,817\cdots\times10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$	exact
12 真空磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} = 12.566\,370\,614\cdots\times10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$	exact
13 精细结构常数	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$	$7.297\,352\,568(24)\times10^{-3} = 1/137.035\,999\,11(46)$[2]	3.3，3.3
14 电子经典半径	$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$	$2.817\,940\,325(28)\times10^{-15}\,\mathrm{m}$	10
15 电子康普顿波长/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\,592\,678(26)\times10^{-13}\,\mathrm{m}$	6.7
16 玻尔半径(m 核子 $=\infty$)	$a_\infty = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\,177\,210\,8(18)\times10^{-10}\,\mathrm{m}$	3.3
17 动量为 1 eV/c 粒子的波长	$hc/(1\,\mathrm{eV})$	$1.239\,841\,91(11)\times10^{-6}\,\mathrm{m}$	85
18 里德伯能量	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	$13.605\,692\,3(12)\,\mathrm{eV}$	85
19 汤姆逊截面	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	$0.665\,245\,873(13)\,\mathrm{barn}$	20

（续表）

物理量	符号/公式	数　值	不确定度(ppb)
20 玻尔磁子	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\,381\,804(39) \times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	6.7
21 核磁子	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\,451\,259(21) \times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	6.7
22 电子回旋频率/场强	$\omega_{cycl}^{e}/B = e/m_e$	$1.758\,820\,12(15) \times 10^{11}$ rad $s^{-1}T^{-1}$	86
23 质子回旋频率/场强	$\omega_{cycl}^{p}/B = e/m_p$	$9.578\,833\,76(82) \times 10^{7}$ rad $s^{-1}T^{-1}$	86
24 万有引力常量[3]	G_N	$6.674\,2(10) \times 10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$	1.5×10^5
		$= 6.708\,7(10) \times 10^{-39}\,\hbar c(\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^5
25 标准引力加速度	g_n	$9.806\,65$ m s^{-2}	exact
26 阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022\,141\,5(10) \times 10^{23}$ mol^{-1}	170
27 玻尔兹曼常量	k	$1.380\,650\,5(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}	1 800
		$= 8.617\,343(15) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}	1 800
28 标准状况下一摩尔理想气体体积	$N_Ak(273.15\text{ K})/(101\,325\text{ Pa})$	$22.413\,996(39) \times 10^{-3}$ m^3mol^{-1}	1 700
29 维恩常量	$b = \lambda_{max}T$	$2.897\,768\,5(51) \times 10^{-3}$ m K	1 700
30 斯特藩-玻尔兹曼常量	$\sigma = \pi^2k^4/60\hbar^3c^2$	$5.670\,400(40) \times 10^{-8}$ W $m^{-2}K^{-4}$	7 000
31 费米耦合常量[4]	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\,37(1) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}	9 000
32 弱混合角	$\sin^2\hat{\theta}(M_Z)(\overline{\text{MS}})$	$0.231\,20(15)$[5]	6.5×10^5
33 W^{+-}玻色子质量	m_W	$80.425(38)\text{GeV}/c^2$	4.8×10^5
34 Z^0 玻色子质量	m_Z	$91.187\,6(21)\text{GeV}/c^2$	2.3×10^4

（续表）

物理量	符号/公式	数　　值	不确定度(ppb)
35 强耦合常量	$\alpha_s(m_Z)$	0.118 7(20)	1.7×10^7
$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238$		$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$	$\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 861$
$1\ \text{in} \equiv 0.025\ 4\ \text{m}$	$1\ \text{G} \equiv 10^{-4}\ \text{T}$	$1\ \text{eV} = 1.602\ 176\ 53(14)\times10^{-19}\ \text{J}$	kT at 300 K $= [38.681\ 684(68)]^{-1}$ eV
$1\ \text{Å} \equiv 0.1\ \text{nm}$	$1\ \text{dyne} \equiv 10^{-5}\ \text{N}$	$1\ \text{eV}/c^2 = 1.782\ 661\ 81(15)\times10^{-36}\ \text{kg}$	$0\ ℃ \equiv 273.15\ \text{K}$
$1\ \text{barn} \equiv 10^{-28}\ \text{m}^2$	$1\ \text{erg} \equiv 10^{-7}\ \text{J}$	$2.997\ 924\ 58\times10^9\ \text{esu} = 1\ \text{C}$	1 atmosphere $\equiv$ 760 Torr $\equiv$ 101 325 Pa

[1] 光速值是确切的，因为米的单位由光速定义．一米等于光在真空中一秒钟传播距离的 1/299 792 458.

[2] 在 $Q^2 = 0$ 时的值．在 $Q^2 \approx m_w^2$ 时，数值近似为 1/128.

[3] G_N 的实验室测量绝对值是在 1 厘米到 1 米之间范围内测定的．

[4] 请参阅粒子数据组 2005 年粒子物理评述．
(http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/contents_sports.html)内第 10 节“电弱模型和新物理内约束”的讨论．

[5] 所对应的有效角 $\sin^2\theta$ 值为 0.231 49(15).

索　引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Z

外　文



责任编辑　王桂华
封面设计　戚永昌



www.sstp.cn
ISBN 7-5323-8623-6



定价：138.00元